NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS LXXIII.

CUM TABULIS XII.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

73. Band.

Mit 12 Tafeln.

Halle, 1907.

Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei W. Engelmann in Leipzig.

JOV
5514
.b

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

6254.

Exchange

October 24, 1907.

NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS LXXIII.

CUM TABULIS XII.

Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

73. Band.

Mit 12 Tafeln.

A Halle, 1907.
Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei W. Engelmann in Leipzig.

Seiner Majestät

Wilhelm II.

Deutschem Kaiser und Könige von Preussen

ihrem hohen Schirmherrn

dem erhabenen Gönner und Beförderer aller wissenschaftlichen Arbeit
des deutschen Volkes

widmet die

Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie
der Naturforscher

diesen dreiundsiebenzigsten Band ihrer Abhandlungen

durch den Präsidenten

Dr. **Albert Wangerin.**

Inhalt des LXXIII. Bandes.

I. **Chr. Wiener:** Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung . . . . S. 1—240.

II. **Rud. Burckhardt:** Das Zentral-Nervensystem der Selachier als Grundlage für eine Phylogenie des Vertebratenhirns. . . S. 241—450. Taf. I—V.

III. **Th. Herzog:** Studien über den Formenkreis von Trichostomum mutabile Br. . . . . S. 451—498. Taf. VI—XII.

Nach dem ursprünglichen Plane sollte im vorliegenden Bande der zweite Teil der Wienerschen Abhandlung Platz finden. Da aber die Drucklegung dieses Teils bisher noch nicht möglich gewesen, sind an dessen Stelle die Abhandlungen von Burckhardt und Herzog gesetzt, um die Ausgabe des Bandes, dessen Druck bereits 1899 begonnen hat, nicht länger zu verzögern.

Vorstand der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

Gegründet am 1. Januar 1652. Deutsche Reichsakademie seit dem 7. August 1687.

Präsidium.

A. Wangerin in Halle a. S., Präsident.

J. Volhard in Halle a. S., Stellvertreter.

Adjunkten.

I. Kreis: J. Hann in Wien;
E. Mach in Wien;
G. Stache in Wien.

II. Kreis: E. Wiedemann in Erlangen;
R. Hertwig in München.

III. Kreis: K. B. Klunzinger in Stuttgart.

IV. Kreis: A. Weismann in Freiburg.

V. Kreis: G. A. Schwalbe in Strafsburg.

VI. Kreis: R. Lepsius in Darmstadt.

VII. Kreis: E. Strasburger in Bonn.

VIII. Kreis: M. H. Bauer in Marburg.

IX. Kreis: E. H. Ehlers in Göttingen.

X. Kreis: K. Brandt in Kiel.

XI. Kreis: J. Volhard in Halle.

XII. Kreis: E. Haeckel in Jena.

XIII. Kreis: C. Chun in Leipzig;
F. Zirkel in Leipzig.

XIV. Kreis: A. Ladenburg in Breslau.

XV. Kreis: C. A. Jentzsch in Berlin;
R. Credner in Greifswald.

Sektionsvorstände und deren Obmänner.

I. Mathematik und Astronomie:

J. Lüroth in Freiburg, Obmann;
R. Helmert in Potsdam;
G. Cantor in Halle.

II. Physik und Meteorologie:

G. B. von Neumayer in Neustadt a. H., Obmann;
E. Riecke in Göttingen;
E. Mach in Wien.

III. Chemie:

O. Wallach in Göttingen, Obmann;
H. Landolt in Berlin;
J. Volhard in Halle.

IV. Mineralogie und Geologie:

F. Zirkel in Leipzig, Obmann;
H. Credner in Leipzig;
W. Branca in Berlin.

V. Botanik:

H. G. A. Engler in Dahlem-Steglitz bei Berlin, Obmann;
S. Schwendener in Berlin;
Graf zu Solms-Laubach in Strafsburg.

VI. Zoologie und Anatomie:

F. E. Schulze in Berlin, Obmann;
E. H. Ehlers in Göttingen;
M. Fürbringer in Heidelberg.

VII. Physiologie:

C. von Voit in München, Obmann;
S. Exner in Wien;
W. Engelmann in Berlin.

VIII. Anthropologie, Ethnologie und Geographie:

G. C. Gerland in Strafsburg, Obmann;
A. Penck in Berlin;
J. Ranke in München.

IX. Wissenschaftliche Medizin:

E. von Leyden in Berlin, Obmann;
W. O. von Leube in Würzburg;
H. Waldeyer in Berlin.

NOVA ACTA

Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher

Band LXXIII. Nr. 1.

Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung.

Von

Dr. Chr. Wiener †,

herausgegeben

von

Dr. H. Wiener und Dr. O. Wiener.

Eingegangen bei der Akademie am 31. Juli 1896.

HALLE.

1900.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Vorwort der Herausgeber.

Das Werk, dessen erste Hälfte hiermit der Oeffentlichkeit übergeben wird, konnte leider nicht mehr von seinem Verfasser, Christian Wiener, der am 31. Juli 1896 starb, selbst zum Druck gebracht und herausgegeben werden. Zwei seiner Söhne übernahmen auf seinen letztwilligen Wunsch diese Arbeit und fügen ein kurzes Vorwort bei, in dem der Zweck des Werkes bezeichnet, und hierbei dem Verfasser selbst in erster Linie das Wort gelassen wird.

Es ist eine eigenartige Thatsache, dass oft gerade die alltäglichsten Erscheinungen am längsten einer wissenschaftlichen Erklärung harren. So lange es Menschen giebt, hatten sie auch Gelegenheit die schöne Erscheinung eines klaren Himmels zu beobachten. Zwar wissen wir jetzt, woher im allgemeinen seine Helligkeit und seine Farbe stammt, aber eine vollständige Theorie der Himmelshelligkeit, welche die Vertheilung der Helligkeit am ganzen Himmel bei einem beliebigen Stande der Sonne und gegebenen meteorologischen Konstanten zu bestimmen gestattet und die mit den Thatsachen auch nur einigermaassen übereinstimmte, hat bis jetzt vollständig gefehlt. Es ist das wohl begreiflich; denn einerseits waren grundsätzlich neue Thatsachen und Gesetze hier nicht zu erhoffen, vielmehr konnte es sich nur um die Anwendung bekannter optischer Gesetze auf einen besonderen Fall handeln, andererseits war von vornherein zu übersehen, dass dieser besondere Fall eben ausserordentlich verwickelt lag, und so musste die Aufgabe seiner praktischen Durchführung abschrecken. Und doch war die Lösung dieser Aufgabe in mehr als einer Hinsicht erwünscht.

Die Gründe, welche den Verfasser dazu bewogen sich dieser schwierigen Aufgabe zu unterziehen, sind für die Art seines wissenschaftlichen Arbeitens bezeichnend. Die Beleuchtungslehre bildet einen Theil der darstellenden Geometrie, welche das Sonderfach des Verfassers war. Die vielfachen Irrthümer und Willkürlichkeiten, welche bisher in jener Lehre verbreitet waren, reizten den Verfasser, den thatsächlich geltenden Gesetzen nachzuforschen. Unter anderm wird dort die Aufgabe behandelt die Helligkeiten darzustellen, in denen eine Kugel erscheint, wenn sie von der Sonne beleuchtet wird. Die strenge Lösung dieser Aufgabe führt dazu, die beschatteten Theile der Kugel vollständig schwarz darzustellen, was den natürlichen Verhältnissen widerspricht. Denn in Wirklichkeit würde eine im Freien aufgestellte Kugel nicht bloss von der Sonne, sondern auch von der Atmosphäre und dem Boden beleuchtet. Die Beleuchtung durch die Atmosphäre kann aber nur richtig wiedergegeben werden, wenn die Helligkeitsvertheilung am Himmel bekannt ist.

In der That hatte der Verfasser ursprünglich die Absicht die ganze Aufgabe im zweiten Bande seines Lehrbuchs der darstellenden Geometrie[1]) abzuhandeln. Dies wäre möglich gewesen, wenn er sich mit einer angenäherten Behandlung der Himmelshelligkeit begnügt hätte im Anschluss an seine eigenen photometrischen Beobachtungen, die er bereits am 13. September 1884 angestellt hatte. Dass dies wirklich zunächst seine Absicht gewesen, geht aus einem eingezogenen Blatte des Manuskriptes hervor, welches das Datum des 9. 4. 1891 trägt und worauf es heisst:

„Ich hatte ursprünglich die Absicht den schwierigsten Theil der Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Abhängigkeit der von einem beleuchteten Lufttheilchen ausgestrahlten Lichtmenge von dem Winkel des einfallenden Strahles auf die soeben erwähnten Messungen der Helligkeit des Himmels an verschiedenen Stellen zu stützen; allein die Ergebnisse wären rein erfahrungsmässig und nicht erklärend gewesen. Ich habe es daher nachträglich vorgezogen, diese Verhältnisse aus bekannten Elementen herzuleiten und die sehr zusammengesetzten Ergebnisse mit den Messungen zu vergleichen.“

[1]) Leipzig, Verlag von B. G. Teubner 1887.

Die Art jenes ersten Entwicklungsstadiums des Werkes geht genauer aus der Vorrede des Verfassers zu dem zweiten Band seines Lehrbuchs der darstellenden Geometrie hervor, worin es heisst:

„Ich hatte im ersten Bande die Absicht ausgesprochen, meine Untersuchungen über die Helligkeit der Körper im zweiten Bande zu veröffentlichen. Ich beschäftigte mich auch seitdem ein halbes Jahr lang mit der Weiterführung dieser Arbeit, bemerkte aber dann, dass sie zu ausgedehnt für die Aufnahme in den zweiten Band werden und dessen Veröffentlichung zu sehr verzögern würde, und entschloss mich daher, sie für eine besondere Veröffentlichung vorzubehalten. Ueber ihren Inhalt bemerke ich, dass im ersten Theile der Arbeit auf Grundlage von Versuchen an einer gegossenen Gypsplatte die Helligkeit angegeben wird, welche eine solche Oberfläche bei jeder Richtung des einfallenden und des ausfallenden Lichtstrahles besitzt, und dass auf dieser Grundlage die Linien gleicher Helligkeit oder die Hellegleichen einer Kugel konstruirt wurden, welche durch unmittelbare Sonnenbeleuchtung und diejenigen, welche durch den Reflex eines gleichbeschaffenen Bodens von Gyps entstehen. Im zweiten Theile werden ebenfalls auf Grund von Beobachtungen die Konstanten einer Formel bestimmt, welche die Helligkeit des klaren Himmels an jeder seiner Stellen und für jede Stellung der Sonne angiebt. Auf dieser Grundlage habe ich sodann die Hellegleichen des klaren Himmels konstruirt. Dieselben ziehen sich um ihre hellste und dunkelste Stelle herum, von denen die erste, ausser bei der untergehenden Sonne, unmittelbar neben der Sonne, die zweite, leicht hundertmal dunklere, dieser gegenüber, aber nicht in gleicher Höhe steht. Mittelst dieser Hellegleichen habe ich auf eine nicht schwierige, aber der Natur der Sache nach viel Zeit kostende Weise die Stärke der Beleuchtung bestimmt, welche ein Flächenelement durch den klaren Himmel erfährt, und diese Bestimmungen müssen für verschiedene Stellungen des Elementes fortgesetzt und die Ergebnisse in eine zu leichtem Gebrauch geeignete Tabelle gebracht werden. Der dritte Theil bezieht sich auf die Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen; er führte mich zum Messen der Empfindungsstärke durch eine Empfindungseinheit. Die letztere ist dasselbe, wie die von Herrn Fechner in seinen Elementen der Psychophysik aufgestellte Reizschwelle, so dass ich in der Streitfrage über

die Messbarkeit oder Nichtmessbarkeit der Empfindungsstärke zur Bejahung geführt werde und in einer solchen Messung die Lösung der vorliegenden praktischen Aufgabe finde. Bei dieser Ausdehnung der Untersuchungen, die ich zum Theil noch durch neue zu ersetzen beabsichtige, wird man es wohl gerechtfertigt finden, dass ich von meiner ursprünglichen Absicht abgieng, dieselben dem vorliegenden Buche einzuverleiben."

Aus diesen Zeilen geht hervor, dass ursprünglich die Beleuchtung durch den Himmel die Hauptrolle spielte und die Bestimmung der Helligkeitsvertheilung am Himmel nur Mittel zum Zweck war. Im Laufe der weiteren Bearbeitung kehrte sich dies Verhältniss einigermaassen um, so dass die Theorie der Himmelshelligkeit von dem Umfang des ganzen Werkes etwa drei Viertel und die Anwendung auf die Beleuchtungslehre nur das letzte Viertel beansprucht.

Was der Verfasser selbst als Vorwort zu seinem Werke gesagt haben würde, lässt sich ungefähr ersehen aus dem Briefe an den Präsidenten der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle, Herrn Geheimrath Prof. Dr. Freiherrn v. Fritsch. In diesem Briefe, datirt vom 15. Mai 1896, bittet der Verfasser um Aufnahme seines Werkes und äussert sich über seinen Inhalt und seine Zwecke wie folgt:

„Zur Gewinnung einer erfahrungsmässigen Grundlage für die Lösung meiner Aufgabe habe ich Helligkeitsmessungen am klaren Himmel vorgenommen, welche die Feststellung einiger Konstanten möglich machten. Die Herleitung der Formeln, welche die Helligkeit des Himmels an jeder seiner Stellen für jede Stellung der Sonne liefern, geschah mittelst mathematischer Herleitungen nach der Theorie des Lichtes. Die Hauptaufgabe war dabei, das Gesetz der Lichtzerstreuung durch die atmosphärische Luft vermittelst der darin schwebenden flüssigen und festen Körperchen zu ermitteln. Dabei wurden die 5 kräftigsten Lichtbüschel verfolgt, welche die kleinen Wassertröpfchen hervorbringen, sowie die 19 kräftigsten Lichtbüschel, welche die als regelmässig zerstreut gelagert angenommenen Eisnadeln der kalten Luftschichten erzeugen. Es wurde ferner die Beugung durch die schwebenden Theilchen berücksichtigt und endlich die Zerstreuung durch die schwebenden Theilchen, deren Maasse klein gegen die Wellenlänge des Lichtes sind, und welche auch die Farben der atmosphärischen

Luft verursachen. Dieses Zerstreuungsgesetz konnte bei dem Zusammenwirken so verschiedener, für sich schon verwickelter Vorgänge nur durch eine Tabelle und eine verzeichnete Kurve dargestellt werden. Sodann musste die wechselnde Dicke der von dem Lichte durchlaufenen Luftschicht als zweiter wesentlicher Bestimmungsgrund für die Helligkeit in Rechnung gezogen werden."

„Es wurden dann die Formeln hergeleitet für die Helligkeit der Luft, welche unmittelbar durch die Sonne, durch die unendlich vielfache Zerstreuung in der Luft und durch Rückstrahlung des Bodens hervorgebracht wird, und mittelst ihrer wurden die Helligkeiten für den Fall berechnet, dass die Sonnenstrahlen parallel der Diagonale eines aufrechtstehenden Würfels laufen, also eine Zenithdistanz der Sonne von 54° 44' bedingen, weil diese Annahme in der Beleuchtungslehre gebräuchlich ist. Auf Grundlage dieser Zahlen konnten dann die Linien gleicher Helligkeit (Hellegleichen) am klaren Himmel konstruirt werden. Die Ergebnisse stimmten mit den Messungen gut überein. Die hellste Stelle des Himmels ergab sich unmittelbar neben der Sonne, die dunkelste in demselben Vertikalkreise in einem Abstande von der Sonne von etwa 90°; sie war gegen 200 mal so gering erhellt als jene. — Die Hellegleichen für die Stellung der Sonne im Horizont und im Zenith bin ich eben beschäftigt noch zu ermitteln, während die Arbeit sonst zu Ende geführt ist."

„Auf Grundlage der Hellegleichen des Himmels wurde dann die Bestrahlungs- oder Lichtstärke bestimmt, die irgend eine Ebene durch die Atmosphäre allein erhält. Trägt man diese Stärken von einem Punkte aus auf den zu den Ebenen gezogenen Normalen auf, so bilden die zweiten Endpunkte die Fläche der Beleuchtungsstärke, die ich durch Vertikalschnitte dargestellt habe. — Sodann wurde das Endziel der Arbeit verfolgt, die Beleuchtung einer Fläche durch gleichzeitige Einwirkung der Sonne, der Atmosphäre und der Rückstrahlung benachbarter Körper. Es wurde dabei als beleuchteter Körper die Kugel betrachtet, sowohl auf dem Boden aufliegend, als hoch über ihm schwebend. Im Falle der aufliegenden Kugel musste zuerst die Beleuchtung des Bodens durch Bestimmung seiner Lichtgleichen, d. h. ihrer Linien gleicher Beleuchtungsstärke ermittelt werden, wobei die Wirkung der Kugel durch das Abhalten von atmosphärischem

Lichte und durch das Zufügen ihrer eigenen Rückstrahlung (auf Grundlage ihrer angenäherten Lichtgleichen) bestimmt wurde. Dann wurden die verbesserten Lichtgleichen der Kugel unter Berücksichtigung der Bodenrückstrahlung ermittelt, und zwar einmal unter Annahme eines hellen Bodens mit der Weisse (albedo) $A = 0{,}7$, und einmal eines dunkeln mit $A = 0{,}1$, während die Weisse der Kugel stets $= 0{,}7$ gesetzt war. Dasselbe wurde für den einfacheren Fall der hoch über dem Boden schwebenden Kugel ausgeführt. Aus der Beleuchtungsstärke wurde für vollkommen matte Oberflächen (wie Magnesia) die Helligkeit durch Multiplikation mit der Weisse bestimmt und daraus ergeben sich die Hellegleichen. Für die zum Theil spiegelnden Flächen, wie es die meisten sind, musste das für sie geltende Zerstreuungsgesetz bekannt sein. Ich habe dies für Gyps durchgeführt, für welchen ich die nöthigen Messungen machte. (Ann. d. Ph. u. Ch. 1892.)“

„Dann wurde das Nachahmen der Helligkeiten durch mehrfache, gleichförmige Tuschlagen behandelt, wobei das Ergebniss war, dass mit der Zunahme der Anzahl der Tuschlagen nicht die Abnahme der Helligkeit, sondern die Abnahme der Empfindungsstärke in Verhältniss steht. Es wurden gleichförmige Abstufungen einerseits nach der Helligkeit, andererseits nach der Empfindungsstärke durchgeführt.“

„Dies ist der wesentliche Inhalt des Buches, und es steht daher wohl im Zusammenhang mit den Bestrebungen Anderer. Zur Bestimmung der Helligkeit des Himmels haben schon im vorigen Jahrhundert Bouguer und insbesondere Lambert den Grund gelegt. Da Lambert aber das Zerstreuungsgesetz des Lichtes durch die Luft unbekannt war, nahm er eine nach allen Richtungen gleichförmige Zerstreuung an. Dabei blieb für die wechselnde Helligkeit am Himmel nur noch die Dicke der durchlaufenen Luftschicht maassgebend, und er kam daher zu dem Ergebniss, dass die Helligkeit entlang eines Horizontalkreises der Himmelskugel unveränderlich sei, was nach dem Obigen und nach dem blossen Augenschein durchaus unrichtig ist. Clausius führte die Erscheinung auf die Wirkung schwebender Wasserbläschen zurück und kam dabei zu Ergebnissen, die ebenfalls der Beobachtung durchaus widersprechen.“

„Von den darstellenden Geometern wurde die Helligkeit der Kugel vielfach zu bestimmen gesucht. Dabei wurde aber auf die Wirkung der

Luft keine Rücksicht genommen, wozu auch die Grundlage fehlte. Ueber das Gesetz der Lichtzerstreuung durch eine Oberfläche wurden verschiedene Annahmen gemacht. Einmal die der vollkommen matten Oberfläche, wodurch man der Wahrheit noch am nächsten kam. Die Helligkeit war dann proportional mit der Beleuchtungsstärke, d. i. mit dem Cosinus des Einfallswinkels. Dann aber wurden noch andere Annahmen gemacht, besonders die, dass die Helligkeit im Verhältniss steht nicht nur mit dem Cosinus des Einfalls-, sondern auch mit dem des Ausfallswinkels. Diesen Hypothesen fehlt aber die Grundlage der Beobachtung, insbesondere müsste nach der letzteren der Umriss dunkel erscheinen, was aber der Wirklichkeit widerspricht."

„So muss ich wohl glauben, dass das Buch einiges Interesse finden wird bei den Physikern, den Astronomen und Meteorologen, sowie bei den darstellenden Geometern und den Künstlern."

Auf die Bitte des Präsidenten der Akademie, das Manuskript einzusenden zur Vorlage vor die Fachvorstände für Physik sandte der Verfasser dasselbe am 2. Juni 1896 ein und bemerkt dazu noch in seinem Begleitschreiben:

„Es bleibt noch zu thun übrig: Die Einschaltung der Fälle[1]) der im Horizont und im Zenith stehenden Sonne, eine letzte Durchsicht mit Eintheilung und Anordnung der Ueberschriften und die Reinzeichnung der Figuren. Damit hiermit bald begonnen werden könne, wäre mir eine möglichst baldige Rückgabe des Manuskriptes erwünscht."

Nach Absendung des Manuskriptes gieng der Verfasser an die Berechnung des Falles, dass die Sonne im Horizont steht. Dabei stiess er aber auf Punkte, zu deren Erledigung er Tabellen brauchte, die dem Manuskripte beilagen. Am 25. Juni 1896 wandte er sich daher wieder an den Präsidenten mit der Bitte um Beschleunigung der Rücksendung des Manuskriptes aus dem bezeichneten Grunde. Er fährt fort:

„Neuerdings sind aber noch weitere dringende Gründe dafür hervorgetreten. Seit Herbst vor. J. leide ich an einem Magenübel, das meine

[1]) In dem hinterlassenen Manuskript ist nur die Helligkeitsvertheilung des Himmels bestimmt für den oben erwähnten Fall einer Zenithdistanz von $54^0\ 44'$.

sonst gute Gesundheit so weit erschüttert hat, dass ich nach Pfingsten einen Theil meiner Lehrthätigkeit und jetzt meine ganze an einen Stellvertreter abgeben musste. Häusliche Arbeiten kann ich aber noch in einigem Umfang ausführen, und ich möchte diese Zeit denn auch nicht unbenützt lassen. Ich hoffe natürlich auf Wiederherstellung meiner Gesundheit, aber es kann auch anders kommen. Und da ist es mein Wunsch, die Arbeit, die ich vor mehr als 10 Jahren begonnen habe, noch veröffentlicht zu sehen. Zwei meiner Söhne, ein Prof. der Mathematik an der Techn. Hochschule in Darmstadt und ein Prof. der Physik an der Universität in Giessen, könnten die Herausgabe vielleicht durchführen. Es wäre für sie aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, besonders weil die Reinfiguren noch nicht hergestellt und ihre Skizzen in den Hilfsheften zerstreut sind. Es muss also mein sehnlichster Wunsch sein, die Arbeit möglichst bald selbst zu beendigen, wenn ihre Früchte nicht gefährdet sein sollen."

Der Verfasser hat noch bis kurz vor seinem Tode an der Berechnung des Falles der im Horizont stehenden Sonne gearbeitet. Das letzte bearbeitete Blatt seiner Hülfshefte trägt das Datum des 8. Juli 1896.

Er hatte aber noch Gelegenheit ausführlich seine Wünsche betreffs der Herausgabe seines Werkes zu äussern.

Hermann Wiener übernahm die Reinzeichnung der Figuren zur photographischen Vervielfältigung nach dem zinkographischen Verfahren. Dabei sind die in dem citirten Briefe vom 25. 6. 96 bezeichneten Schwierigkeiten betreffs der Figuren glücklich überwunden worden, da die zerstreuten Skizzen dem Texte eingeordnet und nach diesen, den Tabellen und den Angaben des Textes die Reinzeichnungen hergestellt werden konnten.

Otto Wiener besorgte hauptsächlich die Gliederung des Werkes und die Ueberschriften für die einzelnen Abschnitte, wobei in erster Linie die vorhandenen Ueberschriften und ein vom Verfasser selbst schon ausgearbeitetes Inhaltsverzeichniss benutzt wurde. Nur wurde die Zahl der Abschnitte im Interesse eines besseren Verständnisses und der Uebersicht nicht unbeträchtlich vermehrt.

Kleine Aenderungen im Texte, von denen die Herausgeber glaubten, dass der Verfasser sie selbst bei der Korrektur würde vorgenommen haben,

wurden unbedenklich angebracht, umsomehr, als sie wussten, wie unermüdlich der Verfasser selbst stets bei der Ausfeilung seiner Arbeiten war.

An einigen Stellen, deren Verständniss den Herausgebern selbst anfangs einige Mühe gemacht hat, wurden erläuternde Sätze eingeschaltet. Nur in besondern Fällen wurden Zusätze der Herausgeber als solche gekennzeichnet.

Wir können nur hoffen, dass wir die Herausgabe in dem Sinne des Verfassers besorgt haben, bis jetzt allerdings leider nur die erste Hälfte, da die Arbeit infolge der Inanspruchnahme durch den eigenen Beruf nur langsam voran ging.

In dieser ersten Hälfte wird die Ermittelung des Gesetzes der Lichtzerstreuung durch ein Dunsttheilchen zu Ende geführt.

Ueber die zu dem Gegenstande seit dem Tode des Verfassers entstandene Litteratur, sowie einige demselben entgangene Arbeiten soll am Schlusse des ganzen Werkes noch berichtet werden.

An dieser Stelle sei nur noch hingewiesen auf Beobachtungen der Himmelshelligkeit von Leonhard Weber, mitgetheilt im Handbuch der Hygiene, herausgegeben von Dr. med. Th. Weyl (Verl. v. G. Fischer, Jena 1896) 4. Bd. im Abschnitt: „Die Beleuchtung“ S. 75. Sie beziehen sich auf eine von L. Weber am 8. August 1893 in Kiel angestellte Beobachtungsreihe und sind auch in Form einer die Hellegleichen des Himmels darstellenden Figur niedergelegt. Die beobachteten Helligkeitsunterschiede sind bedeutend kleiner als die von Chr. Wiener beobachteten, ein Umstand, der wahrscheinlich auf die Verschiedenheit des Feuchtigkeitsgehaltes der Atmosphäre in beiden Fällen zurückzuführen ist.

Die neueren Arbeiten über den Regenbogen, wie von Mascart (Ann. de chim. et de phys. 6 Ser. Bd. 26. 1892. S. 501) und Pernter (Ber. d. kais. Acad. d. Wiss. zu Wien. Bd. 106 IIa. 1897. S. 135) versuchen alle nicht in so grundsätzlicher Weise über die Airy'sche Theorie hinauszugehen, wie das im vorliegenden Werke geschehen ist.

Wenn die hier vorgetragene Theorie der Himmelshelligkeit begreiflicher Weise auch zum Theil noch etwas willkürliche Annahmen enthält,

wie die über die Vertheilung der Zahl der Tröpfchen von verschiedenem Durchmesser, und für den praktischen Gebrauch noch verwickelt ist, so wird sie doch für alle weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete einen werthvollen Ausgangspunkt bilden.

Die Herausgeber.

Inhalt.

Seite

Vorwort der Herausgeber III
Inhalt XIII
Uebersicht der Figuren, Tabellen und Gleichungen XVIII

Erster Theil. Die Helligkeit des klaren Himmels.

Erste Abtheilung.

Geschichtliches. Messungen. Weg der Forschung.

1. Der Himmel nach dem Augenschein 3
2. Bisherige Forschungen. Bouguer 3
3. Lambert 4
4. Clausius 5
5. Weg der Forschung 6
6. Die Apparate zum Messen der Himmelshelligkeit 7
7. Die Ergebnisse der Messung 9
8. Die Grundlagen zur Ableitung des Gesetzes der Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre 13
   1. Absorption der Strahlen durch atmosphärische Luft.
   2. Der Weg eines Lichtstrahls, an sich nicht leuchtend, wird durch Lichtzerstreuung an schwebenden Theilchen sichtbar 14
   3. Zurückwerfung und Brechung durch Wassertröpfchen.
   4. Zurückwerfung und Brechung durch Eiskryställchen.
   5. Beugung durch Wasser-, Eis- oder Staubtheilchen 15
   6. Zerstreuung durch Theilchen, die im Verhältniss zur Lichtwellenlänge klein sind.
9. Einzuschlagender Weg für die Feststellung des Zerstreuungsgesetzes 18

Zweite Abtheilung.

Das Gesetz der durch ein Dunsttheilchen bewirkten Zerstreuung des Sonnenlichtes.

Erster Abschnitt.

Wirkung der Wassertropfen durch Zurückwerfung und Brechung.

I. Durch eine Wasserkugel bedingter Gang und Schwächung der Lichtstrahlen.

10. Grösse und Form der Wassertheilchen in der Atmosphäre 19
11. Zurückwerfung des Sonnenlichtes an der Oberfläche der Wassertropfen 19
12. Verhältnissmässige Stärke der polarisirten Theile des zurückgeworfenen Lichtes . 21

Seite
13. Fortsetzung zu 11. 22
14. Helligkeit, in der 1 cbm. Luft erscheint, infolge Zurückwerfung des Lichtes an den Wassertropfen 22
15. Brechung des Sonnenlichtes durch die Wassertropfen. Ablenkung der Strahlen . 24
16. Lichtschwächung der abgelenkten Strahlen 25
17. Ergebnisse der Berechnung. Allgemeines 27
18. Das durch Zurückwerfung entstehende Lichtbüschel l_1 29
19. Das durch zweimalige Brechung und ohne Zurückwerfung entstehende Lichtbüschel l_2 31
20. Das durch zweimalige Brechung und einmalige Zurückwerfung entstehende Lichtbüschel l_3 und die Ermittelung der Lage der Regenbogen 31
21. Die durch zweimalige Brechung und zwei- oder mehrmalige Zurückwerfung entstehenden Lichtbüschel 33

II. Theorie des Regenbogens und der überzähligen Bogen.

22. Die früheren Theorien und das hier eingeschlagene Verfahren 33
23. Die Brennlinie und die Linie der Lichtwelle 35
24. Festlegung der Wellenlinie durch Koordinaten 37

Cylindrische Wasserstrahlen: Der hellste Streifen und die überzähligen Streifen.

25. Die verhältnissmässige Lichtstärke an den verschiedenen Stellen der Wellenlinie. Allgemeine Formel 40
26. Das Stück der Wellenlinie zwischen $\varepsilon = 0^0$ und $\varepsilon = 70^0$ 42
27. Das Stück der Wellenlinie bei $72^0\ 30'$, auf dem l nach der Formel einen ∞ grossen und einen unbestimmten Werth annimmt 43
28. Einführung endlich kleiner Bogen der Wellenlinie 45
29. Berücksichtigung der Ausdehnung der Sonnenscheibe 46
30. Die Lichtstärke für das Stück der Wellenlinie zwischen $59^0\ 23'$ und 90^0 unter Berücksichtigung der Ausdehnung der Sonnenscheibe 48
31. Die Lichtübertragung nach einem entfernten Punkt P 51
32. Allgemeines Verfahren zur Bestimmung der nach P übertragenen Lichtstärke . . 52
33. Die Geschwindigkeitskurve. Geometrisches Verfahren zur Ermittelung der Lichtstärke in P 55
34. Annahme über die Dicke des Wasserstrahls und der Wassertropfen 58
35. Theilung der wirksamen Wellenoberfläche in Schichten von gleichen Abständen . 59
36. Winkel der Richtung vom Wasserstrahl nach dem beleuchteten Punkte P und der Richtung nach dem geometrischen Streifen 59
37. Ausführung der mechanischen Quadraturen zur Bestimmung von l_1 60
38. Die Helligkeitskurve in der Nähe des geometrischen Streifens 64
39. Abhängigkeit der Winkel zwischen den Streifen und dem geometrischen Streifen von der Dicke des Wasserstrahls 67
40. Vergleichung der Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungen 70

Der Regenbogen und die überzähligen Bogen.

41. Die verhältnissmässige Lichtstärke l auf der Wellenoberfläche 74
42. Die Lichtübertragung auf einen entfernten Punkt P. Elemente der wirksamen Wellenoberfläche 75

Seite

43. Das Doppelintegral zur Bestimmung der Helligkeit l_1 in P 77
44. Ausführung der ersten Integration 78
45. Ausführung der zweiten Integration 83
46. Die Helligkeitskurve in der Nähe des geometrischen Regenbogens und die überzähligen Bogen 89
47. Abhängigkeit der Abstände zwischen den überzähligen Bogen und den geometrischen Bogen von der Tropfendicke und die Bedingungen für das Zustandekommen der überzähligen Bogen und des Hauptregenbogens 92

III. Berücksichtigung der Verschiedenheit der Tropfengrösse und das Gesetz der Zerstreuung des Lichtes durch Rückstrahlung und Brechung an Wassertropfen.

48. Verwaschung der farbigen Bogen durch kleine Tröpfchen von verschiedener Grösse 94
49. Die Helligkeit im Gegenpunkte der Sonne 96
50. Vereinigung der zu verschiedenen Tropfendicken gehörigen Helligkeitskurven für das Lichtbüschel l_3 101
51. Zurückführung der Helligkeiten auf die früher angenommene Einheit 102
52. Antheil der beiden Arten des polarisirten Lichtes im Büschel l_3 104
53. Die Lichtbüschel l_4 und l_5 105
54. Vereinigung der 5 Lichtbüschel 105
55. Einführung einer allgemeinen Einheit für die durch Wassertropfen erzeugte Helligkeit 109
56. Ueberblick über das durch Zurückwerfung und Brechung des Lichtes an Wassertropfen bedingte Gesetz der Lichtzerstreuung 111

Zweiter Abschnitt.

Wirkung der Wassertropfen und Eiskrystalle durch Beugung.

57. Beugung durch einen Spalt 113
58. Beugung durch einen undurchsichtigen Streifen 118
59. Beugung durch eine rechteckige Oeffnung 119
60. Beugung durch eine kreisförmige Oeffnung 120
61. Die durch Beugung entstehende Helligkeit 121
62. Einführung der gleichen Einheit wie bei der durch Zurückwerfung und Brechung erzeugten Helligkeit 123

Dritter Abschnitt.

Wirkung der Eiskrystalle durch Zurückwerfung und Brechung.

I. Allgemeines. Das Verfahren zur Berechnung der von den Eiskrystallen erzeugten Helligkeit.

63. Form der Eiskrystalle 124
64. Brechungskoefficient des Eises 125
65. Sätze über die Brechungen durch Eisprismen 126
66. Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Richtungen der Axen der Eiskrystalle 128
67. Die durch Eisprismen mit parallelen Axen erzeugten hellen Punkte liegen auf einem durch die Sonne gehenden Kreise, den sie ungleichförmig erhellen . 128
68. Schwächung des Lichtes beim Begegnen mit einer Krystallfläche 129

Seite

69. Die reducirten Brechungskoefficienten für den Normalschnitt eines Eisprismas und die zugehörigen Winkel der totalen Reflexion 131
70. Bezeichnungen 131
71. Regelmässige Vertheilung der Krystalle in kleine Gruppen von gleicher Stellung. 133
72. Anordnung der Sonnenbildchen 134
73. Die von den Sonnenbildchen hervorgebrachte Helligkeit 137
74. Wege der Sonnenstrahlen in den Eisprismen 138
75. Die bei einem gegebenen Einfallswinkel möglichen Brechungs- und Austrittswinkel 141
76. Bestimmung des verhältnissmässigen Raumantheils q der Theillichtbüschel . . . 142
77. Bestimmung des Schwächungskoefficienten η 142
78. Bestimmung des Bereiches b der Lichtpunkte im Lichtpunktnetze 143
79. Bestimmung der Helligkeit H 145

II. Die von den einzelnen Lichtbüscheln erzeugten Helligkeiten.

80. Das Lichtbüschel 1 der nur zurückgeworfenen Strahlen 146
81. Besondere Behandlung der Stelle, für welche die Formel eine unendlich grosse Helligkeit ergiebt 147
82. Die Helligkeit des Büschels 1 im Gegenpunkt der Sonne 149
83. Allgemeine Berechnung der Helligkeiten des Büschels 1 150
84. Das Lichtbüschel 2 der unabgelenkten Strahlen 153
85. Verminderung des Sonnenlichtes durch die Eiskrystalle. 156
86. Das Lichtbüschel 3, welches auch den hellen Ring bei $\varphi_3 = 22^0$ erzeugt . . . 157
87. Grenzen des Lichtbüschels 158
88. Das Integral zur Bestimmung der Helligkeiten H_3 161
89. Besondere Behandlung der Stellen, an denen der Integrand ∞ wird 163
90. Die Helligkeitskurve für das Lichtbüschel 3 168
91. Einfluss der Grösse des Sonnendurchmessers 169
92. Der helle Ring und seine Verwaschung, wenn die Eiskrystalle klein sind . . . 169
93. Die verhältnissmässige Helligkeitskurve der Beugung durch ein Eiskrystall . . . 170
94. Die Ausgleichung der Wellenzüge der Beugungs-Helligkeitskurve, wenn Eiskrystalle verschiedenen Durchmessers zugleich wirken 172
95. Zurückführung der Helligkeiten auf die früher benutzten Einheiten 174
96. Die normale Helligkeitskurve für das Lichtbüschel 3, wenn die Eiskrystalle kleine von einander verschiedene Durchmesser haben 177
97. Das Lichtbüschel 4 178
98. Das Lichtbüschel 5 181
99. Das Lichtbüschel 6 184
100. Die Gestalt der Kurven (φ_6, l_6) in der Nähe von $\varphi_6 = 0$ 185
101. Die Kurven (φ_6, l_6) für $\nu = 20^0\ 13'$ und $\nu = 8^0\ 6'$ 189
102. Die Kurven (φ_6, l_6) für $\nu = 10^0$ 191
103. Die Helligkeitskurve für das Lichtbüschel 6 193
104. Das Lichtbüschel 7 194
105. Das Lichtbüschel 8 197
106. Berücksichtigung der Beugung bei diesem Büschel 198
107. Das Lichtbüschel 9 201

Seite
108. Das Lichtbüschel 10 201
109. Das Lichtbüschel 11 203
110. Das Lichtbüschel 12 204
111. Die helle Stelle bei $\varphi_{12} = 120^0$ 206
112. Das Lichtbüschel 13 208
113. Das Lichtbüschel 14 209
114. Das Lichtbüschel 15 210
115. Das Lichtbüschel 16 212
116. Das Lichtbüschel 17 212
117. Das Lichtbüschel 18 214
118. Das Lichtbüschel 19 215
119. Die Vereinigung der durch die Eiskryställchen hervorgebrachten Lichtbüschel . 216
120. Die Lichtzerstreuung durch Beugung an Eiskryställchen 221

Vierter Abschnitt.

Wirkung der kleinsten schwebenden Theilchen, die im Vergleich zur Lichtwellenlänge klein sind.

121. Experimentelle Grundlagen 222
122. Theorie der Erscheinung 222
123. Prüfung der Theorie durch die Erfahrung 228
124. Helligkeitskurve für das durch kleinste Theilchen zerstreute Licht 229

Fünfter Abschnitt.

Vereinigung der verschiedenen Ursachen zur Feststellung des Gesetzes der Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre.

125. Die drei Arten der Lichtzerstreuung mit zwei Unveränderlichen 230
126. Bestimmung der zwei Unveränderlichen für die Berechnung der Gesammthelligkeiten 231
127. Endgiltige Einheit für die Gesammtmenge des zerstreuten Lichtes 234
128. Die Helligkeitskurven des insgesammt zerstreuten Lichtes für die wässerige und für die eisige Schicht 235

Uebersicht der Figuren.

Figur	Seite	Figur	Seite
1	12	37	182
2	20, 25	38	184
3	30	39	186
4	35	40	187
5	36	41	„
6	41	42	194
7	48	43	196
8	49	44	197
9	56	45	198
10	65	46	201
11	68	47	„
12	76	48	„
13	79	49	202
14	90	50	203
15	95	51	„
16	111	52	204
17	113	53	205
18	116	54	208
19	126	55	„
20	132	56	209
21	136	57	210
22	138	58	211
23	140	59	„
24	141	60	212
25	147	61	213
26	148	62	„
27	153	63	„
28	161	64	214
29	162	65	215
30	„	66	„
31	168	67	„
32	170	68	221
33	172	69	230
34	179	70	238
35	„	71	239
36	181		

Uebersicht der Tabellen.

Tabelle	Seite	Tabelle	Seite
1	10	31	151
2	28-29	32	152
3	36	33	154
4	41	34	155
5	44	35	158
6	45	36	160
7	50	37	168
8	52	38	169
9	62	39	180
10	64	40	183
11	66	41	185
12	70	42	194
13	71	43	195
14	73	44	197
15	81	45	199
16	83	46	201
17	85	47	202
18	86	48	203
19	89	49	205
20	91	50	„
21	97	51	209
22	100	52	„
23	103	53	211
24	„	54	212
25	106-109	55	213
26	123	56	214
27	130	57	215
28	131	58	216-220
29	146	59	234
30	150	60	236-237

Uebersicht der Gleichungen.

Gleichung	Seite	Gleichung	Seite
1	20	35	78
2	„	36	80
3	21	37	„
4	„	38	„
5	„	39	84
6	„	40	88
7′	23	41	„
7″	„	42	127
8	24	43	„
9	25	44	131
10	„	45	134
11	„	46	137
12′	26	47	„
12″	27	48	„
13	32	49	141
14	35	50′	142
15	42	50″	„
16	„	50‴	„
17	46	51	143
18	52	52	„
19	55	53′	144
20	„	53″	„
21	60	53‴	„
22	„	54	„
23	64	55	„
24	69	56	„
25	75	56ª	„
26	76	57′	145
27	77	57‴	„
28	„	57″	„
29	„	58	146
30	„	59	151
31	„	60	158
32	78	61	163
33	„	61ª	227
34	„		

Erster Theil.

Die Helligkeit des klaren Himmels.

Erste Abtheilung.

Geschichtliches. Messungen. Weg der Forschung.

1. Der Himmel nach dem Augenschein. Die Helligkeit des klaren Himmels ist keine gleichförmige, wie ein Blick auf ihn uns zeigt. Die Erscheinung, die zuerst auffällt, die den Malern gut bekannt ist und die man auf ihren Bildern dargestellt findet, ist die, dass die Helligkeit in der Nähe des Horizonts gegen diesen hin, also mit abnehmendem Höhenwinkel, grösser wird. Die Helligkeit an den verschiedenen Stellen des Himmels hängt wesentlich von deren Stellung gegen die Sonne oder den Mond ab, deren Strahlen diese Helligkeit hervorbringen. Die Helligkeit ist fast immer in der Nähe dieser Gestirne weitaus am grössten und nimmt mit der Entfernung von ihnen rasch ab. Dies sind die am auffallendsten hervortretenden Erscheinungen.

2. Bisherige Forschungen. Bouguer. Die ersten, welche ausgedehntere Arbeiten über diesen Gegenstand lieferten, Arbeiten, die immer noch als die bedeutendsten bestehenden angesehen werden müssen, sind Bouguer und Lambert. Bouguer[1]) hat die Helligkeiten des Himmels durch Messungen zu ermitteln gesucht. Aber es sind nur einige angenäherte Zahlen angegeben, und andere genauere Zahlen sind in dem Werke, das nach seinem Tode herausgegeben wurde, ausgelassen, indem er sie selbst nicht einsetzte, sondern erst durch neue Messungen zu verbessern beabsichtigte. Doch sind auch jene angenäherten Angaben von Werth. Er sagt, dass die Atmosphäre nahe bei dem Horizont heller als in grösserer

[1]) Bouguer, Traité d'Optique, 1760, S. 70 bis 75. — Voraus ging sein Essai d'Optique, 1729.

Höhe erscheint, und ferner, dass sie bis zu 3 oder 4 Grad Abstand von der Sonne einen grossen Glanz hat, von da an schwächer aber fast gleichförmig erscheint, während ihm aber doch eine Messung ergeben habe, dass sie in einem Abstande von 8 oder 9° von der Sonne 4mal so hell, als in einem Abstande von 31 oder 32° war, bei einer Sonnenhöhe von etwa 25°. Ferner fand er, dass bei niederstehender Sonne, bei einer Höhe von 15 bis 20°, der Himmel in derselben Höhe über dem Horizont mit der Entfernung von der Sonne dunkler wird bis zu einem Sonnen-Abstand von 110 bis 120°, und von da an wieder heller, so dass an der Stelle, welche der Sonne gegenübersteht, die Helligkeit ein zweites Maximum erreicht. Sodann theilt er mit, dass, wenn man den sichtbaren Himmel durch zwei lothrechte und auf einander senkrechte Ebenen, von denen die eine durch die Sonne gelegt ist, in 4 Quadranten theilt, ein der Sonne benachbarter Quadrant heller ist, als ein abliegender, und dass eine lothrechte auf jener durch die Sonne gehenden senkrechte Ebene von dem benachbarten Quadranten stärker beleuchtet wird, als von dem abliegenden. Ich bemerke, dass ich diese Angaben durch meine Messungen und Berechnungen bestätigt gefunden habe.

Sodann hat Bouguer Messungen der Helligkeit des Mondes in verschiedenen Höhen über dem Horizont vorgenommen, daraus Schlüsse auf die Lichtschwächung durch die Atmosphäre gezogen, und insbesondere gefunden, dass ein im Zenith stehendes Gestirn, Sonne oder Mond oder Stern, infolge des Durchgangs seiner Lichtstrahlen durch die Atmosphäre seine Helligkeit auf 0,81 seiner Anfangshelligkeit vermindert, eine Zahl, die neuerdings bestätigt wurde. Endlich hat Bouguer die Dicke der unter den verschiedenen Höhenwinkeln gemessenen Luftschicht unter Beachtung der Krümmung der Erdoberfläche genau bestimmt.

3. Lambert. Lambert[1]) im Gegentheil sucht die Helligkeit des Himmels theoretisch und rechnend zu ermitteln und stützt sich dabei wesentlich auf 3 Annahmen.

1. Auf Grund von eigenen Messungen nimmt er an, dass die Hellig-

[1]) Lambert, Photometria, 1760, S. 407 u. f., S. 421 (Neuerdings in Ostwald's Klassikern — Nr. 31, 32, 33 — in deutscher Uebersetzung von E. Anding herausgegeben).

keit der im Zenith stehenden Sonne durch den Durchgang durch die Atmosphäre auf 0,59 oder nahezu $^3/_5$ ihrer Anfangsstärke geschwächt werde.

2. Er nimmt ferner an, dass die von einer Luftmenge zerstreuten Lichtstrahlen nach allen Richtungen gleichmässig zerstreut werden.

3. Er ersetzt die nahezu kugelförmige Gestalt der Oberfläche der Erde und der Luft, soweit sie in dem Sehbereiche eines Punktes der Erdoberfläche liegt, durch ebene Flächen. Dabei kennt er das Ergebniss der Messungen Bouguers, welcher jene Lichtschwächung von 1 zu 0,81 fand, und ist sich daher der Ungewissheit seiner Zahl bewusst. Er weiss sodann dass die Lichtzerstreuung durch die Luft bei geringer Ablenkung des Lichtes stärker ist, als bei grosser, und führt an, dass deswegen, entgegen seinen Rechnungsergebnissen, die Helligkeit der Atmosphäre in der Nähe der Sonne so viel stärker ist, als an entfernteren Stellen (bei gleichen Höhenrichtungen). Endlich lässt er wegen der Unrichtigkeit der Ebenheit der Erdoberfläche seine Ergebnisse nur für Stellen des Himmels gelten, die in einer grösseren Höhe als von 10 bis 15° erscheinen. Da aber das wirkliche Gesetz der Zerstreuung nicht ermittelt ist, und da die Beachtung der Krümmung der Erdoberfläche den mathematischen Entwicklungen, die er darauf gründet, grosse Schwierigkeiten entgegensetzen würden, so rechnet er mit jenen einfachen Annahmen, unter Beschränkung der Giltigkeit der Ergebnisse. So findet er, dass die Himmelshelligkeit entlang horizontaler Himmelskreise, also bei unveränderlichem Höhenwinkel, unveränderlich sei, und dass diese Helligkeit zwei Maxima besitze, eines im Horizont und eines in der Höhe der Sonne (Photometria, S. 415). Es sind dies Angaben, welche dem blossen Augenschein widersprechen.

4. Clausius. Eine spätere Arbeit über die Helligkeit des Himmels rührt von Clausius[1]) her. Er hat nach Lamberts Vorgang neue Berechnungen durchgeführt, ist aber dabei nicht von der Annahme einer gleichförmigen Lichtzerstreuung durch die Luft nach allen Richtungen ausgegangen, sondern bestimmt ein Zerstreuungsgesetz aus der Annahme, dass diese Zerstreuung durch schwebende Wasserbläschen stattfinde. Aber die

[1]) Clausius, über die Lichtzerstreuung in der Atmosphäre, Pogg. Ann. d. Ph. u. Ch., Bd. 72, 1847, S. 294. Es ist dies ein Auszug aus seinen Abhandlungen in d. Ztschr. f. r. u. ang. Math., Bd. 34 u. 36.

Ergebnisse, die er findet, stimmen nicht mit den von mir angestellten, alsbald darzustellenden Messungen überein; ausserdem ersetzt man jetzt allgemein, wie später begründet wird, die Annahme von schwebenden Wasserbläschen durch die von Wassertröpfchen, welche wegen ihrer Kleinheit so langsam in ruhender Luft sinken, dass sie auch als schwebend anzusehen sind.

5. Weg der Forschung. In der vorliegenden Arbeit sind im wesentlichen die von Bouguer und Lambert angegebenen Wege eingeschlagen. Es sind, wie Lambert anführte, drei Annahmen zu machen:

1. über die Lichtschwächung beim Durchgang durch die Luft; dieser Punkt ist durch die neuerdings bestätigten Messungsergebnisse Bouguers und durch die Rechnungsweise Bouguers und Lamberts erledigt.

2. Die in den verschiedenen Höhenrichtungen durchlaufenen Dicken der Luftschicht wurden von Bouguer bestimmt und sind im Folgenden in anderer Weise abgeleitet. Es blieb nur die Schwierigkeit, die verwickelten Formeln für einfache Integrationen zugänglich zu machen. Dies erreichte Lambert durch Annahme des ebenen Horizontes bis zu Zenithdistanzen von 80°; im Folgenden wurde es allgemein erreicht durch sogenannte reduzirte Zenithdistanzen.

3. Den wichtigsten Punkt bildet das Zerstreuungsgesetz der Luft. Es werden nämlich die Lichtstrahlen der Sonne durch jedes Lufttheilchen, genauer durch den in ihm enthaltenen Dunst, nach allen Richtungen hin zerstreut, somit nach allen Seiten abgelenkt. Es ist also unter dem Zerstreuungsgesetz zu verstehen das Gesetz der Abhängigkeit der Stärke des zerstreuten Lichtes von der Grösse des Ablenkungswinkels der Lichtstrahlen. Dieses Gesetz suchte ich zuerst durch Messung der Helligkeit des klaren Himmels an verschiedenen Stellen zu ermitteln. Da diese Helligkeit von dem Zerstreuungsgesetz und von der Dicke der durchstrahlten Luftschicht abhängt, letztere aber berechnet werden kann, so konnte rückwärts das Zerstreuungsgesetz unter Beachtung der Einwirkung der Dicke der Luftschicht ermittelt werden. Ich habe mit sehr einfachen Apparaten die alsbald zu beschreibenden Messungen ausgeführt und daraus in vorläufiger Weise ein Zerstreuungsgesetz ermittelt. Ich hatte dann die Absicht, die Messungen in genauerer Weise zu wiederholen und verfertigte mir daher genauere Apparate.

Da aber das dann zu ermittelnde Zerstreuungsgesetz doch nur erfahrungsmässiger, und nicht erklärender Natur gewesen wäre, so unterliess ich die Wiederholung der Messungen und leitete die Zerstreuung aus den drei wirkenden Ursachen ab; diese sind:

a) die Lichtbrechung und Spiegelung durch schwebende Wassertröpfchen und Eiskryställchen,

b) die Beugung durch schwebende feste oder flüssige Theilchen,

c) die Miterschütterung kleinster schwebender Körperchen durch das Licht.

Die nothwendige Kenntniss der mittleren absoluten Grösse der beugenden Theilchen und des Verhältnisses der Wirkung der dritten zu der ersten Ursache konnte nur erfahrungsmässig festgestellt werden und wurde auf Grundlage der von mir ausgeführten Messungen bestimmt. Die mit Hilfe des so ermittelten Zerstreuungsgesetzes ausgeführten Berechnungen stimmten dann befriedigend mit jenen Messungen überein.

6. Die Apparate zum Messen der Himmelshelligkeit. Sie hatten Aehnlichkeit mit den von Bouguer angewendeten. Aus mattschwarzem stärkeren Papier bildete ich zwei Rohre von 50 cm Länge und 6 cm Weite, welche im Inneren Blendringe zum Abhalten des Seitenlichtes und an den Enden Schlussplatten besassen. Die gegen den Himmel gerichtete Platte enthielt die runde Objektivöffnung von 2,2 cm Durchmesser, die dem Auge zugekehrte die Okularöffnung von 0,8 cm Durchmesser, und diese war mit durchscheinendem Seidenpapier geschlossen, welches um so heller erschien, je heller die Stelle des Himmels war, gegen welche man das Rohr gerichtet hatte. Die Objektivöffnung des einen Rohres konnte durch einen Schieber theilweise geschlossen und die Weite des Schlusses an einer Theilung abgelesen, und daraus mittelst einer berechneten Tabelle die Grösse der gebliebenen Oeffnung bestimmt werden.

Sollten nun die Helligkeiten zweier Stellen des Himmels miteinander verglichen werden, so wurden die Rohre gegen diese gerichtet, und zwar das mit verkleinerbarer Oeffnung gegen die hellere Stelle; dann wurden beide Okularblättchen unter dem Schutze eines umgehängten schwarzen Tuches, wie es die Photographen benutzen, betrachtet, und die eine Objektivöffnung so lange verkleinert, bis jene Blättchen gleich hell erschienen; es

war dann das Verhältniss der Helligkeiten gleich dem umgekehrten Verhältniss der Grössen der Okularöffnungen. Ich bemerke, dass Bouguer die scheinbare Oeffnung des einen Rohres durch Verlängerung des Rohres bewirkte. Bei der späteren Verbesserung brachte ich, um die Sehrichtung nicht zu verändern, zwei gegenüberstehende Schieber an der Objektivöffnung an, die ich ausserdem quadratisch gestaltete.

Die Rohre waren auf Stativen befestigt, wie man sie in physikalischen Laboratorien gebraucht. Diese hatten eine schwere metallische Fussplatte, darauf eine lothrechte cylindrische Eisenstange, an der eine Hülse durch eine Klemmschraube in jeder Höhe festgestellt werden konnte. Die Hülse trug seitlich einen Ring, der um eine wagrechte Axe mit Reibung beweglich war. Durch diesen Ring wurde jenes Rohr geschoben und an ihm befestigt. Die Richtung der beiden Rohre gegen einander und gegen die Sonne wurden bestimmt 1. durch Messung der Zenithdistanz vermittelst eines an jedem Rohr seitlich befestigten in 90° getheilten Quadranten mit centrisch angehängtem Senkel, und 2. durch Messung des Winkels der Vertikalebene beider Rohre gegeneinander. Zu diesem Behufe war die Grundplatte jedes Stativs auf eine horizontale in 360° getheilte Cartonscheibe aufgeleimt, und diese Scheiben wurden auf eine grosse Cartonscheibe mit aufgezeichneten parallelen Linien aufgestellt. Las man dann die Theilung an den zwei Schnittpunkten des Scheibenrandes mit einer der parallelen Linien ab, so gab das Mittel beider Ablesungen den Winkel des Nullhalbmessers der Theilung mit einer zu jenen Parallelen senkrechten Geraden. Richtet man nun die Rohre mittelst der Klemmschraube jener Hülsen so, dass bei gleicher Angabe jener Mittel die Axen der Rohre auf denselben Gegenstand am Horizonte zeigen — indem man dabei das nur lose vor die Okularöffnung gehängte Blättchen Seidenpapier etwas hebt —, so giebt später bei der Richtung der Rohre auf verschiedene Gegenstände der Unterschied der Mittel auch den Winkel der Vertikalebenen beider Rohre. Der Winkel der Vertikalebene eines Rohres gegen die Vertikalebene der Sonne, gezählt von der Sonne aus nach beiden Seiten hin bis zu 180° soll das Azimuth des anvisirten Punktes des Himmels heissen; beiderlei Seiten werden wegen ihrer Symmetrie in Bezug auf die Helligkeit bei klarem Himmel nicht unterschieden.

Die zweite aber wenig benutzte Ausführung dieser Apparate ist ähnlich aber sorgfältiger; insbesondere wurden die Rohre aus starkem Carton hergestellt, der im Inneren mit mattschwarzem Papier überzogen war. Auch wurden noch zwei Rohre zugefügt zur direkten Vergleichung der Helligkeiten einer Stelle der Sonnenscheibe und einer Stelle des Himmels, wobei das erste Rohr eine Länge von 130 cm und eine nadelstichweite Objektivöffnung von 0,09 cm besass, das zweite eine nur 20 cm grosse Länge und eine durch Schieber verkleinerbare Objektivöffnung von 5 cm. Mit diesen nahm ich einige Messungen vor, die später noch erwähnt werden.

7. Die Ergebnisse der Messung. Mit den ersteren beiden, freilich recht mangelhaften Rohren machte ich nun Messungen, und man darf von denselben keine grosse Genauigkeit erwarten. Dem ohngeachtet sind die Ergebnisse brauchbar. Ich werde aber nichts von den Mängeln verschweigen. Ich mass am 13. September 1884 an einem windstillen Vormittage bei klarem wolkenlosen Himmel auf dem kleinen, damals noch offenen Observatorium der Technischen Hochschule von Karlsruhe, welches $8^{0}\ 24'\ 52''$ östlich von Greenwich, in der n. Breite von $49^{0}\ 0'\ 42''$ liegt. Die Messungen dauerten von $10^{h}\ 48'$ bis $12^{h}\ 25'$ mittlerer Zeit, d. i. $10^{h}\ 52'$ bis $12^{h}\ 29'$ wahrer Zeit. Die Zenithdistanz der Sonne schwankte dabei zwischen dem Minimum von $45^{0}\ 26'$ (im wahren Mittag) und $47^{0}\ 16'$ und konnte im Mittel $= 46^{0}$ gesetzt werden (näher dem Minimum), zumal da eine Genauigkeit von 1^{0} nicht erreicht wurde. Ich machte jedesmal zwei Einstellungen des Schiebers und erhielt zwei Verhältnisszahlen v für die Helligkeit der folgenden Stelle zu derjenigen der vorhergehenden. Dabei maass ich in dem Vertikalkreise der Sonne, also auf der Seite der Sonne bei dem Azimuthe $\alpha = 0^{0}$, und auf der gegenüberliegenden bei $\alpha = 180^{0}$, und bei wechselnden Zenithdistanzen ζ; sodann im Horizonte ($\zeta = 90^{0}$), bei wechselndem Azimuthe α.

In der Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Messungen niedergelegt. Tab. 1.
Die dritte und vierte Reihe enthalten die beiden beobachteten Verhältnisszahlen v, die fünfte das Mittel v' beider. Dabei bemerkt man aber, dass an zwei Stellen die Beobachtungen so verschieden sind, dass nothwendig eine davon ganz fehlerhaft sein und deswegen ausgeschlossen werden muss. Es würde dadurch die Beobachtungsreihe nur theilweise brauchbar, wenn

Tabelle 1.

Ergebnisse der Messung der Himmelshelligkeiten.

Azimuth α	180^0	150	120	90	60	30	0	0	0
Zenithdistanz ζ	90	90	90	90	90	90	90	80	67
Verhältniss v der Helligkeiten	1,00	1,00	1,86	1,45	1,24	1,34	0,95	1,86	
	1,00	1,18	1,60	1,51	1,00	1,34	0,91	3,4	
Mittel oder Auswahl v'	1,00	1,09	1,73	1,48	1,12	1,34	0,93	1,86	
Helligkeit H'	1,00	1,00	1,09	1,89	2,79	3,12	4,19	3,88	7,24
Ausgeglichene Helligkeit H	1,00	1,02	1,14	1,99	3,01	3,44	4,67	4,48	8,38

α	0	0	0	180	180	180	180	180	(0)
ζ	67	48	8	5	43	50	72	90	(46)
v	2,2	0,14	0,12	0,86	1,27	3,1	1,91		
	2,9	0,12	0,15	0,37	1,53	2,3	1,43		
v'	2,55	0,13	0,135	0,37	1,39	2,70	1,67		
H'	7,24	18,4	2,40	0,33	0,12	0,166	0,45	0,75	
H	8,38	21,8	2,89	0,400	0,151	0,213	0,585	1,00	(23,8)

nicht sicher erkannt werden könnte, welche von beiden Zahlen jedesmal fehlerhaft und auszuschalten ist. Für zwei Beobachtungsstellen unterhalb der Sonne in ihrer Vertikalebene ist in der Tabelle zwischen $\alpha = 0^0$, $\zeta = 80^0$ und $\alpha = 0^0$, $\zeta = 67^0$, $v = 1{,}86$ und $= 3{,}4$ als beobachtet eingetragen. Hier ist 3,4 zu verwerfen; denn die Helligkeitsabnahme von einer Stelle ($\zeta = 48^0$), 2^0 unterhalb der Sonne, bis zu einer entfernteren ($\zeta = 67^0$), also für 19^0, ist nach der Tabelle durch die Verhältnisszahl 2,55 bezeichnet, und diese muss jedenfalls grösser sein, als an der von der Sonne entfernteren Stelle von $\zeta = 67^0$ bis zu $\zeta = 80^0$, also für nur 13^0; denn die Abnahme in der Nähe der Sonne erfolgt nach allen unseren künftigen Rechnungen, nach dem Augenschein und nach den angeführten Beobachtungen von Bouguer rascher; zudem ist die letztere Winkelstrecke von 13^0 kleiner als die erstere von 19^0. Daher ist die Zahl 3,4 zu verwerfen. Ebenso ist bei $\alpha = 180^0$, von $\zeta = 5^0$ bis $\zeta = 43^0$, $v = 0{,}86$ und $= 0{,}37$ als beobachtet eingetragen, aber nur 0,37 kann richtig sein. Denn die dunkelste Stelle des Himmels liegt der Sonne gegenüber in einem Abstande von etwa 90^0, sowohl nach dem Augenschein, als nach unseren späteren Rechnungen. Es muss daher von $\zeta = 5^0$ bis zu $\zeta = 43^0$ eine merkliche Helligkeitsabnahme stattfinden, die nur durch $v = 0{,}37$, nicht aber durch

$v = 0{,}86$ geliefert wird. Zudem würde jede dieser ausgeschlossenen Zahlen sehr ungünstig für die jetzt vorzunehmende Hauptprobe sein.

Setzt man nämlich die Helligkeit an einer ausgezeichneten und dunkleren Stelle, auf dem Horizonte gegenüber der Sonne, wo $\alpha = 180^0$, $\zeta = 90^0$ ist, gleich Eins, so erhält man die Helligkeit H' je einer folgenden Stelle durch Vervielfachung der Helligkeit an der vorhergehenden Stelle mit der zwischenliegenden Verhältnisszahl v'. Und da die Linie der Helligkeiten geschlossen ist, so müsste man beim Zurückkehren zum Anfangspunkte wieder die Anfangshelligkeit erhalten, oder es müsste das Produkt aller v' gleich Eins sein. Dies Produkt, hier gleich der Endzahl, ist aber 0,75 statt der Anfangszahl 1. Um den Messungsfehler auszugleichen, muss man jedes v' mit einer Verbesserungszahl, und zwar stets mit derselben c, vervielfachen, und da dies bei den 15 Punkten und Zwischenräumen 15 mal geschehen muss, ist $c^{15} = 1 : 0{,}75 = 1{,}333$; $c = 1{,}0194$. Es hat also der mittlere Fehler einer Beobachtung nur den kleinen Werth von $0{,}0194 = \frac{1}{52}$, wobei zweifellos günstige Ausgleichungen stattgefunden haben. Man vervielfache nun die Werthe von H' der Reihe nach mit 1; 1,0194; $1{,}0194^2$; $1{,}0194^3$; ... $1{,}0194^{15} = 1{,}333$, so erhält man die ausgeglichenen Helligkeiten H der Tabelle.

Nach den Werthen von H ist die Helligkeitskurve in Fig. 1 gezeichnet, bei welcher die Abscissen die durchlaufenen Bogen am Himmel, die Ordinaten die Helligkeiten H sind. Die Abscissen sind einmal die α bei unveränderlichem $\zeta = 90^0$, sodann die ζ bei unveränderlicher Vertikalebene ($\alpha = 0$ oder 180^0). Wir erhalten so zwei Kurven, welche bei $\alpha = 0^0$, $\zeta = 90^0$ unter einem Winkel zusammenstossen. Der Höcker und die Einsattelung der Kurve bei $\zeta = 90^0$ und $\alpha = 60^0$ und 30^0 dürften auf Ungenauigkeiten beruhen. Gegen die Sonne hin nimmt die Helligkeit rasch zu, in 2^0 Abstand von derselben, bei $\zeta = 48^0$ ist $H = 21{,}8$; unmittelbar neben der Sonne, also bei $\zeta = 46^0$ würde H bei stetiger Zunahme etwa um 2,0 grösser oder 23,8 sein. Dieser Werth ist in die Figur und in die Tabelle an ihrem Ende eingetragen. Fig. 1.

Diese Tabelle und die Figur werden wir, wie schon bemerkt, nicht benutzen, um das Zerstreuungsgesetz daraus abzuleiten; sie werden uns

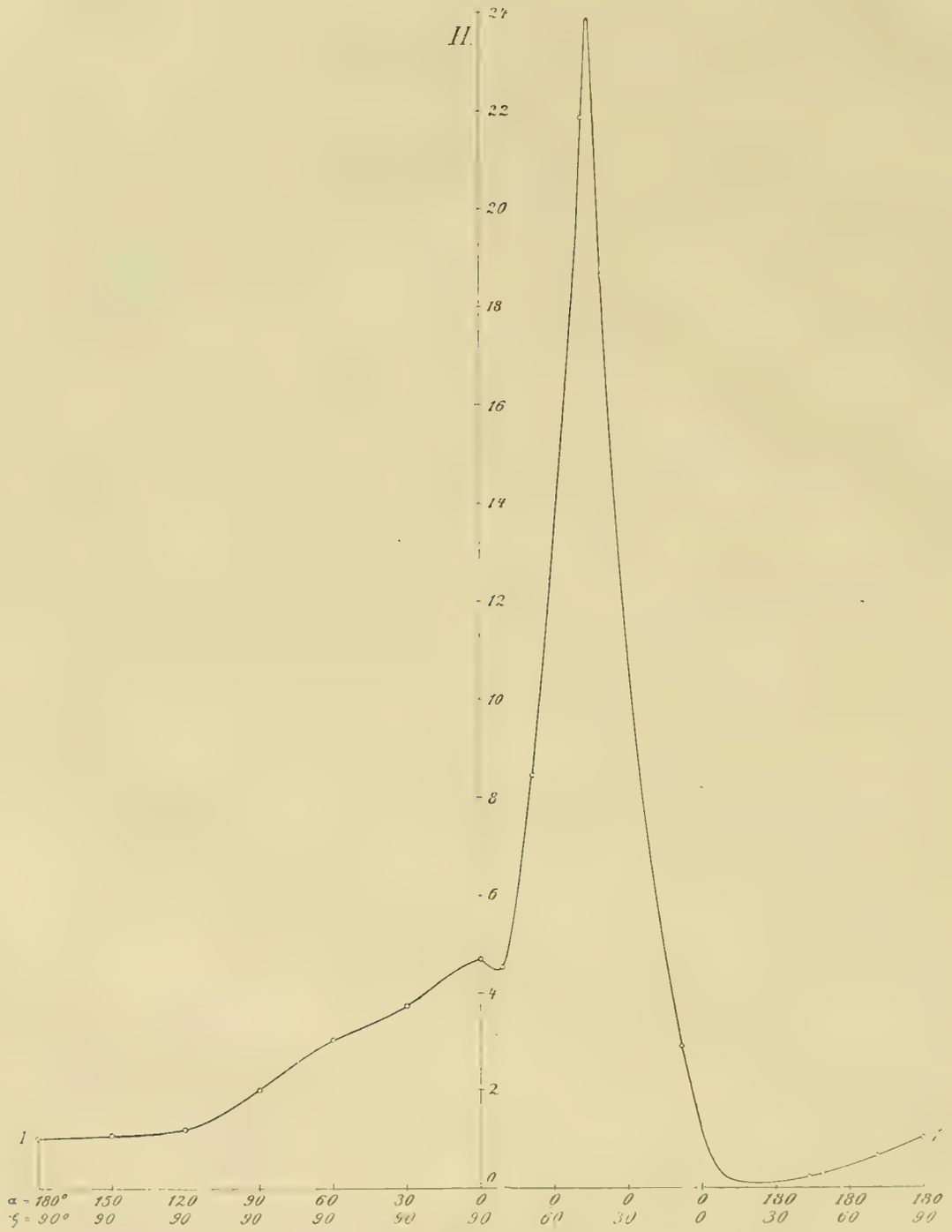

II.
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
I
α = 180° 150 120 90 60 30 0 0 0 0 180 180 180
ζ = 90° 90 90 90 90 90 90 60 30 0 30 60 90

Fig. 1.

aber durch Uebereinstimmung zur Bestätigung des theoretisch abgeleiteten Gesetzes dienen. Nur einige Angaben der Tabelle werden uns zur Bestimmung zweier erfahrungsmässig festzustellenden Verhältnisszahlen dienen. Wir wollen uns aber jetzt schon aus Tabelle und Figur ein lehrreiches Bild über die Vertheilung der Helligkeit am klaren Himmel bei der Zenithdistanz der Sonne von 46° verschaffen. Bezeichnet man die Helligkeit H am Horizont gegenüber der Sonne (Azimuth $\alpha = 180°$) mit 1, so nimmt dieselbe am Horizont bei Annäherung an die Sonne anfangs kaum zu; erst vom Azimuth von 120° an beginnt die Helligkeit rasch zuzunehmen und wird unterhalb der Sonne ($\alpha = 0°$) etwa $= 4{,}7$. Steigt man von da in der Vertikalebene zur Sonne, so nimmt anfangs H etwas ab, bis sie etwa bei $\zeta = 82°$ ihr Minimum von etwa 4,4 erreicht, um dann gegen die Sonne hin immer rascher zu steigen und neben der Sonne die Stärke von etwa 24 zu erreichen. Oberhalb der Sonne nimmt H wieder rasch ab, hat im Zenith die Grösse von etwa 0,8, nimmt weiter ab, um ihr Minimum etwa bei der Zenithdistanz von $\zeta = 25°$ mit etwa $H = 0{,}1$ zu erreichen und dann gegen den Horizont wieder bis zu 1 zuzunehmen. Die dunkelste Stelle ist also der Sonne gegenüber, aber in der geringeren Zenithdistanz von 25°, und ist etwa 240mal so klein, als die Helligkeit unmittelbar neben der Sonne.

8. Die Grundlagen zur Ableitung des Gesetzes der Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre. Die Schwächung des Lichtes der Sonne, des Mondes und der Sterne bei ihrem Durchgang rührt weit überwiegend, vielleicht ausschliesslich, von der Zerstreuung durch nicht luftförmige Theilchen, nämlich durch die in der Luft schwebenden Wassertröpfchen, Eiskryställchen und Staubtheilchen her, und die zur Ermittlung des Zerstreuungsgesetzes zu Grunde zu legenden Thatsachen sind im Wesentlichen folgende:

1. Atmosphärische Luft, die von Kohlensäure und Wasserdampf befreit ist, also nur aus Sauerstoff und Stickstoff besteht, und ebenso reiner Wasserstoff, absorbiren nur äusserst wenig Wärme von durchfallenden Wärmestrahlen. Herr Röntgen[1]) liess durch eine Schicht atmosphärischer

[1]) Röntgen, Neue Versuche über die Absorption von Wärme durch Wasserdampf. Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge. Bd. 23, 1884, S. 1 u. S. 259.

Luft, welche also Kohlensäure enthielt, oder durch Luft, der er die Kohlensäure entzogen, aber Wasserdämpfe beigemischt hatte, die Strahlen einer Bunsenflamme oder eines Drummontschen Kalklichtes fallen und fand eine stossweise Ausdehnung, indem diese Gase einen Theil der durchgestrahlten Wärme unmittelbar absorbirten. Befreite er aber die Luft von der Kohlensäure und dem Wasserdampf, sodass sie nur aus Sauerstoff und Stickstoff bestand, oder nahm er reinen Wasserstoff, so trat mit dem durchgelassenen Licht nicht zugleich eine stossweise Ausdehnung ein, sondern nur eine allmähliche, von den erwärmten Gefässwänden übertragene.

2. Ein Lichtstrahl, der einen dunklen Raum durchstrahlt, ist von der Seite her nur sichtbar, wenn sich Staubtheilchen oder Wassertröpfchen in der Luft befinden, nicht aber bei nur gasförmiger Beschaffenheit der Luft. Daher kann die Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre nur von solchen flüssigen oder festen Theilchen herrühren.

3. Als solche lichtzerstreuende Theilchen sind zunächst Wassertröpfchen anzusehen, die durch Zurückwerfung oder Brechung wirken. Am auffälligsten ist ihre Wirkung bei grösserer Ausdehnung als Regentropfen, wo sie dann die beiden Regenbogen mit ihren überzähligen Bogen hervorbringen, zwischen denen eine dunkle tintenfarbige Zone stehen bleibt. Wir werden auf diese für uns wichtige Erscheinungen später genau eingehen und werden finden, dass bei geringerer Grösse der Tröpfchen der Regenbogen eine grössere Ablenkung von der Richtung des Sonnenstrahles erfährt, dass daher bei kleiner und wechselnder Grösse die verschiedenen Farben vermischt werden und die farbigen Bogen verschwinden. Es wirken auf die Himmelshelligkeit die mannigfachen Lichtbüschel ein, welche entweder durch blosse Zurückwerfung an der Oberfläche der Tröpfchen, oder durch zweimalige Brechung, oder durch zweimalige Brechung und einmalige oder zwei- oder mehrmalige Zurückwerfung im Inneren des Tropfens entstehen. Die stärkste Wirkung besitzt der zweite der genannten Büschel mit alleiniger zweimaliger Brechung; er ist eine der wesentlichen Ursachen, durch welche der Himmel unmittelbar neben der Sonne in der Regel weitaus am hellsten erscheint.

4. In den höheren kalten Luftregionen sind die Wassertröpfchen durch Eiskryställchen ersetzt, welche vorherrschend die Gestalt sechsseitig

prismatischer Nadeln besitzen. Sind sie gross und durch bewegliche Luft zerstreut orientirt, so erzeugen sie den hellen Ring um die Sonne oder den Mond in 22° Abstand von diesen Gestirnen. Stellen sie sich aber bei ruhiger Luft langsam sinkend annähernd aufrecht, so erzeugen sie die horizontalen und vertikalen hellen Kreise, die Nebensonnen an den Schnittstellen jenes Ringes mit diesen Kreisen und durch ihre mannigfachen Krystallflächen auch noch andere mannigfache helle Kreise. Wenn sie kleiner sind und durch die bewegte Luft alle möglichen Stellungen annehmen, so erzeugen sie durch mannigfache Zurückwerfungen und Brechungen des Lichtes die mannigfaltigsten Lichtbüschel und bringen so eine vielfach zusammengesetzte Helligkeit des Himmels hervor, an dem jener Ring die hellste Stelle bezeichnet.

5. Die kleinen schwebenden Theilchen, mögen sie Wasser, Eis oder Staub sein, bringen eine Beugung des Lichtes hervor, und diese bildet die Hauptursache für die grosse Helligkeit des Himmels in der Nähe der Sonne. Die Ausdehnung dieses hellen Kranzes ist um so grösser, je kleiner die Theilchen sind. Diese Kleinheit bewirkt auch durch Beugung eine Ausbreitung und Verwaschung der scharf begrenzten hellen Ringe, die sonst auftreten würden, so beim Regenbogen, wie schon erwähnt, und des hellen Ringes von 22° Sonnenabstand, den die Eisnadeln erzeugen.

Ausserdem bringen noch die Protuberanzen der Sonne eine starke Erhellung bis zu einem Abstande von der Sonne von etwa $^1/_4$ Grad hervor, die wir nicht weiter in Betracht ziehen werden.

6. Sind endlich die schwebenden Theilchen klein sogar im Verhältniss zur Wellenlänge des Lichtes (bei B im Roth = 0,000687 Millimeter, bei H im Blau-Violett = 0,000397 Millimeter), so verursachen sie noch eine von der Beugung verschiedene Lichtzerstreuung, welche darauf beruht, dass sie von dem lichtschwingenden Aether erschüttert[1]) werden,

[1]) Die Annahme, dass die körperlichen Theilchen als Ganzes die Lichtbewegung mitmachen, ist wohl nicht erforderlich. Verf. hat selbst auf Grund der theoretischen Arbeiten von Stokes (Transac. of the Philos. Soc. Cambridge, Vol. 9, 1851, p. 1—62) und Strutt (Lord Rayleigh) (Phil. Mag. Ser. 4, Vol. 41, 1871. p. 107—120) eine einfache Darstellung der Erscheinung gegeben in einer Abhandlung: „Die Farbe der atmosphärischen Luft und Etwas über die Göthe'sche Farbenlehre“ (Verhandlungen des Naturwissenschaftl. Vereins Karlsruhe, Bd. 12, 1896). Die Erscheinung ist danach eine einfache Folge des Huygens'schen Princips. Die Herausgeber.

dessen Schwingungen mitmachen und so als eigene Lichtquellen für vorwiegend blaues Licht wirken, und dadurch die blaue Farbe des Himmels hervorbringen.

Forbes hat in dem noch durchsichtigen Wasserdampfe, welcher dem Sicherheitsventile einer Lokomotive entströmte, die blaue Farbe des Himmels beobachtet und sie den kleinsten, sich eben verdichtenden Wassertheilchen zugeschrieben. Bestimmtere Beobachtungen hierüber machte Brücke,[1]) welcher Mastix in Weingeist auflöste und davon einzelne Tropfen in Wasser goss und dies stark schüttelte. Er bekam dadurch eine schwach trübe Mischung, welche im zurückgeworfenen Lichte blau, im durchfallenden gelb, orange, und bei stärkerer Trübung roth erschien. Er schrieb dies dem Umstande zu, dass die Stärke des von den schwebenden Theilchen zurückgeworfenen Lichtes mit dem Brechungskoefficienten desselben zunimmt, daher bei Blau grösser als bei Gelb und Roth ist. (Stärke des zurückgeworfenen Lichtes bei H in Blauviolett zu der von B in Roth wie 33:31). Hierdurch erklärte er die allgemeine blaue Farbe des Himmels und seine rothe in der Nähe der Sonne.

Eingehendere Versuche hat Tyndall[2]) angestellt, indem er die Dämpfe verschiedener Stoffe, z. B. von salpetrigsaurem Amyl- oder Butyläther von Luft, die durch die Flüssigkeit strich, aufnehmen liess und sie dann in ein mehrere Fuss langes Glasrohr leitete. Schickte er nun einen Sonnenstrahl oder einen starken Strahl elektrischen Lichtes hierdurch, so entstanden in dem vorher leer erscheinenden Glasrohre Wolken, indem der Lichtstrahl jenen Stoff zersetzte. War die Verdünnung der Dämpfe durch Luft sehr gross und die niedergeschlagenen Theilchen äusserst fein, wie Tyndall annehmen musste, so erschienen die Wolken blau, und das zerstreute Licht in der Richtung senkrecht zum ursprünglichen Strahle vollständig polarisirt. Wurde der Niederschlag bei geringerer Verdünnung oder durch die Dauer dichter, so erschien die Wolke weiss und zeigte

[1]) Brücke. Ueber die Farben, welche trübe Medien in auffallendem und durchfallendem Lichte zeigen. (Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. Bd. 88, 1853, S. 363.)

[2]) Tyndall. On the blue colour of the sky, the polarisation of sky-light, and on the polarisation of light by cloudy matter in generally. Proc. of the R. Soc. of London. vol. 17, 1869. p. 223.

in einer andern Richtung, welche gegen die Richtung des ursprünglichen Strahles mehr oder weniger geneigt war, das Maximum der Polarisation. Durch diese Erscheinung ist die blaue Farbe des Himmels erklärt. — Die Erklärung dieser Erscheinung selbst durch Brücke ist indess nicht richtig, vielmehr wird sich später zeigen, dass die Zerstreuung mit der vierten Potenz der Wellenlänge des Lichtes umgekehrt proportional ist.

Mit den angeführten Beobachtungen stimmen diejenigen von Langley[1]) überein. Derselbe maass die Stärke der Strahlung der Sonne an den verschiedenen Stellen ihres Spektrums durch das von ihm konstruirte Bolometer. Dabei wird ein parallel zu den Fraunhoferschen Linien gespannter Draht entlang des Spektrums bewegt; je nach der stärkeren oder schwächeren Erwärmung setzt dieser dann einen stärkeren oder schwächeren Widerstand dem ihn durchfliessenden elektrischen Strom entgegen, der durch ein Galvanometer gemessen wird. Langley verglich nun die Stärke der Strahlen, nachdem dieselben die Atmosphäre zu verschiedenen Tageszeiten, also bei verschiedenen Dicken der Luftschicht, durchlaufen hatten, und fand dabei, dass die Absorption der blauen Strahlen viel stärker als die der gelben und rothen war, und allgemein dass die Strahlen um so stärker absorbirt werden, je kleiner ihre Wellenlänge ist. Diese Absorption erklärt aber Langley wesentlich nicht durch Verschlucken, sondern vorwiegend durch Zerstreuen, indem er sagt, dass beim Verschlucken die Luft glühend werden müsste.

In Bezug auf das Zerstreuen stimme ich Langley vollständig zu, wenn auch nicht in Bezug auf das Erglühen der Luft: denn die Sonne sendet in 1 Minute auf 1 qcm an der oberen Grenze der Atmosphäre nach Langley 2,84 Wärmeeinheiten (welche also 1 cbcm = 1 g Wasser auf 2,84° C erwärmen würden). Diese Energie der Strahlung (Licht oder Wärme) wird aber (S. 4) bei dem Durchgang durch die Atmosphäre um 0,19 vermindert, wenn die Sonne im Zenith steht; und da die zu gleichförmiger Dicke zusammengedrückte Atmosphäre 8000.100 cm hoch ist, das

[1]) Langley, the selective absorption of solar energy. Phil. Magaz. Ser. 5, Vol. 15, 1883, p. 153, und Langley, on the amount of the atmospheric absorption. Phil. Magaz. Ser. 5, Vol. 18, 1884, p. 289.

specifische Gewicht der Luft 0,001293, und ihre specifische Wärme bei unveränderlichem Druck 0,2375 beträgt, so würde die Luftsäule in 1 Minute um t^0C erwärmt, wobei t bestimmt ist durch $2{,}84.0{,}19 = 8000.100.0{,}001293.0{,}2375.t$, woraus $t = 0{,}00219^0$ C; demnach würde die Luft in 10 Stunden um $1{,}314^0$ erwärmt, also nicht ins Glühen kommen. Die blaue Farbe des Himmels wird aber nur durch Zerstreuung erklärt, wie angegeben, und ebenso wird das auf Wassertröpfchen fallende Licht fast ausschliesslich zerstreut. Nimmt man nämlich nach Bouguer[1]) an, dass das Licht beim Durchlaufen einer Wasserschicht von 10 par. Fuss = 3,25 Meter Länge 0,29 seiner Stärke verliert, also (nach dem logarithmischen Gesetze) bei 1 mm Länge 0,0004 seiner Stärke, so giebt es beim Durchlaufen eines Wassertröpfchens von noch geringerer Dicke fast keine Wärme an dieses ab, und so gut wie die ganze Energie des Strahles wird zerstreut.

9. Einzuschlagender Weg für die Feststellung des Zerstreuungsgesetzes. Es soll nun im Folgenden zuerst die Zerstreuung des Sonnenlichtes durch ein Wassertröpfchen von einer Grösse, die nicht klein gegen eine Wellenlänge ist, ermittelt werden, wobei durch Zurückwerfung und Brechung alle Farben des Spektrums in gleichem Grade zerstreut werden (erster Abschnitt der zweiten Abtheilung). Sodann soll dieselbe Aufgabe für sechsseitig prismatische Eisnadeln gelöst werden, welche in einem Raume von etwa 1 cbm Luft in regelmässig zerstreuter Anordnung schweben und ebenfalls nicht klein gegen eine Wellenlänge sind (dritter Abschnitt der zweiten Abtheilung). Ferner soll die Beugung des Lichtes durch schwebende Theilchen untersucht werden, Wassertröpfchen, Eiskryställchen oder Staubtheilchen, die so klein sind, dass ihre Form ohne wesentlichen Einfluss ist, die aber doch gross gegen eine Wellenlänge des Lichtes sind (zweiter Abschnitt der zweiten Abtheilung). Und endlich soll die Zerstreuung des Lichtes durch solche schwebende Theilchen ermittelt werden, die selbst klein gegen die Lichtwellenlänge sind, und welche, wie bemerkt, durch eigene Erschütterung, und nicht durch Zurückwerfung, Brechung oder Beugung wirken. Daraus wird sich dann die gesammte zerstreuende Wirkung der Atmosphäre zusammensetzen (vierter Abschnitt der zweiten Abtheilung).

[1]) Bouguer a. a. O. S. 350, vergl. auch S. 62.

Zweite Abtheilung.

Das Gesetz der durch ein Dunsttheilchen bewirkten Zerstreuung des Sonnenlichtes.

Erster Abschnitt.

Wirkung der Wassertropfen durch Zurückwerfung und Brechung.

I. Durch eine Wasserkugel bedingter Gang und Schwächung der Lichtstrahlen.

10. Grösse und Form der Wassertheilchen in der Atmosphäre. Das tropfbare Wasser, welches sich in der Atmosphäre befindet, nimmt die Gestalt von Kügelchen an, deren Durchmesser im Nebel, bei dem sie gesehen werden konnten, zu 0,006 bis 0,017 mm gemessen wurde.[1]) Man glaubte früher, ihnen die Form von Bläschen, also hohlen Kügelchen, zuschreiben zu müssen, um das Schweben zu erklären; wenn man aber jene geringe Grösse beachtet, die sich bei den unsichtbaren Kügelchen in der klaren Luft noch verkleinert, so ergiebt eine Berechnung, dass auch gefüllte Kügelchen oder Tröpfchen nur äusserst langsam in ruhiger Luft sinken. Ausserdem findet man in jedem Tröpfchen einen Staubkern, um den sich das Wasser umgelagert hat, und dies ist nur in Form von gefüllten Kugeln denkbar. Endlich aber liefern die Folgerungen aus der Annahme von Tröpfchen eine Vertheilung des Lichtes am klaren Himmel, welche mit den oben angegebenen Beobachtungen übereinstimmt; während die Folgerungen, die, wie oben angeführt, Clausius aus der Annahme der Bläschenform zog, damit im Widerspruch stehen.

11. Zurückwerfung des Sonnenlichtes an der Oberfläche der Wassertropfen. In den meisten Fällen begeht man keinen hier in

[1]) Assmann bestimmte die Grösse der Wasserkügelchen aus dem Durchmesser und der Höhe der Tropfenniederschläge auf Glasplatten, welche sich bei Nebel bildeten. (Mikroskopische Beobachtung der Wolkenelemente auf dem Brocken. Meteorologische Zeitschrift d. deutschen met. Ges., 2. Jahrg., 1885, Berlin, S. 41.)

Betracht kommenden Fehler, wenn man die Sonne durch einen in ihrem Mittelpunkte liegenden Punkt von gleicher Leuchtkraft, den Sonnenpunkt S, ersetzt denkt. Eine durch diesen Punkt und den Mittelpunkt M eines der Tropfen gelegte Ebene schneidet dessen Oberfläche in einem grössten Kreise. Es sei (Fig. 2)

Fig. 2.

r der Halbmesser des Tropfens,

ε der Einfallswinkel eines jenen grössten Kreis in P treffenden Sonnenstrahles,

so wird ein Theil seiner Lichtmenge von der Oberfläche in der Ebene jenes grössten Kreises zurückgeworfen; sei

φ_1 die Ablenkung des zurückgeworfenen von dem einfallenden Strahle, so ist

$$\varphi_1 = 180^0 - 2\varepsilon.^1) \qquad (1)$$

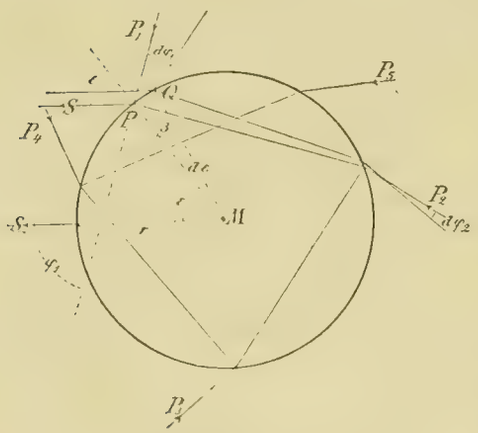


Fig. 2.

Durch diesen zurückgeworfenen Strahl erscheint ein Sonnenbildchen in dem Punkte P_1 des Himmels, der in einem Winkelabstande φ von dem Sonnenpunkte S liegt, oder, wenn man von einem bestimmten Orte des Auges ausgeht, wird durch jenen unter dem Winkel ε auffallenden Strahl das Sonnenbildchen durch einen solchen Wassertropfen sichtbar, welcher in der Richtung nach P_1 liegt. Sei

$\varepsilon + d\varepsilon$ der Einfallswinkel eines benachbarten in Q auftreffenden Strahles,

$\varphi_1 + d\varphi_1$ dessen Ablenkung, so erhält man durch Differentiation der Gleichung (1)

$$d\varphi_1 = -2d\varepsilon. \qquad (2)$$

Dreht man nun jenen grössten Kreis um SM, so erzeugen P und Q Par-

[1]) Würde man, wie es bei den späteren Formeln geschieht, als positiven Sinn der Ablenkung den Umlaufssinn des in den Tropfen eingedrungenen Strahles annehmen, so hiesse die Formel: $180^0 + 2\varepsilon$; es hat dies aber keinen Einfluss auf das Endergebniss der Rechnung. Die Herausgeber.

allelkreise, und die Lichtmenge, welche auf den von ihnen begrenzten Ring fällt, ist

$$= L \cdot 2r\pi \sin\varepsilon \cdot r d\varepsilon \cos\varepsilon, \tag{3}$$

wenn L die Lichtmenge bezeichnet, welche die Sonne auf eine Fläche von 1 qm wirft, die an der Stelle der Erde senkrecht gegen die Sonnenstrahlen aufgestellt ist, vorausgesetzt, dass diese nicht durch die Atmosphäre oder durch andere zwischenliegende Körper geschwächt worden sind. Es ist nämlich $2r\pi \sin\varepsilon$ der Umfang des von P beschriebenen Kreises und $rd\varepsilon \cos\varepsilon$ die auf den Strahlen senkrechte Breite des Ringes.

12. Verhältnissmässige Stärke der polarisirten Theile des zurückgeworfenen Lichtes. Die Menge des zurückgeworfenen Lichtes hängt davon ab, ob das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist oder ob es senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist. Das natürliche Licht, wie es von der Sonne kommt, zerlegt man in polarisirtes Licht der einen und der andern Art; jedes derselben besitzt die Hälfte der ursprünglichen Stärke. Bezeichnet

$n = \frac{4}{3}$ den mittleren Brechungskoefficienten des Wassers, welcher für den Uebergang von Orange in Gelb im Spektrum, also nahezu für die Stelle der grössten Lichtstärke gilt, wobei aber in der Folge von dem Unterschiede für die einzelnen Farben und von der grösseren oder geringeren Dichtigkeit der benachbarten Luft abgesehen wird, bezeichnet ferner

β den Brechungswinkel des in den Tropfen eindringenden Lichtes, so dass

$$n = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta}, \tag{4}$$

so ist nach Fresnel das Verhältniss der Menge des zurückgeworfenen zu der Menge des auffallenden Lichtes bei dem in der Einfallsebene polarisirten Lichte

$$= \frac{\sin^2(\varepsilon-\beta)}{\sin^2(\varepsilon+\beta)} = \alpha'_1 \tag{5}$$

und bei dem senkrecht zur Einfallsebene polarisirten

$$= \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon+\beta)} = \alpha''. \tag{6}$$

Dabei ist es gleichgiltig, ob das Licht aus dem dünneren oder dem dichteren Mittel kommt; denn es vertauschen sich für beide Fälle nur die Winkel ε und β, wodurch α' und α'' nicht verändert werden.

13. Fortsetzung zu 11. Die Menge des von dem Ringe PQ des Tropfens zurückgeworfenen in der Einfallsebene polarisirten Lichtes erhält man nun aus (3), wenn man darin L durch $\frac{1}{2}L\alpha'$ ersetzt. Ist r der Halbmesser des Tropfens, e sein Abstand vom betrachtenden Auge in Metern, gegen welchen r verschwindend klein ist, und denkt man sich um den Tropfen als Mittelpunkt mit e als Halbmesser eine Kugel beschrieben, so fällt jenes zurückgeworfene Licht auf eine Zone dieser Kugel vom Inhalte

$$2e\pi \sin\varphi_1 . e d\varphi_1 = 2e\pi \sin 2\varepsilon . e\, 2d\varepsilon,$$

wobei vom Vorzeichen abgesehen werden kann. Daher fällt auf jedes Quadratmeter dieser Zone, also auch auf eine bei dem Auge befindliche Fläche von 1 qm, welche senkrecht auf den Lichtstrahlen steht, eine Lichtmenge

$$= \frac{1}{2} L\alpha' \frac{2r\pi \sin\varepsilon . r d\varepsilon \cos\varepsilon}{2L\pi \sin\varphi_1 . 2d\varphi_1} = \frac{1}{4} L\alpha' \frac{r^2}{e^2} \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin\varphi_1} \frac{d\varepsilon}{d\varphi_1} = \frac{1}{8} L\alpha' \frac{r^2}{e^2}.$$

14. Helligkeit, in der 1 cbm Luft erscheint, infolge Zurückwerfung des Lichtes an den Wassertropfen. Es trete nun an die Stelle des Tropfens (in dem gleichen Abstande e) eine Luftschicht, deren Dicke in der Richtung nach dem Auge = 1 m ist, und es bezeichne m die Anzahl jener Tropfen in 1 cbm dieser Luftschicht, welches Cubikmeter dem Auge die Fläche von 1 qm zukehrt; ferner bezeichne h'_1 (bezw. h''_1) die Helligkeit, die durch dasjenige Licht hervorgebracht wird, welches von den m in jener Schicht enthaltenen Tropfen zurückgeworfen und in der Einfallsebene (bezw. senkrecht dazu) polarisirt ist.

Unter der Helligkeit eines Gegenstandes versteht man aber die Menge des von demselben auf die Netzhaut geworfenen Lichtes, getheilt durch die Fläche seines Netzhautbildes, oder die Menge des auf die Flächeneinheit dieses Bildes fallenden Lichtes. Um uns aber von der Verschiedenheit der Augen unabhängig zu machen, insbesondere auch von der wechselnden Grösse der Pupille, welche das in das Auge fallende Licht begrenzt, sowie von der Trübung des Lichtes beim Durchgang durch den Augapfel, wollen

wir hier als Einheit der Helligkeit die Helligkeit einer Fläche annehmen, von der ein kleines Flächenstück mit dem Inhalt f auf ein durch das Auge gelegtes mit ihm paralleles Flächenstück f, das ihm im Abstand von 1 m senkrecht gegenüber steht, die Lichtmenge f^2 zusendet, so dass 1 Quadratmeter einem ebensolchen die Lichtmenge 1 unter den bezeichneten Umständen zusenden würde, wenn hier nicht die Abweichung von der senkrechten Bestrahlung zu gross würde.

Wird nun die helle Fläche in den Abstand e vom Auge gerückt unter Wahrung der senkrechten Stellung zu ihrer Verbindungslinie mit dem Auge, so sendet 1 qm nur noch $(1:e^2)$ Einheiten der Lichtmenge auf ein bei dem Auge aufgestelltes Quadratmeter, wenn die Lichtschwächung durch Luft auf der Weglänge e nicht in Betracht kommt. Ausserdem wird aber das Bild auf der Netzhaut $(1:e^2)$ mal so gross; die Helligkeit wird also $(1:e^2):(1:e^2)$ mal so gross, als sie ursprünglich war, oder sie bleibt Eins. Die Helligkeit einer Fläche beim Hinausschieben in einem das Licht nicht oder nur unmerklich schwächenden Mittel ändert sich also nicht, weil die ins Auge gesendete Lichtmenge und die Grösse des erzeugten Bildes in demselben Maasse sich verändern, also ihr Verhältniss, d. i. die Helligkeit ungeändert bleibt.

In unserem Falle ist durch die letzte Formel schon die Menge des Lichtes bestimmt, welche von einem Wassertropfen auf ein bei dem Auge aufgestelltes Quadratmeter gesendet wird; die Lichtmenge für m Tropfen in dem 1 cbm Luft, das dem Auge 1 qm zuwendet, ist m mal so gross, und die Helligkeit dieses Cubikmeters wegen Veränderung seiner Bildgrösse $(1:e^2)$ mal so klein, so dass man jene Lichtmenge mit $(1:e^2)$ theilen muss, um die Helligkeit jenes Cubikmeters Luft zu erhalten. Sie ergiebt sich daher zu

$$\left.\begin{aligned} h'_1 &= Lmr^2 \cdot \frac{1}{4} \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin \varphi_1} \frac{d\varepsilon}{d\varphi_1} \alpha' \\ &= Lmr^2 \frac{1}{8} \alpha' = Lmr^2 l'_1 \end{aligned}\right| \qquad (7')$$

und

$$h''_1 = Lmr^2 \frac{1}{8} \alpha'' = Lmr^2 l''_1, \qquad (7'')$$

wenn man setzt:

$$\frac{1}{8}\alpha' = l'_1, \text{ und } \frac{1}{8}\alpha'' = l''_1.$$

Die Helligkeit ist also, wie vorhin schon bemerkt, da die Lichtschwächung durch das zwischenliegende Mittel vorerst nicht in Rechnung gezogen wird, unabhängig von der Entfernung e des Lufttheilchens. Sie ist aber proportional mit der Anzahl m der Tropfen in 1 cbm Luft, proportional mit r^2 oder mit der Oberfläche eines Tropfens, mit der Lichtstärke L der Sonne und mit einer Zahl α', welche den Grad der Zurückwerfung des Lichtes ausdrückt und von dem Einfallswinkel ε abhängt. Wäre $\alpha' = \alpha'' = 1$, d. h. würde alles auffallende Licht zurückgeworfen, so wäre die von einem Wassertropfen ($m = 1$) herrührende Helligkeit

$$h'_1 + h''_1 = \frac{1}{4} L r^2.$$

Sie wäre dann eine gleichförmige am ganzen Himmel; es würde sich die auf einen Tropfen auffallende Lichtmenge $L \cdot r^2 \pi$ auf die Kugelfläche 4π, welche mit dem Halbmesser 1 um das Auge beschrieben ist, gleichmässig vertheilen.

Da Lmr^2 einen vorerst stets wiederkehrenden Faktor bildet, der erst später in Rechnung gezogen werden wird, so werden wir zunächst die verhältnissmässigen Helligkeiten berechnen

$$\left.\begin{aligned} l'_1 &= \frac{1}{8}\alpha' = \frac{1}{8}\frac{\sin^2(\varepsilon-\beta)}{\sin^2(\varepsilon+\beta)}, \\ l''_1 &= \frac{1}{8}\alpha'' = \frac{1}{8}\frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon+\beta)}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

15. Brechung des Sonnenlichtes durch die Wassertropfen.

Fig. 2. **Ablenkung der Strahlen.** Von dem Sonnenstrahle, welcher unter dem Einfallswinkel ε auf einen Tropfen auftrifft, dringt ein Theil unter dem Brechungswinkel β in das Innere ein, trifft dann von innen die Oberfläche unter demselben Winkel β, tritt hier zum Theil unter dem Ausfallswinkel ε aus und wird zum andern Theile unter dem Ausfallswinkel β wieder in das Innere zurückgeworfen, trifft nochmals die Oberfläche unter dem Winkel β, tritt wieder zum Theil unter dem Winkel ε aus u. s. w., wobei er immer in der Ebene desselben grössten Kreises des Tropfens bleibt. Indem hierbei das Licht stets geschwächt wird, genügt es, wie sich ergeben wird, bis zum vierten austretenden Strahle fortzuschreiten, der dreimal im Innern zurückgeworfen wird.

Es seien $P_2, P_3, \ldots P_i$ die Orte des Himmels, von denen bezw. der erste, der zweite, ... der $(i-1)^{\text{te}}$ ausgetretene Strahl herzukommen scheint, wobei $i > 1$, ferner seien $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_i$ die Gesammtablenkungen dieser Strahlen von dem ursprünglichen Sonnenstrahle, also auch die Sonnenabstände von $P_2, P_3, \ldots P_i$, so ist offenbar

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= 2(\varepsilon - \beta), \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + 180^0 - 2\beta, \\ \varphi_i &= \varphi_{i-1} + 180^0 - 2\beta, \\ \varphi_i &= 2(\varepsilon - \beta) + (i-2)(180^0 - 2\beta). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

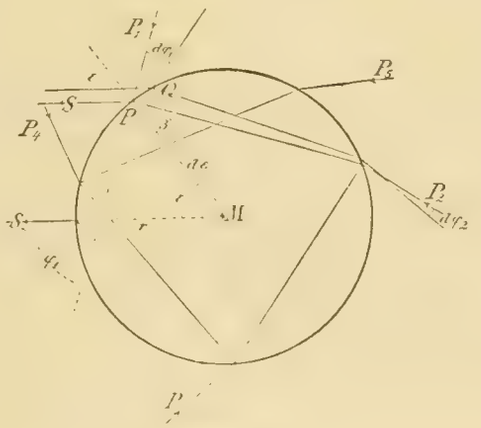


Fig. 2.

Wir haben sodann die Zerstreuungen dieser verschiedenen Strahlenbüschel zu bestimmen. Es entsteht durch Differentiation des Ausdruckes für φ_2

$$d\varphi_2 = 2(d\varepsilon - d\beta),$$

woraus

$$\frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} = 2 - 2\frac{d\beta}{d\varepsilon}. \quad (10)$$

Man erhält nun durch Differentiation der Gleichung (4) ($n \sin\beta = \sin\varepsilon$),

$$\cos\beta\, d\beta = \frac{1}{n}\cos\varepsilon\, d\varepsilon, \quad \frac{d\beta}{d\varepsilon} = \frac{1}{n}\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta}.$$

Sodann ergiebt sich durch Differentiation der Ausdrücke für $\varphi_3, \ldots \varphi_i$ in (9)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_3}{d\varepsilon} &= \frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} - 2\frac{d\beta}{d\varepsilon}, \\ \frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} &= \frac{d\varphi_{i-1}}{d\varepsilon} - 2\frac{d\beta}{d\varepsilon}, \\ \frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} &= 2 - 2\frac{d\beta}{d\varepsilon} - 2(i-2)\frac{d\beta}{d\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

16. Lichtschwächung der abgelenkten Strahlen. Sodann bestimmen wir die Lichtschwächung dieser Strahlen. Jeder der beiden polarisirten Strahlen bleibt stets in ungeänderter Weise polarisirt. Ein ur-

sprünglich auffallender, in der Einfallsebene polarisirter Strahl von der Stärke Eins wird in einen zurückgeworfenen von der Stärke

$$\alpha' = \frac{\sin^2(\varepsilon - \beta)}{\sin^2(\varepsilon + \beta)}$$

und in einen gebrochenen von der Stärke

$$1 - \alpha'$$

zerlegt. Da an jeder andern Stelle, wo der Strahl in seinem weiteren Verlaufe die Oberfläche des Tropfens trifft, dieselben Winkel ε, β auftreten, so findet an jeder dieser Stellen dieselbe verhältnissmässige Schwächung statt. Jeder der gebrochenen und wieder austretenden Strahlen erfährt daher zweimal die durch die Brechung hervorgebrachte Schwächung $(1-\alpha')$, und 0, 1, 2, 3 mal die durch die Zurückwerfung hervorgebrachte α'. Die ursprüngliche Lichtstärke 1 wird daher vermindert in den Strahlen, welche scheinbar

aus P_2 kommen, auf $(1-\alpha')^2$,
„ P_3 „ „ $(1-\alpha')^2\alpha'$,
„ P_4 „ „ $(1-\alpha')^2\alpha'^2$,
„ P_i „ „ $(1-\alpha')^2\alpha'^{i-2}$.

Man erhält nun für das in der Einfallsebene polarisirte Licht die Helligkeit h'_i, welche durch die Strahlen erzeugt wird, die von einem Punkte P_i auszugehen scheinen, indem man in der Formel (7') φ_1 und α' durch φ_i und $(1-\alpha')^2\alpha'^{i-2}$ ersetzt; dann wird

$$\left.\begin{aligned} h'_i &= Lmr^2 \frac{1}{4} \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin \varphi_i} \frac{d\varepsilon}{d\varphi_i} (1-\alpha')^2 \alpha'^{i-2} \\ &= Lmr^2 l'_i, \\ l'_i &= c' \frac{1}{\sin \varphi_i} \frac{d\varepsilon}{d\varphi_i} \alpha'^{i-2}, \\ c' &= \frac{1}{4}(1-\alpha')^2 \sin 2\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

Ebenso erhält man für das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht vermittelst

$$\alpha'' = \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon + \beta)} \quad \text{und} \quad 1 - \alpha'',$$

die Helligkeit

$$\left.\begin{aligned} h''_i &= Lmr^2 l''_i, \\ l''_i &= c'' \frac{1}{\sin \varphi_i} \frac{d\varepsilon}{d\varphi_i} \alpha''^{i-2}, \\ c'' &= \frac{1}{4}(1-\alpha'')^2 \sin 2\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (12'')$$

17. Ergebnisse der Berechnung. Allgemeines. Nach den angegebenen Formeln sind nun die Werthe von l'_i und l''_i in der beistehenden Tabelle 2 berechnet, wobei aber noch mehr Zwischenwerthe eingefügt Tab. 2. waren, die jedoch hier nicht mitgetheilt werden. Was die Genauigkeit der Rechnung anbelangt, so war massgebend, dass die Helligkeit höchstens auf $\frac{1}{100}$ ihrer Grösse gemessen werden kann. Da die Werthe von l_i nur bis zu 2, und in der Summe nur bis auf einige Einheiten steigen, so musste die zweite Decimalstelle noch angegeben werden, zu deren genauerer Bestimmung bei der Summirung aber noch die dritte zugefügt ist. Daher mussten auch die Zwischenwerthe auf drei Werthstellen berechnet werden, wodurch manchmal noch die vierte sich von Einfluss zeigte und noch angegeben wurde.

Somit war es möglich, den Rechenschieber zu benutzen, welcher eine Ablesung auf etwa 1:600 genau liefert. Eine grössere Genauigkeit hätte logarithmische Rechnung gefordert, die ausserordentlich viel zeitraubender gewesen wäre. Doch wurden manchmal, z. B. bei der Berechnung von α' und α'' die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit Vortheil benutzt. Die Rechnungen wurden, ausser bei den grundlegenden, vielfach wieder benutzten Tabellen, meist nur einmal ausgeführt und gröbere Fehler vermittelst der nothwendigen Stetigkeit der Kurven entdeckt, durch welche die Ergebnisse stets dargestellt wurden.

Ueber die einzelnen Reihen der Tabelle sei zunächst bemerkt:

Die Einfallswinkel ε wurden von 0 bis 60° in Zwischenräumen von 10°, zwischen 60 und 80 in solchen von 5°, und dann noch 83, 85, 87, 89, 90° angenommen, weil in der Nähe von 90° die Helligkeiten grösser sind und rascher wechseln, als bei kleinen ε. Aus ε wurde β nach Formel (4) berechnet; daraus $\varepsilon - \beta$ und $\varepsilon + \beta$, und dann α' und α'' nach (5) und (6), ferner $1-\alpha'$, $1-\alpha''$, und Potenzen dieser Grössen. Sodann ergaben sich φ_1

Ta-

Die Helligkeiten für die verschiedenen von

ε	β	$\varepsilon-\beta$	$\varepsilon+\beta$	α' 0,	$1-\alpha'$ 0,	$(1-\alpha')^2$ 0,	α'^2 0,	α'^3 0,	φ_1	l'_1 0,	c' 0,	$2\frac{d\beta}{d\varepsilon}$	φ_2	$\frac{d\varphi_2}{d\varepsilon}$	l'_2	$180^0-2\beta$	φ_3
0^0	0^0	0^0	0^0	0204	980	960	0004	000	180^0	003	480 $\times\varepsilon$	1,500	0^0	0,500	1,918	180^0	180^0
10	$7^0.29'$	$2^0.31'$	$17^0.29'$	0212	979	958	0005	000	160	003	0818	1,490	$5^0.02'$	0,510	1,830	$165^0.02'$	$170^0.04'$
20	14.51	5.09	34.51	0248	975	952	0006	000	140	003	153	1,458	10.18	0,542	1,580	150.18	160.36
30	22.02	7.58	52.02	0306	969	939	0009	000	120	004	203	1,404	15.56	0,596	1,240	135.56	151.52
40	28.50	11.10	68.50	0430	957	916	0018	000	100	005	222	1,314	22.20	0,686	0,855	122.20	144.40
50	35.06	14.54	85.06	0664	934	872	004	000	80	008	214	1,178	29.48	0,822	0,525	109.48	139.36
60	40.30	19.30	100.30	1150	885	783	013	001	60	014	170	0,984	39.00	1,016	0,267	99.00	138.00
65	42.54	22.06	107.54	1563	844	712	024	003	50	020	137	0,864	44.12	1,136	0,173	94.12	138.24
70	44.50	25.10	114.50	220	780	608	048	005	40	027	0978	0,724	50.20	1,276	0,086	90.20	140.40
75	46.25	28.35	121.25	312	688	473	097	031	30	036	0592	0,564	57.10	1,436	0,049	86.50	144.20
80	47.37	32.23	127.37	456	544	296	208	095	20	057	0253	0,386	64.46	1,614	0,017	84.46	149.32
83	48.06	34.54	131.06	576	424	180	332	191	14	072	0109	0,274	69.48	1,726	0,007	83.48	153.36
85	48.20	36.39	133.21	671	329	108	450	302	10	084	0047	0,196	73.20	1,804	0.003	83.20	156.40
87	48.30	38.30	135.30	790	210	044	642	493	6	099	0011	0,118	77.00	1,882	0,001	83.00	160.00
89	48.34	40.26	137.34	924	076	006	854	789	2	115	0001	0,040	80.52	1,960	0,000	82.52	163.44
90	48.35	41.25	138.35	1,00	000	000	1,000	1,00	0	125	000	0,000	82.50	2,000	0,000	82.50	165.40
$53^0 08'$	36.52	16.16	90.00	0778	922	850	006	000	73.44	010	203						

nach (1), φ_2 nach (9), dann $180-2\beta$, und φ_3, φ_4, φ_5 staffelweise auseinander nach (9), indem stets $180-2\beta$ zu dem vorhergehenden φ_i zugezählt wurde, auch über 180 und 360^0 hinaus; in die Tabelle ist φ_i nur bis 180^0 als kürzester Abstand des P_i von S eingetragen. Ferner erhielt man $2d\beta:d\varepsilon$ aus der auf (10) folgenden Gleichung, $d\varphi_2:d\varepsilon$ und $d\varphi_3:d\varepsilon$, ... staffelweise nach (10) und (11), indem man immer $2d\beta:d\varepsilon$ von dem vorhergehenden $d\varphi_i$ abzählte, wodurch auch negative Werthe entstehen; in der Berechnung von l_i hat das Vorzeichen von $d\varphi_i$ keine Bedeutung. Sodann wurden c', c'' nach (12'), (12'') berechnet, und endlich l'_1, l'_2, ... l''_1, l''_2, ... nach (8), (12'), (12'').

Bei der Ermittelung von α' und α'' ist zu beachten, dass ihre Werthe nach dem Ausdrucke (8) für $\varepsilon = 0$ unbestimmt werden. Man erhält aber den bestimmten Werth, wenn man die Sinus und Tangenten der unendlich kleinen Winkel durch die Bogen ersetzt. Es ist dann nach Gleichung (4)

$$\varepsilon = n\beta = \frac{4}{3}\beta,$$

belle 2.

einem Wassertropfen erzeugten Lichtbüschel.

$\frac{d\varphi_3}{d\varepsilon}$	l'_3	φ_4	$\frac{d\varphi_4}{d\varepsilon}$	l'_4	φ_5	$\frac{d\varphi_5}{d\varepsilon}$	l'_5	α''	$1-\alpha''$	$(1-\alpha'')^2$	α''^2	α''^3	l''_1	c''	l''_2	l''_3	l''_4	l''_5
				0,			0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,	0.	0.
$\bar{1}$,000	0,010	0°	$\bar{2}$,500	000	180°	$\bar{4}$,000	000	0204	980	960	0004	000	003	000	1,918	010	000	000
$\bar{0}$,984	0,010	24°54′	$\bar{2}$,476	000	140°.08′	$\bar{3}$,97	000	0195	981	961	0003	000	002	082	1,837	009	000	000
$\bar{0}$,916	0,012	49.06	$\bar{2}$,374	000	101.12	$\bar{3}$,83	000	0156	984	968	0002	000	002	156	1,610	008	000	000
$\bar{0}$,808	0,016	72.12	$\bar{2}$,212	000	63.44	$\bar{3}$,61	000	0120	988	976	0001	000	001	211	1,295	007	000	000
$\bar{0}$,628	0,026	93.00	$\bar{1}$,942	000	29.20	$\bar{3}$,26	000	0058	994	988	0000	000	001	243	0,934	004	000	000
$\bar{0}$,356	0,061	110.36	$\bar{1}$,534	001	0.48	$\bar{2}$,71	000	0005	999	999	0000	000	000	245	0,599	001	000	000
0,032	1,000	123.00	$\bar{0}$,952	003	24.00	$\bar{1}$,94	000	0043	996	992	0000	000	001	214	0,335	043	000	000
0,272	0,119	127.24	$\bar{0}$,592	007	33.12	$\bar{1}$,46	000	0171	983	966	0003	000	002	185	0,234	018	000	000
0,552	0,061	129.00	$\bar{0}$,172	200	38.40	$\bar{0}$,896	001	0474	953	908	0022	0001	006	146	0,128	015	014	000
0,872	0,036	128.30	0,308	024	41.20	$\bar{0}$,256	011	111	889	790	0123	0014	014	100	0,083	022	005	001
1,228	0,019	125.42	0,842	008	40.56	0,456	008	240	760	578	0576	0138	030	049	0,034	018	004	002
1,452	0,010	122.36	1,178	004	38.48	0,904	004	371	629	396	1376	0511	046	024	0,015	014	003	002
1,608	0,005	121.00	1,412	002	36.40	1,216	002	493	507	257	2430	1198	062	011	0,006	009	002	002
1,764	0,002	117.00	1,646	001	34.00	1,528	001	656	344	118	4303	2823	082	003	0,002	003	001	001
1,920	0,000	113.24	1,880	000	30.32	1,84	000	868	132	017	7534	6540	108	000	0,000	000	000	000
2,000	0,000	111.30	2,000	000	28.40	2,00	000	1,00 000	000	000	1,00	1,00	125 000	000	0,000	000	000	000

$$\varepsilon - \beta = \tfrac{1}{2}\beta(n-1), \qquad (\varepsilon + \beta) = \tfrac{1}{2}\beta(n+1),$$

$$\alpha' = \alpha'' = \left(\frac{\varepsilon-\beta}{\varepsilon+\beta}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 0{,}0204.$$

Ebenso erscheinen l'_i und l''_i für $\varepsilon = 0$ unbestimmt, weil c' und $\varphi_i = 0$ werden. Die bestimmten Werthe erhält man, wenn man ε unendlich klein setzt; dann wird nach (12′) $c' = \frac{1}{4}.2\varepsilon.(1-\alpha')^2 = 0{,}480.\varepsilon$, und nach (9) $\varphi_2 = 2(\varepsilon - \beta) = 2(\varepsilon - \varepsilon : n) = \frac{1}{2}\varepsilon$, daher nach (12′) $l'_2 = 0{,}480\,\varepsilon\,(2:\varepsilon)\,(1:0{,}5)$ $= 1{,}92$ oder genauer 1,918. Entsprechend erhält man l'_3 ...

Im einzelnen sind die Ergebnisse für die Helligkeit die folgenden.

18. Das durch Zurückwerfung entstehende Lichtbüschel l_1. Dieses durch φ_1, l'_1, l''_1 bezeichnete Büschel wird über den ganzen Himmel zerstreut, oder, was dasselbe sagt, lässt für einen feststehenden Beobachter den ganzen Himmel hell erscheinen, indem sich für ε von 0 bis 90° der

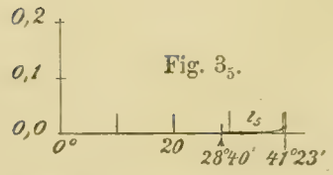


Fig. 3_5.

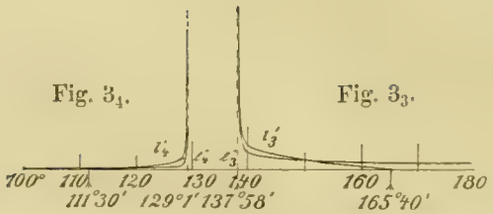


Fig. 3_4. Fig. 3_3.

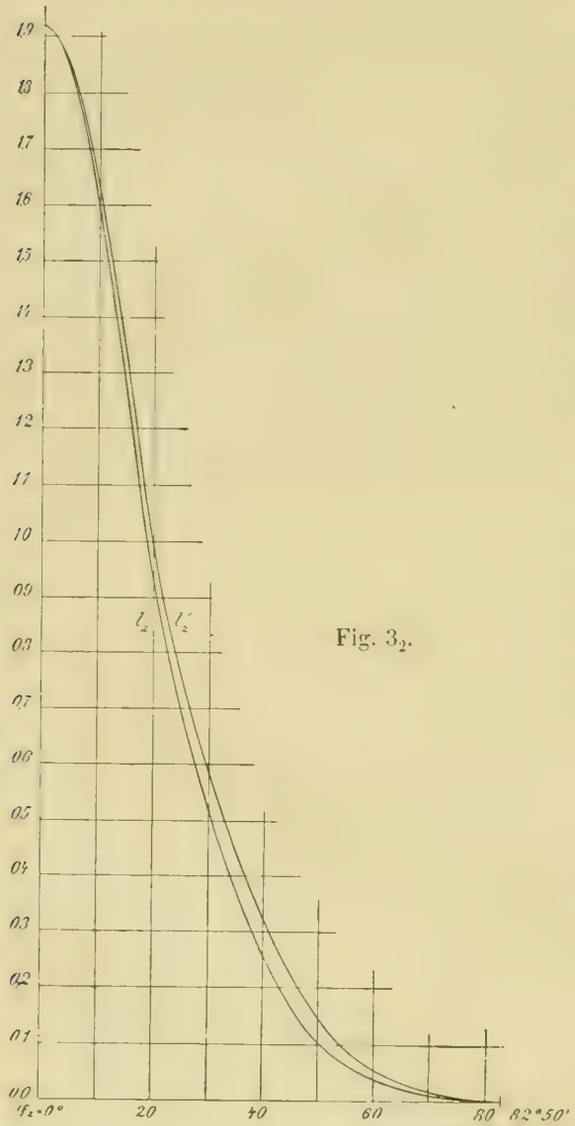


Fig. 3_2.

Fig. 3_1.

Winkel φ_1 von 180 bis 0° ändert. Am grössten ist die Helligkeit für $\varphi_1 = 0$, also unmittelbar neben der Sonne, indem hier $i'_1 = i''_1 = 0{,}125$ wird; auch für $\varphi_1 = 180°$, oder im Gegenpunkte der Sonne, sind beide Werthe gleich, es ist hier $i' = i''_1 = 0{,}003$. Zwischen beiden Stellen verhält sich aber das in der Einfallsebene polarisirte Licht i'_1 und das senkrecht zu ihr polarisirte i''_1 verschieden. In Fig. 3_1 stellt die Kurve i'_1 den Verlauf dar, wobei φ_1 als Abscissen, i'_1 als Ordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgetragen sind. i'_1 nimmt nun von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_1 = 180°$ beständig ab, und zwar anfangs rasch, indem es schon bei etwa $\varphi_1 = 18\frac{1}{2}°$ die Hälfte (0,0625) des grössten Werthes erreicht. Anders verhält sich i''_1, indem sein Werth mit α'' Null wird, wenn $\operatorname{tg}(\varepsilon + \beta) = \infty$, daher $\varepsilon + \beta = 90°$ wird. Daraus folgt $\cos\varepsilon = \sin\beta = \frac{1}{n}\sin\varepsilon$, $\operatorname{tg}\varepsilon = n = \frac{4}{3}$, $\varepsilon = 53°08'$, $\varphi_1 = 73°44'$, wobei ε der Fig. 3_1.

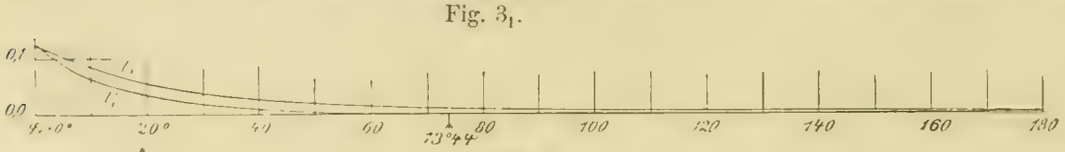


Fig. 3.

sog. Polarisationswinkel ist. Die Summe $\lambda_1 = \lambda'_1 + \lambda''_1$ besitzt daher nicht bei $\varphi_1 = 180^0$ ihren kleinsten Werth; sie ist hier $\lambda_1 = 0{,}006$, während sie in der Nähe von $\varphi_1 = 120^0$ ihren kleinsten Werth $= 0{,}005$ durchläuft.

19. Das durch zweimalige Brechung und ohne Zurückwerfung entstehende Lichtbüschel λ_2. Es ist das kräftigste von allen und erstreckt sich nicht über den ganzen Himmel, sondern nur von der Sonne ($\varphi_2 = 0^0$) bis zu einem Winkelabstande $\varphi_2 = 82^0\,50'$ von der Sonne (s. Fig. 3_2). Es ist neben der Beugung die Hauptursache der grossen Helligkeit des Himmels neben der Sonne. Beide Lichtbüschel λ'_2 und λ''_2 verlaufen zwischen denselben Grenzwerthen $\lambda'_2 = \lambda''_2 = 1{,}918$ für $\varphi_2 = 0$, und $\lambda'_2 = \lambda''_2 = 0$ für $\varphi_2 = 82^0\,50'$. Im übrigen sind die Werthe von λ'_2 etwas kleiner, als die von λ''_2. Die Kurven, welche sie darstellen, berühren die Abscissenaxe im Grenzpunkte, so dass nicht eine schroffe Grenze einer helleren Zone entsteht. Fig. 3_2.

20. Das durch zweimalige Brechung und einmalige Zurückwerfung entstehende Lichtbüschel λ_3 **und die Ermittelung der Lage der Regenbogen.** Dieses Lichtbüschel (Fig. 3_3) beginnt bei $\varphi_3 = 180^0$, wofür $\lambda'_3 = \lambda''_3 = 0{,}010$ ist, erstreckt sich mit zunehmender Stärke bis zu $\varphi_3 = 137^0\,58'$, welcher Winkel kleinster Abweichung durch Setzen von $d\varphi_3 : d\varepsilon = 0$ alsbald abgeleitet werden soll, nimmt hier nach Formel (12') die Stärke $\lambda' = \lambda'' = \infty$ an, kehrt dann um und läuft bis zu $\varphi_3 = 165^0\,40'$ zurück, wo es mit $\lambda'_3 = \lambda''_3 = 0$ sein Ende findet, indem die Abscissenaxe von der Kurve berührt wird (in der Figur ist der erste Ast der Kurve für die Werthe λ'_3, der zweite für die λ''_3 verzeichnet). Jene Grenze grösster Helligkeit ist bei grossen Wassertropfen durch den Regenbogen bezeichnet, dessen mittlerer Abstand von dem Gegenpunkte der Sonne $180^0 - 137^0\,58' = 42^0\,02'$ beträgt. Die beiden benachbarten austretenden Strahlen laufen hier wegen $d\varphi_3 : d\varepsilon = 0$ parallel und bilden den bei der Erklärung des Regenbogens „wirksam“ genannten Strahl. Fig. 3_3.

Man erhält allgemein, d. i. auch für den zweiten und die noch folgenden, freilich wegen ihrer geringen Stärke nicht mehr sichtbaren Regenbogen den zugehörigen Winkel φ_i, wenn man den Ausdruck (11) (S. 25) von $d\varphi_i : d\varepsilon = 0$ setzt. Dann ist

$$\frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} = 2\left[1 - \frac{d\beta}{d\varepsilon}(i-1)\right] = 0;$$

und da nach Gleichung (4)

$$\frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon} = \frac{1}{n}, \quad \frac{d\beta}{d\varepsilon} = \frac{1}{n}\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta},$$

so ist nach der vorhergehenden Gleichung

$$1 - \frac{i-1}{n}\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta} = 0,$$

$$\cos^2\beta = \frac{(i-1)^2}{n^2}\cos^2\varepsilon, \quad \sin^2\beta = \frac{\sin^2\varepsilon}{n^2} = \frac{1-\cos^2\varepsilon}{n^2}.$$

Durch die Addition dieser beiden Gleichungen entsteht

$$1 = \frac{1}{n^2}\left[(i-1)^2\cos^2\varepsilon + 1 - \cos^2\varepsilon\right],$$

und wenn der hierdurch bestimmte Werth von ε mit ε_i bezeichnet wird, so ist

$$\cos\varepsilon_i = \sqrt{\frac{n^2-1}{i^2-2i}}. \tag{13}$$

Da $n = 4:3$, so ergiebt sich für $i = 3$, $\cos\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{7:9}{3}} = 0{,}5092$, $\varepsilon_3 = 59^0\,23'$, woraus nach Gleichung (9) $\varphi_3 = 137^0\,58'$.

Die Formel (12') liefert für den durch dieses φ_3 bestimmten Parallelkreis des Himmels die Helligkeit $l'_3 = \infty$, während doch überall in der Natur nur eine endliche Helligkeit auftreten kann. Es rührt dies daher, dass der angenommene Sonnenpunkt selbst eine unendlich grosse Helligkeit besitzen müsste, weil er eine endliche Lichtmenge aus einer der Null gleichen Fläche ausstrahlen würde; und sodann daher, dass dieser Sonnenpunkt eine Lichtmenge, welche unendlich klein von der ersten Ordnung ist, auf einen Ring bei jenem Parallelkreise ausbreiten würde, dessen Breite unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Indem aber die Sonne als Scheibe von 32' Durchmesser erscheint, wird aus jenem unendlich schmalen Kreisstreif ein Streif von 32' Breite und von endlicher Helligkeit. Dazu kommt noch, dass das Sonnenlicht durch die Brechung im Tropfen in farbige Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zerlegt wird, sodass der farbige Regenbogen entsteht, dessen Breite für einen Sonnenpunkt $1^0\,50'$, für die Sonnenscheibe aber $2^0\,22'$ beträgt. Dazu kommt endlich, dass ein Theil des Sonnenlichtes zur Erzeugung der sog. überzähligen Bogen verwendet wird. Wir werden alsbald auf diese Erscheinung näher eingehen.

21. Die durch zweimalige Brechung und zwei- oder mehrmalige Zurückwerfung entstehenden Lichtbüschel. Das Lichtbüschel l_4 (Fig. 3_4) beginnt bei $\varphi_4 = 0^0$, wofür die Stärke l'_4 und l''_4 so klein wird, dass sie in der dritten Decimale noch nicht bemerkbar ist, erstreckt sich bei zunehmender Stärke bis zu $\varphi_4 = 129^0\,1'$, wo die Stärke unendlich wird, und läuft bis $\varphi_4 = 111^0\,30'$ zurück, wo es mit $l'_4 = l''_4 = 0$ endet (die Figur zeigt wieder die Werthe von l'_4 auf dem ersten, die l''_4 auf dem zweiten Ast der Kurve). Die Lichtstärke dieses Büschels ist sehr gering und nimmt nur in der Nähe von $\varphi_4 = 129^0\,1'$ (in einem Abstande von $50'\,59'$ vom Gegenpunkte der Sonne), wo der zweite und schwächere Regenbogen auftritt, eine merkliche Stärke an, z. B. für $\varphi_4 = 125^0\,42'$ von $l'_4 + l''_4 = 0{,}008 + 0{,}004 + 0{,}005 + 0{,}000 = 0{,}017$. Fig. 3_4.

Das sehr lichtschwache Büschel l_5 (Fig. 3_5) erstreckt sich von $\varphi_5 = 180^0$ über den ganzen Himmel, durchschreitet die Sonne bei $\varphi_5 = 0$, geht dann bis $\varphi_5 = 41^0\,23'$, wo der dritte Regenbogen gebildet wird, der aber wegen seiner eigenen Schwäche und wegen der grossen Helligkeit des Himmels an dieser Stelle nicht mehr sichtbar ist, läuft dann wieder bis $\varphi_5 = 28^0\,40'$ zurück, wo er verschwindet. Fig. 3_5.

Die folgenden derartigen Lichtbüschel sind wegen ihrer Schwäche unmerklich.

II. Theorie des Regenbogens und der überzähligen Bogen.[1])

22. Die früheren Theorien und das hier eingeschlagene Verfahren. Da der Regenbogen durch Wassertropfen und da die Helligkeit des klaren Himmels zum grössten Theil durch Wassertröpfchen hervorgebracht wird, solche Tröpfchen also jederzeit in der Luft schweben, so sollte man glauben, dass dieselben auch zur Zeit des klaren Himmels den Regenbogen hervorbringen müssten, wenn auch in geringerer Stärke, wie beim Regen; und daraus, dass dies nicht der Fall ist, hat man einen Einwand erhoben gegen die gewöhnliche Theorie des Regenbogens, die in dem vorhin Gegebenen enthalten ist.

[1]) Hier wird die Interferenz der gebrochenen Strahlen berücksichtigt.

Diese Schwierigkeit wird aber durch eine genauere Theorie des Regenbogens beseitigt. Dieselbe erklärt auch erst die Thatsache, dass häufig nicht nur ein einfacher Regenbogen am Himmel erscheint, sondern neben ihm noch eine Anzahl sogenannter überzähliger Bogen, dass alle diese, der Haupt- und die überzähligen Bogen, von dem nach der oben gegebenen Theorie durch den wirksamen Strahl erzeugten sogenannten geometrischen Regenbogen abweichen, und zwar um so mehr, je kleiner die Regentropfen sind. Bei sehr kleinen Tropfen von wechselnder Grösse vermischen sich aber die Farben der verschiedenen Bogen und heben sich dadurch gegenseitig auf.

Eine solche genauere Theorie hat Airy[1]) gegeben, indem er die Gestalt der Oberfläche einer Lichtquelle an derjenigen Stelle, welche den Hauptantheil an der Erzeugung des Regenbogens hat, untersuchte, und die Lichtstärke ermittelte, welche diese Wellenoberfläche für die verschiedenen Richtungen der Lichtfortpflänzung hervorbringt. Dabei hat er aber die Gestalt der Wellenoberfläche nur an ihrer wirksamsten Stelle verfolgt, die Lichtstärke entlang der ganzen Fläche als gleichförmig angenommen und den Wassertropfen durch einen Cylinder ersetzt gedacht.

Eine wesentlich vollkommenere Theorie hat Just[2]) gegeben; die beiden ersten Mängel hat er beseitigt; er hat statt jener Wellenfläche die Weglängen der verschiedenen Lichtstrahlen verfolgt und mittelst Reihenentwicklung sehr bemerkenswerthe Ergebnisse erhalten. Doch hat auch er nur ein cylindrisches Element der Kugel beachtet.

Da nun diese Vorgänge für die Bestimmung der Himmelshelligkeit von Belang sind, so habe ich im Folgenden eine Theorie derselben entwickelt. Diese ist analytisch-geometrischer Natur, stützt sich auf die Betrachtung der Wellenoberfläche in ihrem ganzen Verlaufe, berücksichtigt auf ihr die verschiedenen Lichtstärken und verfolgt sowohl die cylindrische Form der lichtbrechenden Körper, wie bei Wasserstrahlen, mit denen Versuche

[1]) Airy, On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic (Trans. of the Cambridge Philos. Soc., VI, 1838, p. 379; auch mitgetheilt in Poggend. Ann. d. Phys. u. Chem., Ergänz.-Bd., 1842, S. 232).

[2]) Just, de arcubus supernumerariis, qui in iride observantur. Doktordissertation. Königsberg, 1862.

angestellt wurden, wie auch die Kugelform der wirkenden Wassertropfen. Dabei kann man aber auch nicht durch gewöhnliche Integration, sondern nur durch mechanische Quadratur zum Ziel gelangen.

23. Die Brennlinie und die Linie der Lichtwelle. Schneidet (Fig. 4) eine durch den Sonnenmittelpunkt S und durch den Mittelpunkt M des Wassertropfens gelegte Ebene dessen Oberfläche in dem Kreise ABC, ist ferner MA der nach S gerichtete Halbmesser desselben, SB ein jenen Kreis in B unter dem Einfallswinkel ε treffender Lichtstrahl, so macht dieser bei einer Brechung, einer Zurückwerfung und einer abermaligen Brechung den Weg $BCDD'$, wobei er jenen Kreis in C und D trifft. Ist β der Brechungswinkel, so gehören zu den Punkten B, C, D die von A aus in demselben Sinne AB gezählten Mittelpunktswinkel $AMB = \varepsilon$, $AMC = \varepsilon + 180^0 - 2\beta$, $AMD = \varkappa = \varepsilon + 2\,(180^0 - 2\beta)$. Will man jetzt den (unter dem Winkel ε) austretenden Strahl DD' durch seine beiden Schnittpunkte mit dem Kreise festlegen, so verlängere man ihn rückwärts bis zum Kreispunkte E, und erhält dann $\sphericalangle AME = \nu = \varkappa - (180^0 - 2\varepsilon)$, so dass wir für $\varkappa$, ν und sodann für die Ablenkung φ erhalten

Fig. 4.

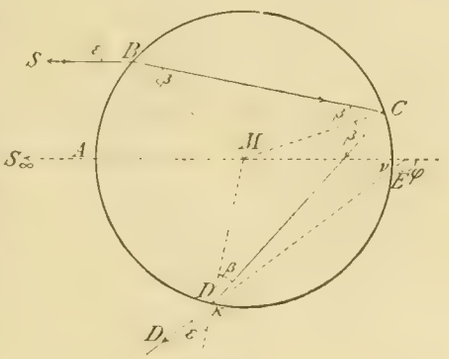


Fig. 4.

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 360^0 + \varepsilon - 4\beta, \\ \nu &= 180^0 + 3\varepsilon - 4\beta, \\ \varphi &= \varepsilon + \varkappa - 180^0 = 180^0 + 2\varepsilon - 4\beta. \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

Mittelst dieser Formeln sind für $\varepsilon = 0,\ 10,\ 20,\ \ldots\ 90^0$ die Werthe von $\varkappa$ und ν berechnet und in der Tab. 3 eingetragen. Sodann sind in Fig. 5 auf dem Umfang des grössten Kreises des Tropfens die Bogen $\varkappa$ und ν von A an aufgetragen und an ihren Endpunkten die zugehörigen Werthe von ε beigeschrieben. Die Verbindungslinien zweier Punkte mit derselben Zahl für ε geben die Linien der austretenden Lichtstrahlen. Dabei ist statt $\varepsilon = 60^0$, der Werth $\varepsilon = 59^0\,23'$ benutzt, weil bei diesem Einfallswinkel nach der oben angegebenen geometrischen Theorie der Regenbogen entsteht, den man daher den geometrischen Regenbogen nennt.

Tab. 3.

Fig. 5.

Tabelle 3.

Die Elemente für die Wellenlinie.

Punkt	ε	β	$\varkappa$	ν	φ	$\triangle\varphi^0$	$\frac{\triangle s}{r}$	$\frac{r'}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{r}$
L	0°	0°	360°	180°	180°				+1,014	—0,3380
K	10	7° 29′	340° 04′	180° 04′	170.04	9°56′	0,213	1,23	+0,843	—0,2094
I	20	14.51	320.36	180.36	160.36	9.28	0,211	1,27	+0,655	—0,1123
F	30	22.02	301.52	181.52	151.52	8.44	0,209	1,36	+0,457	—0,04700
E	40	28.50	284.40	184.40	144.40	7.12	0,188	1,50	+0,272	—0,01361
D	50	35.06	269.36	189.36	139.36	5.04	0,166	1,88	+0,107	—0,00152
C	59.23	40.12	258.35	197.21	137.58	1.38	0,107	3,75	0	0
	67	43.40	252.20	206.20	139.20	—1.22	0,0473	—1,98	—0,0473	+0,00057
	70	44.49	250.44	210.44	140.44	—1.24	0,0090	—0,37	—0,0564	+0,00089
G	72.30	45.40	249.50	214.50	142.20	—1.36	0,0007	—0,025	—0,0570	+0,00094
	75	46.25	249.20	219.20	144.20	—2.00	—0,0020	0,057	—0,0550	+0,00077
	78	47.12	249.12	225.12	147.12	—2.52	—0,0068	0,136	—0,0482	—0,00023
	80	47.28	249.28	229.28	149.28	—2.16	—0,0069	0,175	—0,0414	—0,00141
	86	48.26	252.16	244.16	158.16	—8.48	—0,0248	0,162	—0,0175	—0,01008
H	90	48.36	255.36	255.36	165.36	—7.20	—0,0090	0,070	—0,0092	—0,01344

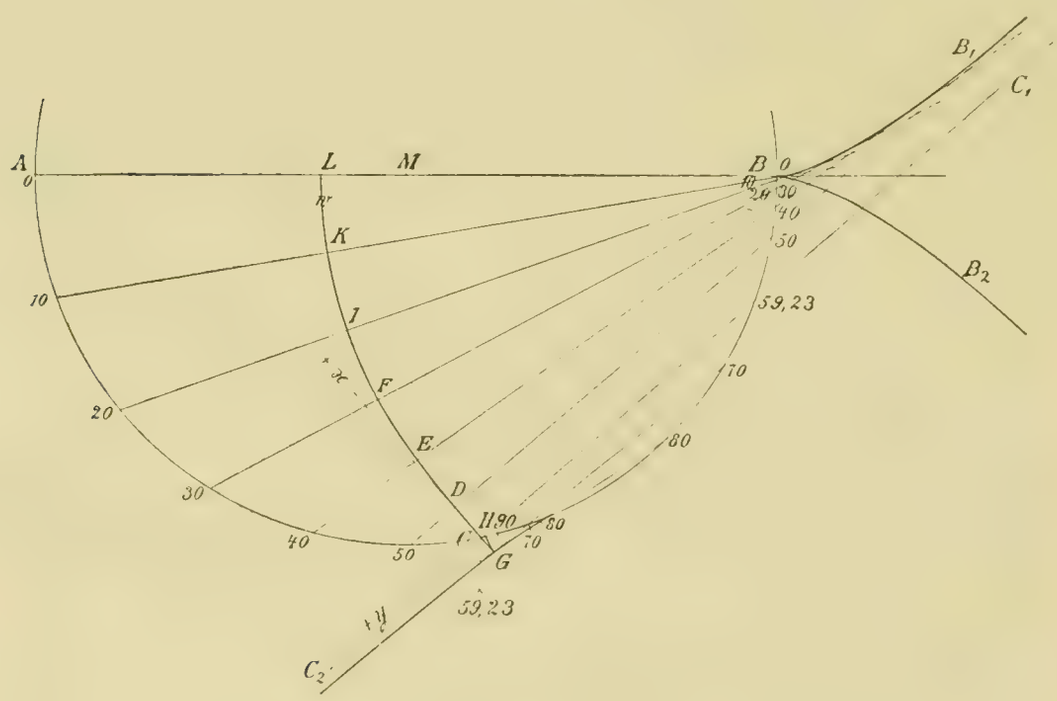


Fig. 5.

Die von den Linien aller austretenden Strahlen eingehüllte Kurve ist die Brennlinie. Eine in der Nähe des Tropfens gezeichnete Kurve, welche alle Lichtstrahlen senkrecht schneidet, also eine Evolvente der Brennlinie, ist die Linie einer Lichtwelle, eine Wellenlinie. Dieselbe wurde durch den Austrittspunkt C des dem Regenbogen zukommenden Lichtstrahles ($\varepsilon = 59^0\,23'$) gelegt.

Es ergiebt sich nun, dass der nach der Sonne laufende Durchmesser AMB des Tropfens, d. h. der Lichtstrahlendurchmesser, in seinem der Sonne gegenüberstehenden Endpunkte B eine Spitze eines Astes B_2BB_1 der Brennlinie bildet, welche dem $\varepsilon = 0^0$ entspricht. Der zu $\varepsilon = 59^0\,23'$ gehörige austretende Strahl C_1CC_2 ist eine Asymptote der Brennlinie, indem der benachbarte Strahl mit ihm parallel ist, und der Schnittpunkt beider einen unendlich fernen Punkt der Kurve bildet. Ein zweiter Ast der Brennlinie schliesst sich derselben Asymptote an, dringt nahezu bei $\varkappa = 80^0$ etwas ins Innere des Kreises ein, bildet hier eine zweite Spitze, und schliesst sich dann bei $\varepsilon = 90^0$ berührend an den Kreis an, wofür $\varkappa = \nu = 255^0\,40'$ wird, um hier physisch zu endigen.

Die Wellenlinie wurde zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Lichtstrahlen als Kreisbogen aus dem Schnittpunkte jener Strahlen gezeichnet, so die Bogen CD, DE, EF. Sie hat bei C (für $\varepsilon = 59^0\,23'$), wo ihr Krümmungshalbmesser unendlich wird, einen Wendepunkt, sodann bei G, wo sie auf die Brennlinie, ihre Evolute, stösst, eine Spitze, und endet physisch bei H auf der Tangente des Kreises in dem Punkte, der $\varepsilon = 90^0$ (wofür $\varkappa = \nu$ wird) entspricht, in der Richtung senkrecht zu dieser Tangente.[1])

24. Festlegung der Wellenlinie durch Koordinaten. Es ist für das Folgende nothwendig, die Gestalt der Wellenlinie zahlenmässig festzustellen, und es geschieht dies zweckmässig in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung der Wendepunkt C, dessen positive x-Achse CX die ins Innere des Tropfens gerichtete Tangente der Wellenlinie, und dessen positive y-Achse die in die Richtung der Lichtfortpflanzung gekehrte Normale CC_2 der Wellenlinie bildet. Es ist dies

[1]) Airy hat in der angeführten Abhandlung die Wellenlinie durch eine sich im Wendepunkte C anschmiegende höhere Parabel von der Gleichung $x^3 = -3a^2y$ ersetzt.

auch die Richtung des sogenannten wirksamen Strahles, gerichtet nach dem geometrischen Regenbogen.

Wir denken uns nun in der oben angegebenen Weise die Wellenlinie aus Kreisbogen zusammengesetzt. Die Längen $\triangle s$ dieser Bogen zwischen zwei aufeinanderfolgenden austretenden Strahlen haben wir meist aus einer Zeichnung abgemessen, in welcher wir den Radius des Tropfens $r = 100$ mm angenommen hatten, bei geringer Grösse von $\triangle s$ sie auch aus $d\varkappa$, $d\varphi$, ε und dem aus der Zeichnung entnommenen Abstande von $\triangle s$ und $\triangle \varepsilon$[1]) berechnet. Die Werthe sind mit den anderen zu benutzenden Werthen in der Tabelle 3 eingetragen. Es ist z. B. zwischen den austretenden Strahlen für $\varepsilon = 59^0\ 23'$ und $\varepsilon = 50^0$, $\triangle s = CD = 0{,}107r$. Andrerseits ist der Winkel jener Strahlen $\triangle \varphi^0$ als Unterschied der beiden φ berechnet, woraus der Bogen

$$\triangle \varphi = \triangle \varphi^0 (\pi : 180) = 0{,}01745\ \triangle \varphi^0$$

folgt. Der Halbmesser des Bogens ergiebt sich dann als

$$r' = \triangle s : \triangle \varphi.$$

In unserem Beispiele ist $\triangle \varphi^0 = 1^0\,38' = 1{,}633^0$, daher $\triangle \varphi = 0{,}0285$, und $r' = 0{,}107r : 0{,}0285 = 3{,}75r$.

Nun ermitteln wir zuerst die Koordinaten der Grenzpunkte D, E, ... der einzelnen Kreisbogen. Für den im Ursprungspunkte C der Koordinaten beginnenden Bogen $CD = \triangle s$ ist der Abstand des zweiten Endpunktes D von der Tangente im ersten, d. i. von der x-Achse, gleich y, und zwar hier negativ; und da $\triangle \varphi$ klein, so gilt $y = -\triangle s^2 : 2r'$ oder auch $y = -\triangle s \sin \frac{1}{2} \triangle \varphi$.

Da sich nun für CD ergab: $\triangle s = 0{,}107r$, $\triangle \varphi^0 = 1^0\,38'$, $r' = 3{,}75r$, so folgt $y = -0{,}00152r$. In diesem Falle ist auch $x = \triangle s$; daher sind die Koordinaten von D: $x = 0{,}107r$; $y = -0{,}00152r$.

Für einen von C entfernteren Punkt, so den zweiten Endpunkt E des Bogens DE, ist die y-Koordinate zusammengesetzt aus der y-Koordinate von D, aus dem Abstande des E von der Bogentangente in D (welcher Ab-

[1]) Darunter ist wohl der auf der Wellennormale gemessene Abstand des Elementes $\triangle s$ von einem Schnittpunkt mit dem Kreise zu verstehen, an dem die Werthe von ε angeschrieben sind. Die Herausgeber.

stand als parallel zu y angesehen werden darf, so lange die Neigung der Wellenlinie gegen die x-Achse nicht zu gross wird) und aus dem Abstande des Fusspunktes von E auf dieser Tangente von der durch D mit der x-Axe gelegten Parallelen. Da nun für den Bogen DE das $\triangle s = 0{,}166r$, $\triangle \varphi^0 = 5^0 4'$, und der Winkel der Tangente in D mit $x = 1^0 38'$ ist, so ist

$$y = -r\,[0{,}00152 + 0{,}166\ \sin(\tfrac{1}{2}.\,5^0 4' + 1^0 38')] = -0{,}01361r.$$

Das $\triangle x$ von DE kann aber hier nicht mehr $= \triangle s$ gesetzt werden; es ist vielmehr $\triangle x = \triangle s\ \cos(\tfrac{1}{2}.\,5^0 4' + 1^0 38') = 0{,}166r.\ 0{,}9974 = 0{,}165r$, und $x = (0{,}107 + 0{,}165)\,r = 0{,}272r$.

Auf diese Art wurde für die in passenden Zwischenräumen angenommenen Werthe der Einfallswinkel ε, die zugehörigen Werthe der anderen im Vorhergehenden erklärten Winkel und Längen, insbesondere die Koordinaten einer Anzahl von Punkten der Wellenlinie berechnet und dann in Tab. 3 eingetragen.

Aus den so bestimmten Koordinaten der Wellenlinie in den Grenzpunkten der sie zusammensetzenden Kreisbogen wollen wir nun noch die y-Koordinaten einer grösseren Anzahl ihrer Punkte bestimmen, deren $\triangle x$ die für die folgenden Rechnungen passenden kleinen Werthe besitzen.

Bei dem ersten jener Kreisbogen, bei CD, sind die Koordinaten des ersten Endpunktes C gleich Null, die Koordinaten x_0, y_0 des zweiten Endpunktes D sind bestimmt durch

$$\frac{x_0}{r} = 0{,}107,\quad \frac{y_0}{r} = -0{,}00152.$$

Für die Koordinaten x, y eines anderen Punktes dieses Bogens CD gilt dann Fig. 5.

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x^2}{x_0^2}.$$

Wählt man nun als Intervalle der $x:r$ die Grösse 0,01, setzt also zuerst $x:r = 0{,}01$, so ergiebt sich hierfür

$$\frac{y}{r} = -0{,}00152\ \frac{0{,}01^2}{0{,}107^2} = -0{,}0000133.$$

Indem wir nachher die Wellenlänge des Lichtes in 16 gleiche Theile, also jeden Phasenquadranten in vier gleiche Theile theilen werden, haben wir die 16fachen Werthe der y nöthig, und erhalten so auch $16\,(y:r) = -0{,}00022$. Um aber bei den Koordinatenzahlen die vielen Nullen zu ver-

meiden, vervielfachen wir dieselben mit 100, und erhalten so als Intervall der $100\,x : r$ das 100fache des vorhin gewählten 0,01, d. i. die Einheit. Wir erhalten dann die zusammengehörigen Werthe

$$100x : r = \quad 1; \quad 2; \quad 3; \quad n,$$
$$16.\ 100y : r = -0{,}002; \ -4.\ 0{,}002; \ -9.\ 0{,}002; \ \ldots -n^2.\ 0{,}002.$$

Für den zweiten Bogen DE berechnet man in ähnlicher Weise die Abstände derjenigen Punkte von der Tangente des Anfangspunktes D, für welche die Grössen $100x : r$ ganze Zahlen sind, und zählt dann die zu demselben x gehörigen Abstände dieser Tangente von der x-Axe hinzu. Auf
Tab. 4. diese Weise haben wir die Tabelle 4 berechnet und dabei in dem Stück CF der Wellenlinie ($\varepsilon = 59^0\,23'$ bis $\varepsilon = 30^0$) die Intervalle der $100x : r$ als 1 angenommen, in den Stücken GC ($\varepsilon = 72^0\,30'$ bis $59^0\,23'$) und HG ($\varepsilon = 90^0$ bis $72^0\,30'$) kleiner als 1 angenommen. Auch wurde die Kurve über ihren Rückkehrpunkt G noch in ihrer Tangente nach aussen fortgesetzt, und zwar von $100x : r = -5{,}7$ bis zu $-5{,}9$, aus Gründen, die sich alsbald ergeben werden.

Aus der Wellenlinie $HGCF$ ergiebt sich die Wellenoberfläche des Wassertropfens als Umdrehungsfläche, wenn man sich die Wellenlinie um den Lichtstrahlen-Durchmesser AB des Tropfens drehen lässt. Da nun Messungen nicht an den überzähligen Regenbogen der Tropfen, wohl aber an cylindrischen Wasserstrahlen vorgenommen worden sind, deren Axen senkrecht auf der Verbindungslinie der Lichtquelle und des Auges standen, so wollen wir, um unsere Rechnungsergebnisse mit Beobachtungen vergleichen zu können, zuerst die etwas einfachere Theorie für solche Strahlen entwickeln.

Cylindrische Wasserstrahlen:
Der hellste Streifen und die überzähligen Streifen.

25. Die verhältnissmässige Lichtstärke an den verschiedenen Stellen der Wellenlinie. Allgemeine Formel. Die Fig. 4 ist hier als senkrechter Querschnitt anzusehen, dessen Ebene durch die Sonne und das Auge gehen soll, und zwar der Kreis ABC als solcher vom cylindrischen Wasserstrahle und die Wellenlinie $HGCF$ in Fig. 5 auch als Querschnitt der dann ebenfalls cylindrischen Wellenoberfläche.

Tabelle 4.

Koordinaten der Wellenlinie.

Von $\varepsilon = 90^0$ bis $\varepsilon = 72^0\,30'$

$100x:r$	$-1{,}0$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,4	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9		
$16.100y:r$	$-20{,}8$	17,7	14,7	11,8	8,9	6,5	4,7	3,1	1,9	1,3	0,4	$+0{,}1$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3	1,5	1,6	1,6		

Von $\varepsilon = 72^0\,30'$ bis $\varepsilon = 59^0\,23'$

$100x:r$	$-5{,}9$	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,8	4,5	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,0	
$16.100y:r$	$+1{,}6$	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1	0,9	0,8	0,7	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	0,0	

Von $\varepsilon = 59^0\,23'$ bis $\varepsilon = 30^0$

$100x:r$	$+0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$16.100y:r$	$-0{,}0$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,1	3,7	4,4	5,2	6,1	7,0	8,0	9,1	10,3	11,7	13,1	14,5
$100x:r$	$+24$	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	
$16.100y:r$	$-16{,}1$	17,8	19,5	21,3	23,2	25,0	27,2	29,6	32,0	34,5	37,0	39,5	42,2	45,0	48,0	51,0	54,1	57,3	60,6	64,0	67,5	71,1	74,8	

Wir haben nun zunächst die Lichtstärke an den verschiedenen Stellen der Wellenoberfläche, d. i. auch nur der Wellenlinie zu bestimmen, da diese Stücke entlang einer Er-

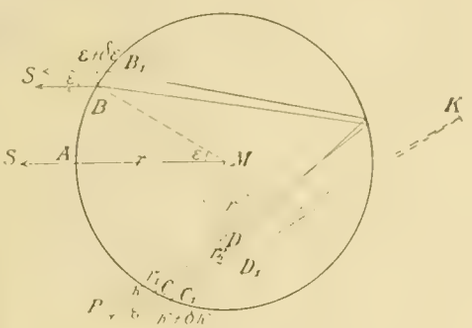


Fig. 6.

zeugenden des Cylinders unveränderlich sind.

Stellt wieder MA den der Lichtquelle S zugekehrten Halbmesser jenes senkrechten Kreisschnittes des Wasserstrahles vor, ist SB der unter dem Winkel ε eintretende, KCP der unter $\measuredangle\varepsilon$ austretende Strahl, wobei die Bogen AB und ABC zu den Mittelpunktswinkeln ε und $\varkappa$ gehören, ist ferner SB_1 der dem SB unendlich nahe benachbarte Strahl, der als KC_1 austritt, sodass $BB_1 = rd\varepsilon$, $CC_1 = rd\varkappa$, ist $DD_1 = ds$ das von den austretenden Strahlen eingeschlossene Stück der Wellenlinie und K der Krümmungsmittelpunkt von

ds, so ist die Lichtmenge, welche auf das über BB_1 stehende Element des Cylinders fällt, dem wir die Höhe 1 geben,

$$Lrd\varepsilon \cos \varepsilon.$$

Diese Lichtmenge wird durch zweimalige Brechung und einmalige Zurückwerfung geschwächt, und zwar die in der Einfallsebene polarisirte Hälfte des einfallenden Lichtes im Verhältniss von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}\alpha'(1-\alpha')^2$ (S. 26), die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}\alpha''(1-\alpha'')^2$, also die ganze Lichtmenge von 1 zu

$$\frac{1}{2}\left[\alpha'(1-\alpha')^2+\alpha''(1-\alpha'')^2\right]=\alpha(1-\alpha)^2. \qquad (15).$$

Die so geschwächte Lichtmenge L_1 wird auf dem über ds stehenden Elemente $ds \,.\, 1$ der cylindrischen Wellenfläche vereinigt, für welches $ds = DD_1 = CC_1 (r_2 : r_1) \cos \varepsilon$, wenn $KD = r_2$, $KC = r_1$, dessen Fläche sich daher ergiebt gleich

$$rdx \frac{r_2}{r_1} \cos \varepsilon.$$

Daraus folgt die Lichtstärke auf der Wellenoberfläche entlang der
Fig. 6. Erzeugenden von D (Fig. 6)

$$L_1 = \frac{Lrd\varepsilon \cos \varepsilon \times \alpha (1-\alpha)^2}{rdx (r_2 : r_1) \cos \varepsilon},$$

und die verhältnissmässige Lichtstärke

$$l = \frac{L_1}{L} = \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \alpha (1-\alpha)^2. \qquad (16).$$

26. Das Stück der Wellenlinie zwischen $\varepsilon = 0^0$ und $\varepsilon = 70^0$.

Um nach dieser Formel zu rechnen, wurden die Krümmungshalbmesser r_2 der Wellenlinie in bestimmten Punkten aus den in der Tabelle 3 eingetragenen mittleren Krümmungshalbmessern r' der einzelnen Bogenstücke durch Einschaltung bestimmt, indem man einen solchen mittleren Krümmungshalbmesser eines endlichen Bogens auch als Krümmungshalbmesser für die Mitte des Bogens annahm, wie es bei deren Kleinheit erlaubt ist. So ergab sich
Fig. 5. r_2 für D der Fig. 5, indem nach Tabelle 3 $CD = 0{,}107r$, das zugehörige $r' = 3{,}75r$, $DE = 0{,}166r$, das zugehörige $r' = 1{,}88r$ ist, aus der Gleichung

$$\frac{r_2}{r} = 3{,}75 + (1{,}88 - 3{,}75)\,\frac{\frac{1}{2}\,0{,}107}{\frac{1}{2}\,0{,}107 + \frac{1}{2}\,0{,}166} = 3{,}75 - 0{,}74 = 3{,}01.$$

Ferner ergab sich aus der Zeichnung der Fig. 5 das Stück vom Kreispunkt 50 bis D, welches dem CD der Fig. 6 entspricht, getheilt durch $r = MA$, oder Fig. 5. Fig. 6.

$$\frac{r_1 - r_2}{r} = 0{,}16, \quad \text{daher} \quad \frac{r_1}{r} = 3{,}17,$$

und endlich

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3{,}17}{3{,}01} = 1{,}053.$$

Sodann wurde $d\varkappa : d\varepsilon$ aus den Formeln (14) und (4) bestimmt. Es ergiebt sich nämlich durch Differentiation

$$d\varkappa = d\varepsilon - 4\,d\beta, \quad \frac{d\beta}{d\varepsilon} = \frac{1}{n}\,\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta},$$

daher

$$\frac{d\varkappa}{d\varepsilon} = 1 - \frac{4\,\cos\varepsilon}{n\,\cos\beta}.$$

Für D ist $\varepsilon = 50^0$, $\beta = 35^0 6'$ (Tab. 3), daher $d\varkappa : d\varepsilon = -1{,}356$. Tab. 3.

Endlich ergiebt sich nach den Formeln (15) und (8) S. 24 mit Hilfe der Tabelle 2 für $\varepsilon = 50^0$ das $\alpha\,(1-\alpha)^2 = 0{,}0292$. Daraus berechnet sich nach Formel (16) Tab. 2.

$$l = \frac{1}{1{,}356} \cdot 1{,}053 \cdot 0{,}0292 = 0{,}0227.$$

Das Vorzeichen von $d\varkappa : d\varepsilon$ hat auf die Helligkeit keinen Einfluss, bleibt also unbeachtet. So ergiebt sich für den von F etwas über C hinausreichenden Bogen der Wellenlinie, nämlich von $\varepsilon = 0^0$ bis $\varepsilon = 70^0$ die folgende Tabelle 5. Tab. 5.

27. Das Stück der Wellenlinie bei $72^0\,30'$, auf dem l nach der Formel einen ∞ grossen und einen unbestimmten Werth annimmt. In der Fortsetzung der Wellenlinie liefert die Formel für die Spitze G, wofür $\varepsilon = 72^0\,30'$ ist, die Lichtstärke ∞, indem hier der Krümmungshalbmesser der Kurve $r_2 = 0$ wird. Es ist dies auch leicht geometrisch einzusehen, indem dort die beiden Normalen der Wellenlinie, deren zugehörige ε um $d\varepsilon = 0^1$ (unendlich klein von der 1. Ordnung) verschieden sind, ein Stück 0^2 der Wellenlinie einschliessen. Denn dies Stück ist

Tabelle 5.

Verhältnissmässige Lichtstärke l entlang der Wellenlinie beim Wasserstrahle von dem Einfallswinkel $\varepsilon = 0^0$ bis $\varepsilon = 70^0$.

Punkt	ε	$100\frac{x}{r}$	$\frac{r_2}{r}$	$\frac{r_1 - r_2}{r}$	$\frac{r_1}{r}$	$\frac{r_1}{r_2}$	$\frac{dx}{d\varepsilon}$	$\alpha(1-\alpha)^2$	l
L	0^0	101,4	1,23	0,77	2,00	1,62	—2,000	0,0196	0,0159
K	10	84,3	1,24	0,74	1,98	1,60	—1,980	0,0195	0,0158
I	20	65,5	1,31	0,65	1,96	1,50	—1,920	0,0194	0,0151
F	30	45,7	1,45	0,51	1,96	1,35	—1,808	0,0202	0,0155
E	40	27,2	1,70	0,34	2,04	1,192	—1,628	0,0225	0,0165
D	50	10,7	3,01	0,16	3,17	1,053	—1,356	0,0292	0,0227
C	$59^0\,23'$	0,0	∞	0	∞	1,000	—1,000	0,0491	0,0491
	67	—4,73	—1,152	—0,097	—1,249	1,08	—0,620	0,0730	0,1272
	70	—5,64	—0,238	—0,125	—0,363	1,28	—0,448	0,0880	0,2510
	69	—5,54				1,224	—0,505	0,0830	0,2020

$= r_2 \,.\, d\varphi = r_2 \,.\, 0^1$, und der Krümmungshalbmesser r_2 der Wellenlinie ist in der Spitze G, mit der sie auf ihrer Evolute, der Brennlinie aufsitzt, $= 0^1$. Daher $r_2\, d\varphi = 0^1 \,.\, 0^1 = 0^2$. Daher ist die Lichtmenge, welche auf $d\varepsilon$ fällt, und daher 0^1 ist, auf einen Raum 0^2 der Wellenlinie vertheilt, wodurch $l = L_1 : L = 0^1 : 0^2 = \infty$ wird. Doch entspricht dies Ergebniss nicht der Wirklichkeit, ist vielmehr durch die falsche, aber doch im Allgemeinen brauchbare Annahme vom Sonnenpunkte verursacht.

Tab. 3. Andererseits zeigt die Tabelle 3, dass x nahe bei $249^0\,12'$ ($\varepsilon = 78^0$) ein Minimum besitzt, so dass hier $dx : d\varepsilon = 0$ wird. Da aber zugleich $r_1 = 0$ wird, indem wegen $dx = 0$ die beiden benachbarten austretenden Strahlen
Fig. 6. von demselben Punkte des Kreises ausgehen, so dass (Fig. 6) K in C fällt, also $KC = r_1 = 0$ wird, so ergiebt sich nach Gl. 16, $l = 0 : 0$ oder unbestimmt. Der genaue Werth von ε, für welchen dies eintritt, d. i. $dx : d\varepsilon = 0$ wird, ergiebt sich aber nach obiger Gleichung aus

$$1 - \frac{4}{n}\,\frac{\cos\varepsilon}{\cos\beta} = 0;$$

ausserdem ist nach Gl. 4

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} = n,$$

woraus durch Quadriren der Ausdrücke von $\cos\beta$ und $\sin\beta$ und durch Addiren entsteht

$$\sin^2\varepsilon = \frac{16 - n^2}{15} = \frac{128}{135}, \quad \varepsilon = 76^0\,50'.$$

An der entsprechenden Stelle schneidet die Brennlinie den Kreis. Jene Unbestimmtheit von l ist nur scheinbar, kann aber bei unserem Entwicklungsgange nicht durch Differentiation beseitigt werden, weil dx und r_1 unabhängig von einander ermittelt wurden. — Wir beseitigen beide Schwierigkeiten ($l = \infty$ bei $\varepsilon = 72^0\,30'$ und $= 0 : 0$ bei $\varepsilon = 76^0\,50'$), indem wir für den Bogen CGH die Lichtstärke nicht für unendlich kleine, sondern für endlich kleine Elemente ermitteln, und indem wir in der Nähe von G die Scheibengestalt der Sonne in Betracht ziehen.

28. Einführung endlich kleiner Bogen der Wellenlinie.

Gehören zu zweien nicht weit von einander entfernten Lichtstrahlen die Werthe ε_1, x_1 und ε_2, x_2, und bezeichnen wir die Unterschiede der Bogen ε und der x bezw. mit $\triangle\varepsilon$ und $\triangle x$, so ist

$$\triangle\varepsilon = \left(\varepsilon_2{}^0 - \varepsilon_1{}^0\right)\frac{\pi}{180} = 0{,}01745\left(\varepsilon_2{}^0 - \varepsilon_1{}^0\right), \quad \triangle x = x_2 - x_1.$$

Tabelle 6.

Verhältnissmässige Lichtstärke l entlang der Wellenlinie beim Wasserstrahle von $\varepsilon = 70^0$ bis $\varepsilon = 90^0$.

Punkt	ε	φ	$100\triangle\varepsilon$	$100\frac{y}{r}$	$100\frac{x}{r} = x'$	$100\frac{\triangle x}{r} = \triangle x'$	$\alpha(1-\alpha)^2$	$l \cdot 100\frac{\triangle x}{r}$	l
	70° 00′	140°44′		+0,089	—5,64		0,088		
	70.21	140.58	0,61	+0,091	—5,66	—0,02	0,092	0,0186	0,930
			3,76			—0,04		0,1180	2,950
G	72.30	142.20	1,08	+0,094	—5,70	0,01	0,105	0,0334	3,340
	73.07	142.46	1,78	+0,093	—5,69	0,11	0,109	0,0563	0,513
	74.08	143.36	1,14	+0,092	—5,58	0,06	0,114	0,0352	0,587
	74.47	144.06	1,25	+0,076	—5,50	0,08	0,117	0,0380	0,475
	75.30	144.44	1,74	+0,066	—5,44	0,21	0,119	0,0510	0,243
	76.30	145.40	1,16	+0,039	—5,23	0,17	0,124	0,0331	0,195
	77.10	146.20	2,85	+0,018	—5,06	0,52	0,126	0,0772	0,149
	78.48	148.07	3,49	—0,072	—4,54	0,79	0,134	0,0723	0,092
	82.00	152.08	3,49	—0,427	—3,35	0,80	0,134	0,0529	0,066
	84.00	155.04	3,49	—0,718	—2,55	0,80	0,114	0,0288	0,036
	86.00	158.16	3,49	—1,008	—1,75	0,57	0,076	0,0094	0,017
	88.00	161.48	3,49	—1,241	—1,18	0,26	0,029	0,0008	0,003
H	90.00	165.36		—1,344	—0,92		0,000		

Indem sich die auf den Cylinderstreifen $r\triangle\varepsilon \,.\, 1$ fallende Lichtmenge $Lr\triangle\varepsilon \cos\varepsilon$, nachdem sie zum $\alpha(1-\alpha)^2$-fachen geschwächt wurde, auf dem Cylinderstreifen der Wellenfläche $\triangle x \,.\, 1$ vertheilt, ist hier die Lichtstärke

$$L_1 = \frac{Lr\triangle\varepsilon \cos\varepsilon \,.\, \alpha\,(1-\alpha)^2}{\triangle x},$$

woraus

$$l = \frac{L_1}{L} = \frac{r\triangle\varepsilon}{\triangle x} \cos\varepsilon \,.\, \alpha(1-\alpha)^2. \qquad (17).$$

Tab. 6. Hiernach ist die Tabelle 6 berechnet, wobei statt $\triangle\varepsilon$ und $\triangle x : r$ die Werthe von $100\triangle\varepsilon$ und $100\triangle x : r$ angegeben sind, und wobei für $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, $\alpha\,(1-\alpha)^2$ die Mittel der zu ε_1 und ε_2 gehörigen Werthe benutzt wurden. Zugleich sind die bald zu gebrauchenden Werthe von φ und von

$$l \,.\, 100\triangle x : r = 100\triangle\varepsilon \cos\varepsilon \,.\, \alpha(1-\alpha)^2$$

eingetragen, das sind die $(100 : r)$-fachen Werthe der Lichtmengen, welche auf die Stückchen $1 \,.\, \triangle x$ der Wellenfläche fallen.

29. Berücksichtigung der Ausdehnung der Sonnenscheibe.

Durch diese Betrachtung kleiner, aber endlicher Strecken $\triangle x$ tritt nicht mehr eine unendlich grosse, immerhin aber noch die verhältnissmässig grosse Lichtstärke $l = 3{,}34$ auf, also die $3^1/_3$-fache, wie im unmittelbaren Sonnenlichte. Die eigentliche Ursache des Rechnungsergebnisses einer unendlich grossen Lichtstärke bei jenem Punkte G wird aber erst beseitigt, wenn man an dieser Stelle die Ausdehnung der Sonnenscheibe beachtet, deren scheinbarer Durchmesser 32 Minuten beträgt.

Fig. 5. Dies geschieht, indem man die Figur 5 nur für die Sonnenstrahlen gelten lässt, welche in der durch den Sonnenmittelpunkt und die Axe des Wasserstrahles gelegten Ebene enthalten sind und somit von dem zum Wasserstrahl parallelen Sonnendurchmesser ausgehen. Die für die seitlichen dazu parallelen Sehnen der Sonnenscheibe geltenden Figuren erhält man dann durch eine Drehung der Figur 5 um den Mittelpunkt M, so dass für die beiden Punkte des Sonnenrandes, in denen die Tangenten der Scheibe mit dem Wasserstrahl parallel laufen, eine Drehung um jeweils 16′ nach beiden Seiten hin erforderlich ist. Statt des früheren einzigen austretenden nach dem Punkte G der Wellenlinie $(x = -0{,}057\,r)$ gerichteten Strahles

erhält man dann ein Büschel von Strahlen, die alle von ein und demselben, mit dem Grundkreise der Fig. 5 concentrischen Kreise berührt werden, und zwar, wie die Zeichnung (oder die Rechnung) ergiebt, in einem Abstande vom Punkte $G = 0{,}44r$. Daher ist die Breite des Sonnenbildes bei G und auch bei einem dem G benachbarten Punkte der Wellenlinie in der Richtung dieser Linie, das ist die Projection des durch Drehung des Punktes G um M in beiden Richtungen um 16′ entstandenen Bogens auf die Wellenlinie, $= 2 \,.\, 0{,}44r \sin 16' = 2 \,.\, 0{,}00205r$.

Die Lichtstärken entlang dieser Strecke verhalten sich wie die Ordinaten der scheinbar kreisförmigen Sonnenscheibe in den Punkten jenes sich in der Wellenlinie abbildenden Sonnendurchmessers; und wenn man diese Stärken als Ordinaten auf der Wellenlinie aufrichtet, so bilden ihre Endpunkte eine mit der scheinbaren Gestalt der Sonnenscheibe affine Figur, d. i. eine halbe Ellipse. Hat man ein Kurvenstück $\triangle x$ ins Auge gefasst, auf welches die verhältnissmässige Lichtmenge $l \triangle x$ fällt, so muss die Fläche F jener halben Ellipse gleich dieser Lichtmenge sein, und ihr Mittelpunkt in der Mitte von $\triangle x$ liegen. Ist l_1 die auf der Wellenlinie senkrechte Halbaxe der Ellipse, und ist, wie sich soeben ergab, $0{,}00205r$ die Hälfte der in der Wellenlinie liegenden Axe, so ist

$$F = 0{,}00205\, r\, l_1 \frac{\pi}{2} = l \triangle x,$$

daher

$$l_1 = l \frac{\triangle x}{r} \frac{2}{0{,}00205\pi} = 310 \frac{\triangle x}{r} l.$$

Betrachtet man z. B. das Stück der Wellenlinie zwischen den Punkten (Tab. 6), welche zu den Werthen des ε von 70° 21′ und 72° 30′ gehören und zu den Werthen von x' (womit $100x : r$ bezeichnet werden soll) $= -5{,}66$ und $= -5{,}70$, für welches also $\triangle x' = 100 \triangle x : r = -0{,}04$ ist, so liefert hierfür die Tab. 6 das $l \triangle x' = l\, 100 \triangle x : r = 2{,}950 \,.\, 0{,}04 = 0{,}1180$, daher nach obiger Formel $l_1 = 0{,}366$. Zeichnet man nun nach irgend einem Maassstabe die Ellipse, deren Mittelpunkt bei $x' = -5{,}68$ liegt, und deren in der Wellenlinie liegende Halbaxe nach dem vorhin erhaltenen Ergebnisse nach den Maassen der x' gleich 0,205 ist, sich also von $x' = -5{,}68 - 0{,}205 = -5{,}885$ bis $x' = -5{,}68 + 0{,}205 = -5{,}475$ erstreckt, und trägt die darauf

Tab. 6.

Fig. 7.

senkrechte Halbaxe = 0,366 nach einem beliebigen neuen Maassstabe auf, verzeichnet scharf die halbe Ellipse (1) und misst ihre Ordinaten in den Punkten

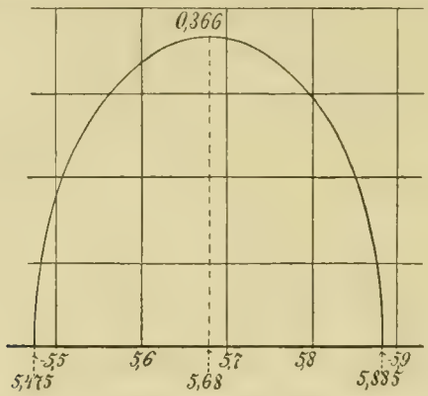


Fig. 7.

$x' = -5{,}5;\ -5{,}6;\ -5{,}7;\ -5{,}8$ nach dem Maassstabe der l_1, so erhält man für $x' = -5{,}5;\ -5{,}6;\ -5{,}7;\ -5{,}8$:

$$l = 0{,}176;\ 0{,}336;\ 0{,}366;\ 0{,}290.$$

Man kann diese Zahlen auch durch Rechnung aus der Gleichung der Ellipse, deren Koordinaten man mit x' und u bezeichnet, erhalten, welche ist

$$\frac{(x' + 5{,}68)^2}{0{,}205^2} + \frac{u^2}{0{,}366^2} = 1;$$

dieselbe liefert z. B. für $x' = -5{,}5$ ebenfalls $u = 0{,}176$. Diese Rechnung kann mit einem Rechenschieber rasch ausgeführt werden und dürfte der Zeichnung vorzuziehen sein. — Entsprechend erhält man zwischen $\varepsilon = 70^0$ und $70^0\,21'$ aus einer anderen Ellipse (2), die hier nicht wiedergegeben ist, für $x' = -5{,}5;\ -5{,}6;\ -5{,}7;\ -5{,}8$:

$$l = 0{,}039;\ 0{,}057;\ 0{,}056;\ 0{,}036.$$

30. Die Lichtstärke für das Stück der Wellenlinie zwischen $59^0\,23'$ und 90^0 unter Berücksichtigung der Ausdehnung der Sonnenscheibe. Etwas anders verfährt man für das Stück von $\varepsilon = 70^0$ bis $\varepsilon = 59^0\,23'$,
Tab. 4. indem man hier die Werthe von l aus der Tab. 4 entnimmt. Um hier ebenfalls die Ausdehnung der Sonnenscheibe zu berücksichtigen, zeichnet man die Kurven der verhältnissmässigen Lichtstärke über der Linie der x' als Abscissenaxe (wobei in der Figur zur grösseren Genauigkeit noch ein Punkt

für $\varepsilon = 69^0$, $x' = -5{,}54$, $l = 0{,}202$ eingeschaltet wurde) und verwandelt kleine Stücke der Fläche, welche durch wenig von einander entfernte Ordinaten, deren Intervall wir gleich $\triangle x' = -0{,}05$ wählen, durch die Abscissenaxe

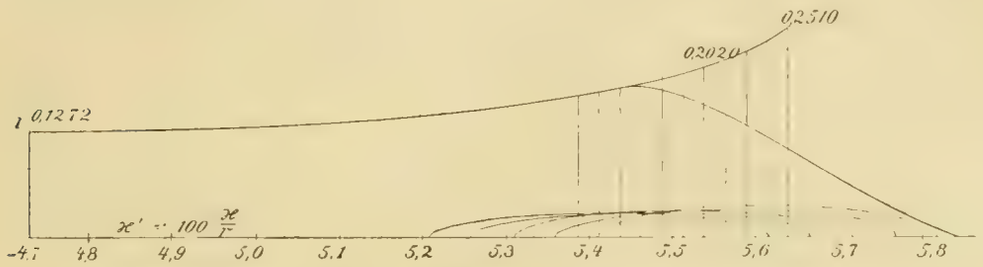


Fig. 8.

(die Linie der x') und durch die Kurve begrenzt sind, in gleicher Weise wie vorhin, in flächengleiche halbe Ellipsen, deren eine Halbaxe nach dem Maassstabe der x' gleich 0,205 ist, deren andere nach der obigen Formel $l_1 = 310 \,.\, 0{,}0005\, l$ beträgt, da $\triangle x : r = \triangle x' : 100 = 0{,}0005$ ist. Das erste in $x' = -5{,}64$ beginnende und bis $x' = -5{,}64 + 0{,}05 = -5{,}59$ reichende Stück ergiebt in seiner Mitte aus der Zeichnung $l = 0{,}2350$, sodass $l_1 = 0{,}0365$ wird. Hiernach ist die Ellipse bestimmt, und es sind fünf solche gezeichnet. Die Summe ihrer Ordinaten an jeder Stelle giebt dann die Kurve der für die ausgedehnte Sonne geltenden Werthe von l. Die so bestimmte Summenkurve würde Unstetigkeiten enthalten und ist in ihrer Form abhängig von der Zahl der durch Ellipsen ersetzten Theile (hier 5). Lässt man diese Zahl aber wachsen, so nähert sich die Kurve einer stetigen, und diese wurde verzeichnet. Sie weicht von der für den Sonnenpunkt geltenden Kurve der l nur noch wenig ab, so lange sich diese einem geradlinigen Verlaufe nähert, d. h. bis etwa bei $x' = -5{,}3$. Ausserdem erstreckt sich die neue Kurve über den Endpunkt der früheren, also über $x' = -5{,}64$ um $-0{,}205$ hinaus, also bis zu $x' = -5{,}845$. Die von jeder der Kurven und der Axe der x' begrenzten Flächen sind einander vollständig gleich, und danach allein könnte die neue Kurve zwischen ihren ermittelten Endpunkten genügend genau gezeichnet werden. Nun zählt man die für gleiche Werthe von x (oder x') geltenden Werthe von l, welche man aus den beiden betrachteten Ellipsen (1) und (2) und durch Abmessen aus der Fig. 8 er- Fig. 8.

hält, zusammen und ermittelt so die entlang des Theiles *CG* der Wellenlinie geltenden Werthe von *l*. Dabei wird für

$x' =$	$-5{,}4$	$-5{,}5$	$-5{,}6$	$-5{,}7$	$-5{,}8$	$-5{,}9$
aus Fig. 8	0,170	0,160	0,133	0,089	0,023	0,000
„ Ell. (1)		176	336	366	290	
„ Ell. (2)		039	057	056	036	
$l =$	0,170	0,375	0,526	0,511	0,349	0,000.

Die kleinen Unstetigkeiten der hier bestimmten und der weiteren (und kleineren) aus der Tab. 6 entnommenen Werthe von *l* wurden vermittelst einer stetigen Kurve ausgeglichen und die ausgeglichenen Werthe
Tab. 7. in der Tabelle 7 unter $\varepsilon = 72^0\,30'$ bis $59^0\,23'$ eingetragen und zwar zur Vermeidung der vielen Nullen mit ihrem 100fachen Werthe $= 100\,l$. In gleicher Weise wurden die *l* auf dem Zweige *GH* der Wellenlinie bestimmt. So erhielt man für die drei Theile der Wellenlinie in den Zwischenräumen der *x*, welche sich für spätere Rechnungen als zweckmässig ergaben, die
Tab. 7. in der Tab. 7 eingetragenen Werthe der verhältnissmässigen Helligkeit *l*, eingetragen als $100\,l$.

Tabelle 7.

Verhältnissmässige Lichtstärke *l* im Wasserstrahle entlang der Wellenlinie.

Von $\varepsilon = 90^0$ bis $72^0\,30'$.

$100\frac{x}{r}$	$-1{,}0$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,4	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$100\,l$	0,0	1,3	2,7	4,5	5,9	7,3	8,6	10,0	11,7	12,8	14,7	16,0	17,8	20,0	26,0	38,5	55,4	49,0	38,0	18,7	0,0

Von $\varepsilon = 72^0\,30'$ bis $59^0\,23'$

$100\frac{x}{r}$	$-5{,}9$	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,8	4,5	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,0
$100\,l$	0,0	34,9	51,1	52,6	37,5	22,5	17,2	15,5	14,7	13,9	12,8	11,6	10,8	9,7	9,0	8,4	7,6	6,8	6,2	5,5	5,4	4,9

Von $\varepsilon = 59^0\,23'$ bis 30^0

$100\frac{x}{r}$	0	$+1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$100\,l$	4,9	4,6	4,2	3,9	3,6	3,3	3,1	2,8	2,6	2,4	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8	1,8
$100\frac{x}{r}$	$+21$	22	23	27	28	46															
$100\,l$	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6															

31. Die Lichtübertragung nach einem entfernten Punkt P.

Die Fortpflanzung des Lichtes findet dadurch statt, dass sich die Schwingungen der schon bewegten Theilchen durch Störung des Gleichgewichts auf die benachbarten noch ruhenden Theilchen übertragen. So pflanzt sich allmählich die Bewegung von einer Oberfläche einer Welle, d. i. von einer Fläche, in welcher die Theilchen gleiche Schwingungsphase besitzen, auf ein Theilchen in einem entfernten Punkte P fort. Fällt man von P ein Loth auf jene Wellenoberfläche, so nennt man dessen Fusspunkt den Pol von P auf der Fläche. Man findet nun, dass die Theilchen dieser Fläche in der Nähe des Poles den grössten Einfluss auf die Bewegung in P üben, während die vom Pol entfernt liegenden Theilchen sich in ihren Wirkungen in der Regel vollständig aufheben, wie ein Schirm zeigt, der in jene Lothlinie gestellt die Uebertragung unterbricht, seitwärts gestellt, sie nicht unterbricht. Das Loth ist daher in der Regel die Richtung der Fortpflanzung oder des Lichtstrahles. Die neue Oberfläche der Welle ist dann äquidistant zu der früheren. An solchen Stellen aber, wo die Fläche einer Welle Linien mit Wende- oder mit Rückkehrpunkten enthält, gilt jene Regel von der ausschliesslichen Wirkung der Stelle des Poles nicht, auch treten möglicherweise benachbarte Pole auf; an solchen Stellen ist eine ursprüngliche Untersuchung nothwendig.

Da sich nun die Geschwindigkeiten der verschiedenen schwingenden Theilchen oder auch die damit in Verhältniss stehenden Schwingungsweiten oder Amplituden übertragen und sich zu einer resultirenden Geschwindigkeit vereinigen, welche die algebraische Summe der einzelnen übertragenen Geschwindigkeiten ist, so müssen wir zuerst aus der verhältnissmässigen lebendigen Kraft $l = L_1 : L$ die verhältnissmässig grösste Schwingungsgeschwindigkeit $v = V_1 : V$ bestimmen. Es ist aber bekannt, dass die in der Zeiteinheit von einem schwingenden Theilchen bei den wechselnden Geschwindigkeiten entwickelte lebendige Kraft L, d. h. die Summe der Produkte der kleinen Zeittheilchen in die während dieser Zeittheilchen dem schwingenden Theilchen innewohnende lebendige Kraft, gleich ist der halben lebendigen Kraft des Theilchens im Augenblick seiner grössten beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage herrschenden Geschwindigkeit v, und dass daher bei der Gleichheit der Massen der Theilchen, jene lebendige

Kraft L zum Maasse hat das halbe Quadrat dieser grössten Schwingungsgeschwindigkeit v, sodass wir setzen können $L = \frac{1}{2}V^2$, und ebenso $L_1 = \frac{1}{2}V_1^2$. Daher wird die verhältnissmässig grösste Schwingungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{V_1}{V} = \sqrt{\frac{L_1}{L}} = \sqrt{l} \,. \tag{18}$$

Hiernach sind aus den Werthen der l (Tab. 7) die der v berechnet und mit ihrem 10fachen Betrage in der Tabelle 8 eingezeichnet (in den zu $16\triangle y : \lambda = 0$ gehörigen Zeilen, wofür $v' = 10v \cos 0 = 10v$ wird).

Tabelle 8.

Werthe von $v' = 10v \cos 2\pi\,(\triangle y : \lambda)$, wenn $v = \sqrt{l}$ die grösste verhältnissmässige Schwingungsgeschwindigkeit im Punkte von der Abscisse x der Wellenlinie beim Wasserstrahle ist.

Von $\varepsilon = 90^0$ bis $72^0\ 30'$

$100\,x : r$		—1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,4	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$16\triangle y : \lambda$	0	0,0	1,1	1,6	2,1	2,4	2,7	2,9	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,5	5,1	6,2	7,4	7,0	6,2	4,3	0,0
	1	0,0	1,0	1,5	1,9	2,2	2,5	2,7	3,0	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9	4,2	4,7	5,7	6,8	6,5	5,7	4,0	0,0
	2	0,0	0,8	1,1	1,5	1,7	1,9	2,0	2,3	2,4	2,5	2,7	2,8	3,0	3,2	3,6	4,4	5,2	4,9	4,4	3,1	0,0
	3	0,0	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,7	2,0	2,4	2,8	2,7	2,4	1,6	0,0

Von $\varepsilon = 72^0\ 30'$ bis $59^0\ 23'$

$100x : r$		—5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,0	4,8	4,5	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0
$16\triangle y : \lambda$	0	5,9	7,2	7,2	6,1	4,7	4,1	3,9	3,8	3,7	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2.2
	1	5,4	6,6	6,6	5,6	4,3	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,1	2,1	2,0
	2	4,2	5,1	5,1	4,3	3,3	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	2,0	1,8	1,8	1,6	1,6	1,6
	3	2,3	2,8	2,8	2,3	1,8	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	0,8

Von $\varepsilon = 59^0\ 23'$ bis 30^0

$100x : r$		+1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	19	46
$16\triangle y : \lambda$	0	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,3
	1	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1.2	1,2
	2	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	0,9
	3	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5

32. Allgemeines Verfahren zur Bestimmung der nach P übertragenen Lichtstärke. Wir wollen nun die Stärke des Lichtes bestimmen, welches von der Wellenoberfläche nach einem im Verhältniss

zur Dicke des Wasserstrahles entfernten Punkte P durch Fortpflanzung übertragen wird. Sei in irgend einem Augenblicke die auf der ganzen Wellenoberfläche stattfindende Schwingungsphase um $a : \lambda$ hinter der Phase der grössten Verschiebung zurück, wobei λ die Wellenlänge und a eine andere kleine Länge bezeichnet, sei v die grösste und v' die augenblicklich herrschende Schwingungsgeschwindigkeit in irgend einem unendlich kleinen Theilchen df der Wellenoberfläche, so ist bekanntlich $v' = v \sin 2\pi (a : \lambda)$; und die von df auf P nach Ablauf der Zeit der Fortpflanzung des Lichtes von df bis P übertragene Schwingungsgeschwindigkeit ist mit $df . v'$ proportional.

Nehmen wir nun alle Licht empfangende Stellen P in der gleichen Entfernung e vom Wasserstrahl, also auf einer zu ihm koaxialen Cylinderfläche vom Halbmesser e liegend an, so können wir als Licht empfangende Flächenelemente bei P Streifen von gleichem mit e proportionalem Inhalte annehmen. Und wenn wir nur die zu unveränderlichem e gehörigen übertragenen Schwingungsgeschwindigkeiten betrachten, so können wir diese $= df v'$ setzen, wodurch die in der Richtung von P nach dem Tropfen sich ergebende Helligkeit bestimmt ist. Später bei Ermittelung der durch die Wassertropfen am Himmel hervorgebrachten Helligkeiten werden wir auf ein bestimmtes Maass der Helligkeiten einzugehen veranlasst sein.

Hat nun ein anderes Theilchen jener Wellenoberfläche am Wasserstrahle den um $\triangle y$ grösseren Abstand von P als ein betrachtetes ersteres Theilchen, so gehört die Schwingungsgeschwindigkeit, welche sich gleichzeitig mit der Einwirkung des ersteren auf P überträgt, wegen der grösseren Fortpflanzungsdauer der um $\triangle y : \lambda$ hinter der Phase jenes Theilchens zurückstehenden Phase an, sodass a um $\triangle y$ vermehrt werden muss; und der von diesem entfernteren df herrührende Antheil dv_1' der von der Wellenoberfläche auf P übertragenen Schwingungsgeschwindigkeit v_1' ist demnach

$$dv_1' = df v' = df v \sin 2\pi \left(\frac{a}{\lambda} + \frac{\triangle y}{\lambda}\right).$$

Es ist daher v_1' das Integral dieses Ausdruckes, genommen über die ganze Wellenoberfläche, oder es ist, wenn man den sinus entwickelt

$$v_1' = \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \int df v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda} + \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \int df v \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}.$$

Die Bewegung des Theilchens P ist aber eine Schwingung von derselben Schwingungsdauer und daher auch von derselben Wellenlänge λ, wie die der Theilchen auf der Wellenoberfläche. Denn denkt man sich P eine solche Bewegung ausführen, deren grösste Schwingungsgeschwindigkeit v_1 und deren Phasenunterschied gegen die Schwingung des erst betrachteten Theilchens der Wellenoberfläche in dem betrachteten Zeitpunkte $= \frac{b}{\lambda}$ ist, so würde seine Geschwindigkeit in diesem Zeitpunkte sein

$$v_1 \sin 2\pi \left(\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}\right)$$

$$= v_1 \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \cos 2\pi \frac{b}{\lambda} + v_1 \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \sin 2\pi \frac{b}{\lambda}.$$

Soll nun dieser Ausdruck gleich dem oben für v_1' erhaltenen sein, und zwar für jeden Werth des a oder für jede Zeit, so muss sein

$$v_1 \cos 2\pi \frac{b}{\lambda} = \int df\, v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda},$$

und

$$v_1 \sin 2\pi \frac{b}{\lambda} = \int df\, v \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}.$$

Hieraus erhält man aber durch Quadriren und Addiren

$$v_1^2 = \left[\int df\, v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}\right]^2 = \left[\int df\, v \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}\right]^2.$$

Aus dieser und aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ersieht man aber, dass das Theilchen in P eine Schwingung ausführt, für welche die grösste Geschwindigkeit v_1 und die Grösse b unabhängig von a, oder von der Zeit sind, dass also die Phase des schwingenden Theilchens in P immer um dieselbe unveränderliche Grösse $b : \lambda$ hinter der Phase eines schwingenden Theilchens an unserer Wellenoberfläche zurückbleibt, oder dass die Schwingungsdauer beider Theilchen gleich ist.

Setzen wir die eingeklammerten Integrale der letzten Gleichung bezw. $= v_2$ und v_3 und beachten, dass in P die verhältnissmässige Helligkeit $J_1 = v_1^2$ ist, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= v_1^2 = v_2^2 + v_3^2, \\ v_2 &= \int df\, v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda} = \int df\, v'; \quad v' = v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}, \\ v_3 &= \int df\, v \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda} = \int df\, v''; \quad v'' = v \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (19).$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, wie die grösste Schwingungsgeschwindigkeit v_1 aus zwei anderen solchen Geschwindigkeiten zusammengesetzt ist, welche zweien um $\frac{1}{4}$ verschiedenen Phasen von v'' angehören. Denn verändert man die Phase von v'' um $\frac{1}{4}$, so wird aus dem sinus der cosinus, und aus v_3 wird v_2.

Nimmt man nun als Element df der cylindrischen Wellenoberfläche den über dem Elemente ds der Wellenlinie stehenden Streifen, wobei man $ds = dx$ setzen darf, weil das ds im wirksamen Theil der Wellenfläche nur wenig gegen die x-Axe geneigt ist, erhält also den Flächenstreifen $df = ds \,.\, 1 = dx \,.\, 1$, entnimmt aus Gl. 18 den Ausdruck $v = \sqrt{l}$ und setzt darin den Werth von l aus Gl. 16 (S. 42) ein, so ist

$$df = dx, \quad v = \sqrt{\left[\frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2}\, \alpha\, (1-\alpha)^2\right]}. \qquad (20).$$

Aus (19) und (20) würde man v_2 und v_3 durch Integration nach dx über die ganze Wellenlinie hin oder doch über deren hervorragend wirkenden Theil erhalten. Man müsste zu dem Ende zuerst die Veränderlichen, nämlich dx, $d\varepsilon : dx$, r_1, r_2, $\alpha\,(1-\alpha)^2$, y durch ein und dieselbe willkürlich Veränderliche, etwa durch ε, ausdrücken, und dann nach ε integriren.

Aber Airy musste schon zur mechanischen Quadratur greifen, obgleich er die Wellenlinie durch eine Kurve dritter Ordnung ersetzte und obgleich er eine gleichmässige Lichtstärke auf dieser annahm. Um wie viel mehr sind wir genöthigt, die mechanische Quadratur anzuwenden; davon überzeugt man sich, wenn man den verwickelten Zusammenhang jener Grössen ins Auge fasst.

33. Die Geschwindigkeitskurve. Geometrisches Verfahren zur Ermittelung der Lichtstärke in P. Um zur Ausführung zu schreiten, stellen wir in Fig. 9 durch die Linie GCF die in Fig. 5 angegebene Fig. 9 u. 5.

Wellenlinie w dar, deren Form aber hier, wo es nur auf die Anschauung im allgemeinen ankommt, durch einen einzigen Kreisbogen ersetzt ist. An jeder Stelle derselben tragen wir senkrecht zu ihr die grösste daselbst vorkommende Schwingungsgeschwindigkeit v nach der Tabelle 8 auf und erhalten dadurch eine Grenzlinie $G_1\ C_1\ F_1$ die Geschwindigkeitskurve (v). Die Wellenoberfläche ist der Cylinder, welcher GCF zum senkrechten Schnitte

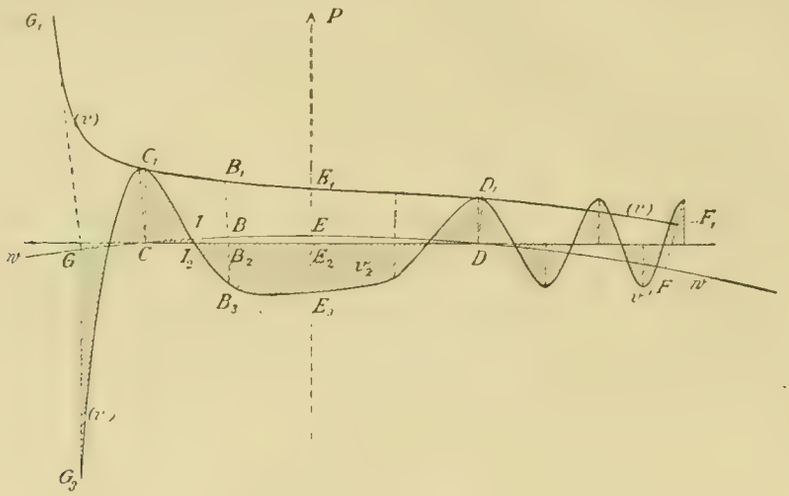


Fig. 9.

hat. Ist nun C jener Ausgangspunkt der Wellenoberfläche, für welchen $\triangle y$ gleich Null ist, so legen wir aus dem entfernten Punkte P (S. 52) als Mittelpunkt durch C eine Kugel; dieselbe erscheint im Bereiche des Wasserstrahles als die auf PC senkrechte Ebene CD. Da aber nur für Punkte, für welche die Linie CP mit der Normalen CC_1 der Wellenfläche einen kleinen Winkel bildet, eine merkbare Uebertragung der Schwingungen stattfindet, so wird jene auf PC senkrechte Ebene die Wellenoberfläche bei C nur unter einem kleinen Winkel schneiden. Von dieser Ebene aus werden die Abstände $\triangle y$ gemessen, so für B das $\triangle y = B_2 B$. Ist dies beispielsweise $= \frac{3}{8}\lambda$, so ergiebt sich nach Gl. (19) (S. 55) $v' = v \cos 2\pi\ (3 : 8)$ $= - v \cos 45^0 = - BB_1 \,.\, 0{,}707 = B_2 B_3$.

Der Fusspunkt der von P auf die Wellenoberfläche gefällten Senkrechten, oder sein Pol, sei E; dessen Abstand $E_2 E$ von jener Ebene CD

ist ein grösster oder kleinster; er sei beispielsweise $\triangle y = E_2E = \frac{1}{2}\lambda$. Dadurch wird sein $v' = E_2E_3 = EE_1 \cos \pi = -EE_1$. Für die ganze Wellenlinie entsteht so eine um CD als Axe hin und her schwankende wellenförmige Linie $G_3C_1E_3D_1$ (v'). Ihre Ordinaten sind v' und die von einem Elemente dx der Wellenlinie, ihren beiden Endordinaten und jener Kurve der v' eingeschlossene Fläche ist $dx.v' = dv_2$, und die Summe derselben, oder die algebraische Summe der positiven und negativen Flächenstücke oder Wellen der wellenförmigen Linie (v') stellt die Grösse v_2 der Gl. (19) dar, d. i. die Schwingungsgeschwindigkeit, welche bei derjenigen Phase in P herrscht, die von der Phase der grössten Geschwindigkeit um $(b:\lambda)$ verschieden ist. Ersetzt man in der letztangewandten Formel aus dem Formelsystem (19) cosinus durch sinus, so erhält man durch $v'' = v \sin 2\pi(\triangle y : \lambda)$ eine andere wellenförmige Linie, deren Fläche v_3 giebt.

Man bemerkt nun in Fig. 9, dass die Flächeninhalte der einzelnen Wellen der Kurve v' unter Voraussetzung einer unveränderlichen Grösse von v bei dem Pole E des Punktes P am grössten sind, weil ihre Breiten am grössten sind. Die halbe Breite der ersten Welle ist nämlich EI, die der zweiten IC; und da $EE_2 = \frac{1}{2}\lambda$, $II_2 = \frac{1}{4}\lambda$, man aber hier die Wellenlinie durch ihren Krümmungskreis ersetzen darf, so ist, wenn man EC und EI als auf dem Kreisdurchmesser senkrechte Halbsehnen auffasst, $EC:EI = \sqrt{EE_2 : II_2} = \sqrt{2} = 1{,}414$, also $IC:EI = 0{,}414$, oder $EI:IC = 1:0{,}414$. Der bei dem Pol liegende Theil der Wellenoberfläche ist daher der wirksamste; und andererseits heben sich die Wirkungen entfernterer Theile fast auf, so der Theile zwischen D und F. Dies gilt aber, von welcher Schwingungsphase im Pole E man auch ausgehen möge, ebenso von v' wie von v'', die um $^1/_4$ Phase von einander abweichen. Man kann daher den in seiner Wirkung zu beachtenden Theil der Wellenoberfläche durch die vom Pole E an gerechnet erste (DD_1) oder zweite der grössten Ordinaten begrenzen, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen. Fig. 9.

Auf gleiche Weise können wir in jedem anderen Punkte P die in ihm herrschende grösste Schwingungsgeschwindigkeit v_1 und Lichtstärke $J_1 = v_1^2$ berechnen. Alle solche Punkte P nehmen wir in derselben zur

Richtung des Wasserstrahles senkrechten Ebene an, dabei in demselben Abstande e vom Wasserstrahle, welcher Abstand gross gegen die Dicke des Strahles ist, und ferner unter kleinen Winkelabständen von einander und
Fig. 5. gegen die Richtung CC_1, die wir früher schon (vergl. Fig. 5 die C_1CC_2) als den sogenannten wirksamen, gegen den geometrischen Streifen gekehrten Strahl bezeichnet haben. Da wir vorerst nur die Verhältnisse der v_1 für verschiedene solche Richtungen bestimmen, brauchen wir auf den Abstand des P zunächst keine Rücksicht zu nehmen.

34. Annahme über die Dicke des Wasserstrahls und der Wassertropfen. Um nun die v_1 oder die Flächen jener Wellenlinien der
Fig. 9. Fig. 9 zu berechnen, müssen wir ein bestimmtes Verhältniss der Wellenlänge λ zum Halbmesser r des Querschnittes des Wasserstrahles annehmen, damit wir die Abstände $\triangle y$ der Wellenlinie CDF von der Geraden CD an jeder Stelle, gemessen durch λ, angeben können. Die Stelle des Spektrums, an welcher der von uns stets gebrauchte Brechungskoefficient des Wassers $= 4:3$ herrscht, liegt im Orange, ganz nahe bei der Fraunhofer'schen Linie D, und die Wellenlänge ist dort $= 0{,}00060$ mm. Nehmen wir nun $r = 100\ \lambda = 0{,}060$ mm, so haben wir eine Grösse, die bei den später zu betrachtenden Wassertropfen jedenfalls vorkommt, und die wir daher auch bei den Wasserstrahlen zu Grunde legen wollen. Was nämlich die mögliche Kleinheit der Wassertropfen anbelangt, so bestimmte Assmann[1]) bei den Tröpfchen von Nebeln den Halbmesser zwischen 0,003 und 0,008 mm, indem er die abgeplattete Form ihrer auf einer Glasplatte gebildeten Niederschläge mikroskopisch maass; und Kämtz[2]) berechnete bei der Erklärung der Lichtringe aus der Beugung jene Halbmesser $= 0{,}008$ bis 0,013 mm. In der klaren Luft werden die Tröpfchen aber noch viel kleiner sein. Andererseits maass ich bei Nebel und feinem Geriesel die Tröpfchen, welche sich in Kugelform an die Filzfädchen des Hutes angesetzt hatten, und fand einen Halbmesser von 0,05 bis 0,3 mm. Bei kräftigerem Regen haben die Tropfen mehrere Millimeter Halbmesser. — Wir werden nun die Erscheinungen für

[1]) Assmann, a. a. O. (S. S. 3).

[2]) Clausius, die Lichterscheinungen der Atmosphäre, S. 447. [Die Abhandlung steht in den Beiträgen zur meteorologischen Optik, herausgeg. von J. A. Grunert, 1. Theil, 4. Heft 1850. Daselbst finden sich die Durchmesser angegeben zu 0,0004 bis 0,002 pariser Zoll; danach wären die Halbmesser 0,005 bis 0,027 mm. Die Herausgeber.]

$r = 0{,}06$ mm bestimmen, und die Ergebnisse durch ein Annäherungsverfahren auch für Wasserstrahlen und Tropfen von anderen Maassen übertragbar machen.

35. Theilung der wirksamen Wellenoberfläche in Schichten von gleichen Abständen. Um nun die Bestimmung der in Nummer 33 besprochenen Fläche zwischen der wellenförmigen Linie (v') und deren Axe CD ausführen zu können, muss man die wirksame Wellenoberfläche in Schichten von gleichen Abständen zerlegen. Wir wollen für die Abstände $\triangle y$ der Punkte der Wellenlinie w von der Sehne CD als Einheit $\frac{1}{16}\lambda$ wählen, weil wir dadurch Phasenintervalle von $\frac{1}{4}$ einer Viertelschwingungsdauer erhalten, die für die Genauigkeit unserer Berechnung (Nummer 37) genügend klein sind.

36. Winkel der Richtung vom Wasserstrahl nach dem beleuchteten Punkte P und der Richtung nach dem geometrischen Streifen. Als Anfangs- oder nullte Richtung der Lichtübertragung AP wollen wir die Normale CC_1 der Wellenlinie, oder die y-Axe wählen, das ist auch die Richtung nach dem geometrischen Streifen. Die darauf senkrechte durch C gelegte Ebene enthält die Tangente der Wellenlinie in C, d. i. die x-Axe.

Als positiven Sinn einer abweichenden Richtung AP wollen wir den Sinn der Drehung CD auf w (Fig. 9) annehmen, für welche die Winkel zwischen der Richtung vom Wasserstrahl A aus nach P und nach der Lichtquelle S abnehmen. Anstatt sich nun den Wasserstrahl fest und die Richtung nach P veränderlich, kann man sich auch den Ort der Beobachtung P fest und die Richtung nach einem Wasserstrahl veränderlich denken. Zu jedem Winkel SAP gehört dann auch ein Winkel SPA, und dem eben festgelegten positiven Drehungssinn entsprechen wachsende Winkelabstände zwischen der Richtung von P nach der Lichtquelle und nach dem Wasserstrahl. Fig. 9.

Die erste abweichende Richtung AP wählen wir nun derart, dass die senkrecht zu ihr durch C gelegte Gerade den Ast CD der Wellenlinie, welcher sich in der Richtung der positiven x erstreckt, in einem Punkt D schneidet, der von der x-Axe einen Abstand $= \frac{1}{16}\lambda$ besitzt, für welchen also hier $y = -\frac{1}{16}\lambda = -\frac{1}{1600}r$ ist. Zur Bestimmung dieses Punktes ersetzen wir wie früher

den Bogen CD der Wellenlinie durch den aus dem Schnittpunkte der beiden Endnormalen in C und D gezogenen Kreisbogen, dessen Halbmesser nach Tab. 3. Tab. 3. $r' = 3{,}75\, r$ ist. Wir erhalten dann für jenen Punkt

$$x = \sqrt{2r'(-y)} = \sqrt{2 \,.\, 3{,}75\, r \,\frac{\lambda}{16}} = 0{,}685 \sqrt{r\lambda}. \tag{21}$$

Für $y = -\lambda : 16 = -r : 1600$ oder für $16 \,.\, 100y : r = -1$ ist demnach bei $\lambda = r : 100$, $x = 0{,}0685\, r$ oder $100x : r = 6{,}85$; und dementsprechend enthält auch Tab. 4. der dritte Theil der Tab. 4 jene angenähert angegebenen Werthe $16 \,.\, 100y : r = -1$ und $100x : r = 7$. Der Winkel δ zwischen diesen beiden ersten Richtungen nach P ist daher

$$\delta = \frac{-y}{x} = \frac{1}{1600 \,.\, 0{,}0685} = 0{,}00912 = 31\tfrac{1'}{3}. \tag{22}$$

Für jede folgende zu untersuchende Richtung AP soll die Tangente ihres Winkels mit der y-Axe um den jedesmaligen Betrag von 0,00912 oder $31\frac{1'}{3}$ zunehmen; und indem wir 15 solche Lagen betrachten, wächst der Winkel auf $15 \times 31\frac{1'}{3} = 7°50'$, wobei wir in Genüge der zu beobachtenden Genauigkeit bis dahin die Winkel mit ihren Tangenten proportional wachsend annehmen dürfen. Bezeichnen wir die Ordnungsziffer einer solchen Lage der AP mit ξ, welche Ziffer also von 0 bis 15 fortschreitet, so gehört zu Fig. 9. der ξ-ten Lage der Richtung AP oder der Sehne CD der Fig. 9 eine Abweichung von der y-Axe CC_1 bezw. von der x-Axe

$$\delta_1 = \xi\delta = \xi \,.\, 0{,}00912 = \xi \,.\, 31\tfrac{1'}{3}.$$

Die Gleichung der ξ-ten Linie CD ist daher

$$y = -\delta_1 x \text{ oder } y = -\xi \,.\, 0{,}00912\, x.$$

37. Ausführung der mechanischen Quadraturen zur Bestimmung von l_1. Aus den Gleichungen (19) und (20) (S. 55) erhalten wir

$$v_2 = \int dx \,.\, v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda} = \frac{1}{10} \int dx \,.\, v',$$

wobei, um Nullen zu vermeiden

$$v' = 10\, v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}$$

gesetzt wurde.

Um hieraus v_2 durch mechanische Quadraturen zu berechnen, müssen wir zunächst für jeden der benutzten Werthe von x den zugehörigen Werth von v und $\triangle y$ ermitteln. Wir haben dabei die Intervalle der x an den Stellen kleiner genommen, wo die v rasch wechseln; für positive x nahmen wir ein Intervall $\triangle x = \frac{1}{100} r$, für negative kleiner, bis zu $\frac{1}{10}$ dieser Grösse. Nun entnahmen wir die zugehörigen grössten Schwingungsgeschwindigkeiten v aus der Tab. 8. Sodann ist $\triangle y$ der Mehrbetrag des Abstandes eines Punktes E der Wellenlinie von P über den Abstand des zu gleichem x gehörigen Punktes E_2 der Sehne CD von P. Sind also y und y_1 die (gegen P hin als positiv gerechneten) Koordinaten von E und E_2, so ist Tab. 8.

$$E_2E = \triangle y = y_1 - y.$$

Die Werthe von y sind in Tabelle 3 eingetragen, die von y_1 werden nach der vorhin angegebenen Gleichung $y = -\xi \,.\, 0{,}00912x$ berechnet. Mittelst $\triangle y$ berechnet man nun die Werthe von Tab. 3.

$$v' = 10 \,.\, v \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda},$$

wobei man nach Nummer 35 $\triangle y$ jeweils um $\frac{1}{16}\lambda$ wachsen lässt; man berechnet also für einen Quadranten

$$v \cos 0,\ v \cos \frac{2\pi}{16},\ v \cos 2\frac{2\pi}{16},\ v \cos 3\frac{2\pi}{16},\ v \cos 4\frac{2\pi}{16};$$

für die übrigen Quadranten wechseln nur die Vorzeichen, so dass z. B.

$$v \cos 21\,\frac{2\pi}{16} = -v \cos 3\frac{2\pi}{16}$$

ist. Die Ergebnisse sind in Tab. 8 eingetragen, wobei die erste für $\triangle y = 0$ geltende Linie die $v' = \sqrt{l}$ enthält, hergeleitet aus dem Werthe von l in Tab. 7. Doch will ich bemerken, dass ich, um die Rechnungen bei Einschaltungen zu vermeiden, mir eine ausgedehntere Tabelle mit Intervallen von $\frac{1}{10} \cdot \frac{\pi}{8}$ angefertigt hatte. Tab. 8. Tab. 7.

Für die mechanische Quadratur theilt man x in endliche Intervalle $\triangle x$, wobei zwei aufeinanderfolgende Theilungspunkte mit x_m und x_n, und die zugehörigen Werthe von v' mit v'_m und v'_n bezeichnet sein mögen. Man

Tabelle 9.

Berechnung der Componente v_2 der Schwingungsgeschwindigkeiten bei den Lichtstreifen am Wasserstrahl für $\xi = +6$.

100 $x:r$	16 $y:\lambda$	16 $y_1:\lambda$	16 $\Delta y:\lambda$	100 $\Delta x:r$	v'	$\frac{1}{2}(v'_m+v'_n)$	$\Delta v_2'$ +	$\Delta v_2'$ −	100 $x:r$	16 $y:\lambda$	16 $y_1:\lambda$	16 $\Delta y:\lambda$	100 $\Delta x:r$	v'	$\frac{1}{2}(v'_m+v'_n)$	$\Delta v_2'$ +	$\Delta v_2'$ −
—	—	+	+		+				—	+	+	+		+			
1,0	20,8	0,9	21,7		0,0	+			2,0	0,2	1,8	1,6		2,0	+		
				0,5	+	0,2	0,10						0,5		2,0	1,00	
1,5	17,7	1,3	19,0		0,4				1,5	0,1	1,3	1,2		2,0			
				0,5		1,2	0,60						0,5		2,1	1,05	
2,0	14,7	1,8	16,5		1,6				1,0	0,0	0,9	0,9		2,1			
				0,5		1,6	0,80						1		2,2	2,2	
2,5	11,8	2,2	14,0		1,5				0	0,0	0,0	0,0		2,2			
				0,5	−	0,5	0,25		+								
3,0	8,9	2,6	11,5		0,5				1	0,0	0,9	0,9	1	1,9	2,1	2,1	
				0,4		1,4		0,56	2	0,1	1,8	1,7	1	1,6	1,7	1,7	
3,4	6,5	3,0	9,5		2,3												
				0,3		2,7		0,81	3	0,2	2,6	2,4	1	1,2	1,4	1,4	
3,7	4,7	3,3	8,0		2,9				4	0,3	3,5	3,2	1	0,6	0,9	0,9	
				0,3		2,9		0,87									
4,0	3,1	3,5	6,6		2,8				5	0,5	4,4	3,9	1	0,1	0,4	0,4	
				0,3		2,4		0,72									
4,3	1,9	3,8	5,7		2,1								1	−	0,2		0,2
				0,2		2,0		0,40	6	0,7	5,3	4,6	1	0,5	0,7		0,7
4,5	1,3	4,0	5,3		1,8				7	1,0	6,2	5,2	1	0,8	0,8		0,8
				0,3		1,3		0,39									
4,8	0,4	4,2	4,6		0,9				8	1,4	7,0	5,6	1	0,9	1,0		1,0
	+			0,2		0,7		0,14	9	1,8	7,9	6,1	1	1,1	1,2		1,2
5,0	0,1	4,4	4,3		0,5				10	2,2	8,8	6,6	1	1,2	1,3		1,3
				0,1		0,3		0,03									
5,1	0,4	4,5	4,1		0,1				11	2,6	9,7	7,1	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		0,0		0,00									
5,2	0,6	4,6	4,0		0,0	+			12	3,1	10,5	7,4	1	1,4	1,4		1,4
				0,1	+	0,0	0,00										
5,3	0,8	4,7	3,9		0,1				13	3,7	11,4	7,7	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		0,3	0,03										
5,4	1,0	4,8	3,8		0,5				14	4,4	12,3	7,9	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		0,7	0,07										
5,5	1,2	4,9	3,7		0,9				15	5,2	13,2	8,0	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		1,4	0,14										
5,6	1,3	4,9	3,4		1,7				16	6,1	14,0	7,9	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		1,7	0,17										
5,7	1,5	5,0	3,4		1,5				17	7,0	14,9	7,9	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		1,2	0,12										
5,8	1,6	5,1	3,5		0,9				18	8,0	15,8	7,8	1	1,4	1,4		1,4
				0,1		0,3	0,03										
5,9	1,6	5,2	3,6		0,0				19	9,1	16,6	7,5	1	1,3	1,4		1,4
				0,1		0,4	0,04										
5,8	1,5	5,1	3,6		1,0				20	10,3	17,5	7,2	1	1,2	1,2		1,2
				0,1		1,2	0,12										
5,7	1,5	5,0	3,5		1,4				21	11,7	18,4	6,7	1	1,1	1,2		1,2
				0,1		1,4	0,14										
5,6	1,4	4,9	3,5		1,4				22	13,1	19,3	6,2	1	1,0	1,0		1,0
				0,1		1,4	0,14										
5,5	1,4	4,9	3,5		1,2				23	14,5	20,1	5,6	1	0,7	0,9		0,9
				0,1		1,0	0,10										
5,4	1,3	4,8	3,5		0,9				24	16,1	21,0	4,9	1	0,4	0,5		0,5
				0,1		0,9	0,09										
5,3	1,3	4,7	3,4		1,0				25	17,8	21,9	4,1	1	0,1	0,3		0,3
				0,1		1,0	0,10										
5,2	1,2	4,6	3,4		1,0									+			
				0,1		1,0	0,10		26	19,5	22,8	3,3	1	+ 0,4	0,2	0,2	
5,1	1,1	4,5	3,4		1,0				27	21,3	23,6	2,3	1	0,8	0,6	0,6	
				0,1		1,0	0,10										
5,0	1,1	4,4	3,3		1,0				28	23,2	24,5	1,3	1	1,1	0,9	0,9	
				0,2		1,0	0,20										
4,8	0,9	4,2	3,3		1,0				29	25,0	25,4	0,4	1	1,3	1,2	1,2	
				0,3		1,1	0,33										
4,5	0,8	4,0	3,2		1,1				30	27,2	26,3	+ 0,9	1	1,2	1,3	1,3	
				0,2		1,1	0,22										
4,3	0,7	3,8	3,1		1,1				31	29,6	27,2	2,4	1	0,7	1,0	1,0	
				0,3		1,2	0,36										
4,0	0,7	3,5	2,8		1,4				32	32,0	28,1	3,9	1	0,1	0,4	0,4	
				0,3		1,5	0,45										
3,7	0,6	3,3	2,7		1,5				33	34,5	29,0	5,5	1	− 0,7	0,3		0,3
				0,3		1,5	0,45										
3,4	0,5	3,0	2,5		1,6				34	37,0	29,8	7,2	1	1,2	1,0		1,0
				0,4		1,7	0,68										
3,0	0,4	2,6	2,2		1,8								0,5		1,2		0,6
				0,5		1,9	0,95										
2,5	0,3	2,2	1,9		1,9												
				0,5		1,9	0,95										
2,0	0,2	1,8	1,6		2,0				34,5			8,0		1,3			
							7,83	3,92								16,35	23,40

$1000\,v_2 : r = -3{,}14 = 24{,}18 - 27{,}32$

hat dann statt dx zu setzen $\triangle x = x_n - x_m$, und statt v' das Mittel $\frac{1}{2}(v'_m + v'_n)$, so dass

$$v_2 = \frac{1}{10}\int dx\, v' = \frac{1}{10}\sum \triangle x \,\frac{1}{2}(v'_m + v'_n) = \sum \triangle v_2,$$

indem man $\triangle v_2 = \frac{1}{10}\triangle x \cdot \frac{1}{2}(v'_m + v'_n)$ setzt. Ist jedoch v_n ein Maximum, hat also in dem zugehörigen Punkte die Wellenlinie $C_1 B_3 D_1$ (Fig. 9) einen Scheitel, so wurde das zwischen v'_n und v'_m liegende Kurvenstück als ein Stück einer Parabel angesehen, und dementsprechend das arithmetische Mittel zwischen v'_m und v'_n ersetzt durch $\frac{1}{3}(2v'_n + v'_m)$.

Die Rechnung ist für $\xi = +6$ in der Tab. 9 durchgeführt.

Dabei sind statt $\triangle x$ die vorhin erhaltenen Werthe $100\triangle x : r$ eingesetzt, so dass man erhält

$$\triangle v_2 = \frac{1}{10}\cdot\frac{r}{100}\cdot\frac{100\triangle x}{r}\cdot\frac{1}{2}\left(v'_m + v'_n\right) = \frac{r}{1000}\cdot\triangle v'_2,$$

worin

$$\triangle v'_2 = \frac{100\triangle x}{r}\cdot\frac{1}{2}\left(v'_m + v'_n\right);$$

daher

$$v'_2 = \sum \frac{100\triangle x}{r}\cdot\frac{1}{2}\left(v'_m + v'_n\right),$$

und

$$v_2 = \frac{r}{1000}\, v'_2.$$

Da $r = 100\lambda$ angenommen wurde, kann man auch schreiben,

$$v_2 = \frac{r\lambda}{100}\, v'_2.$$

Es ist dies durch die Gl. (21) (S. 60) gerechtfertigt, aus welcher der Ausdruck von v_2 herrührt, und worin sich $x = 0{,}685\sqrt{r\lambda}$ ergeben hat.

Ersetzt man $\cos 2\pi(\triangle y : \lambda)$ durch $\sin 2\pi(\triangle y : \lambda)$, so erhält man den Werth von v_3. Man benutzt dabei zweckmässig die Cosinustabelle 8, indem man beachtet, dass $\sin 2\pi(\triangle y : \lambda) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi(\triangle y : \lambda)\right)$ ist. Den Sinuswerth erhält man daher aus der Cosinustabelle, indem man 16 $(\triangle y : \lambda)$

durch $4 - 16\,(\triangle y : \lambda)$ ersetzt. Dadurch erhält man die Werthe von v'_3; und diese sowie die Werthe von v'_2 sind in der Tabelle 10 eingetragen.

Tabelle 10.

Die Komponenten v'_2 und v'_3 der verhältnissmässig grössten Schwingungsgeschwindigkeiten v_1 und die Helligkeit l_1 in den Abständen ξ vom geometrischen Streifen des Wasserstrahles für Orange.

ξ	−16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
v'_2	+0,109	−0,241	0,493	0,756	0,920	1,034	0,914	0,635	0,552	0,254	+0,139	0,701	1,282	1,901	2,547	3,096	3,814
v'_3	+0,596	0,634	0,789	0,379	0,196	−0,187	0,450	0,800	1,044	1,396	1,354	1,431	1,176	0,878	0,511	0,038	+0,850
l'_1	0,37	0,46	0,87	0,66	0,88	1,10	1,04	1,04	1,39	2,01	1,85	2,54	3,02	4,38	6,75	9,59	15,26

ξ	+1	2	2,4	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v'_2	4,436	4,798	4,775	4,558	3,574	1,720	−0,314	1,397	0,828	+0,808	0,843	−1,669	2,837	1,277	+0,660	−0,974
v'_3	0,946	0,283	0,071	−0,291	0,894	0,707	0,043	+1,738	3,105	2,571	0,274	−1,315	+0,395	1,172	−0,366	2,359
l'_1	20,55	23,10	23,06	20,86	13,57	3,46	0,10	4,97	10,33	7,26	0,79	4,51	8,20	3,00	0,57	6,51

Hieraus erhält man nach Formel (19) (S. 55)

$$l_1 = v_2^2 + v_3^2 = \frac{r\lambda}{10000}\left(v_2'^2 + v_3'^2\right) = \frac{r\lambda}{10000} l_1', \tag{23}$$

wenn man $v_2'^2 + v_3'^2 = l_1'$ setzt. Die Helligkeit l_1 ist also mit der Dicke des Wasserstrahles $(2r)$ und der Wellenlänge λ proportional.

38. Die Helligkeitskurve in der Nähe des geometrischen Streifens. In Tabelle 10 sind die zu 33 verschiedenen Werthen von ξ gehörigen Werthe von v'_2, v'_3, l'_1 eingetragen; und in Figur 10 sind zu den Werthen von ξ als Abscissen jene Werthe als Ordinaten aufgetragen. Dadurch sind die Kurven v'_2, v'_3, l'_1 bestimmt. Die letzte ist die Helligkeitskurve, welche die Abhängigkeit der Helligkeit von den Winkelabständen ξ in der Nähe des geometrischen Streifens darstellt.

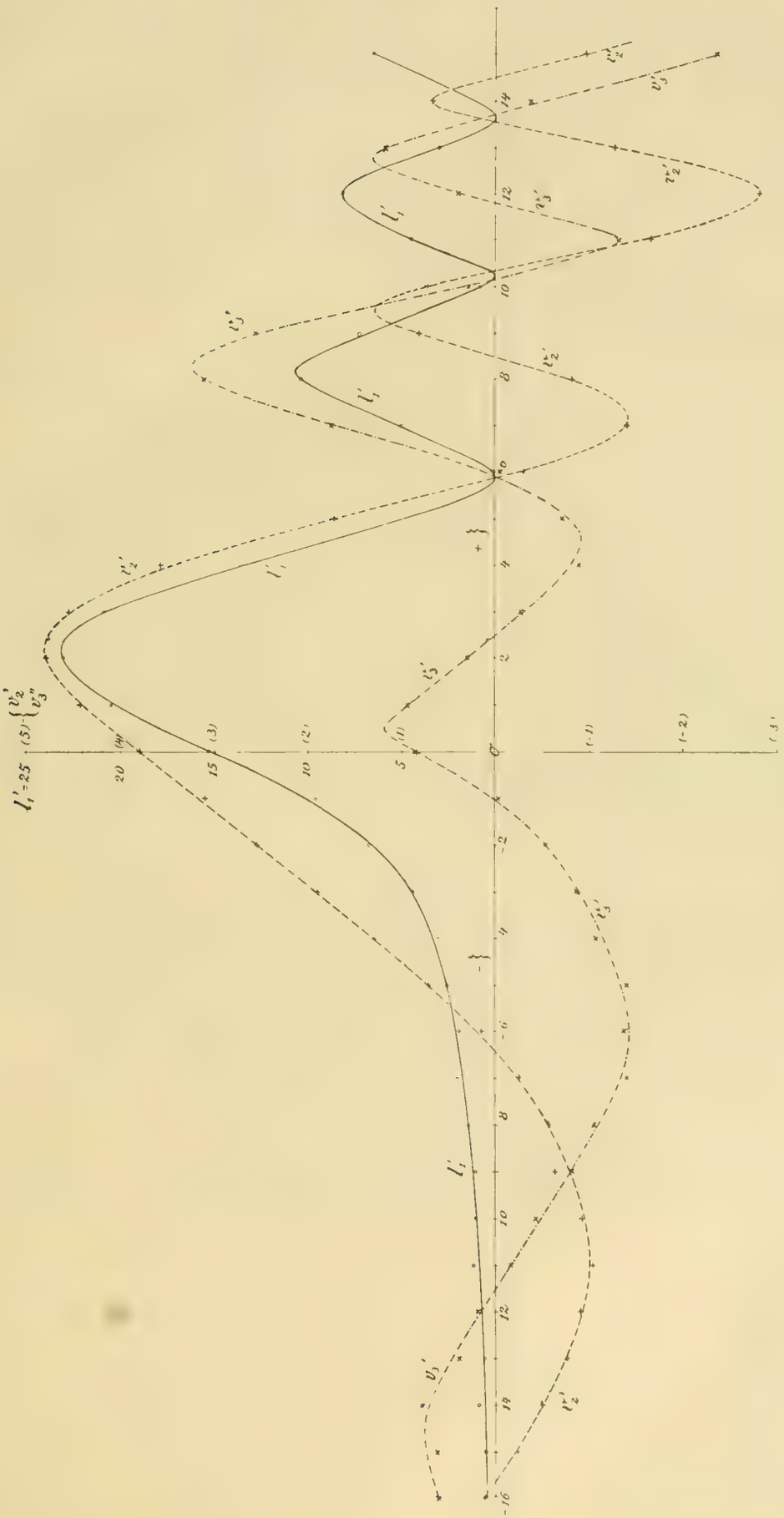


Fig. 10.

Die den Zahlen der Tabelle 10 entsprechenden Punkte wurden bezeichnet. Die stetig gezeichneten Kurven gehen nicht überall genau durch diese Punkte; grobe Abweichungen führten zur Entdeckung von Rechenfehlern; kleine Abweichungen blieben aber stehen; sie rühren davon her, dass meist nur zwei Werthstellen angewendet wurden, doch stimmt diese Genauigkeit mit derjenigen bei der Messung der Helligkeit überein, welche hier nur auf höchstens 1 : 50 angenommen werden kann; die Berechnung einer weiteren Werthstelle hätte bei dem Umfange der Rechnungen einen mit dem Nutzen einer etwas grösseren Genauigkeit nicht im Einklang stehenden Zeitaufwand verursacht.

Man bemerkt nun, dass die Kurven v'_2 und v'_3 in Wellenform um die Axe ξ herumlaufen, und dass abwechselnd ihre Schnittpunkte mit der ξ-Axe auf der positiven Seite im untersuchten Bereich nahezu zusammenfallen, während dies auf der negativen Seite der ξ nicht der Fall ist. Ich möchte daher auch nicht behaupten, dass das Zusammentreffen auf der positiven Seite ein genaues sei. Die Kurve l'_1 hat nur positive Ordinaten, deren Werth für positive ξ, d. i. auf der der Lichtquelle abgewendeten Seite, eine Reihe von Maxima besitzt, welche um so kleiner werden, je mehr ξ wächst. Das erste Maximum entspricht dem Hauptstreifen; es hat eine verhältnissmässige Lichtstärke $l'_1 = 23{,}2$ und liegt bei $\xi = 2{,}2$; der Streifen besitzt eine Breite von etwa 9. Die folgenden beiden Maxima haben nur noch eine verhältnissmässige Lichtstärke von 10, 8 und 8,2 und liegen bezw. bei $\xi = 8{,}2$ und 11,9; die Streifbreiten sind etwa $\triangle\xi = 4$. Die zwischenliegenden Minima

Tabelle 11.

Maxima (I, II, III) und Minima (1, 2, 3) der Helligkeit l_1 der Streifen und ihre verhältnissmässigen Abstände ξ von dem geometrischen Streifen bei dem Wasserstrahle für Orange.

Streifen	I	1	II	2	III	3
Abstand ξ	+ 2,2	5,9	8,2	10,2	11,9	13,7
$10^6\, l_1 : r^2$	23,2	0,0	10,8	0,0	8,2	0,0

haben eine Lichtstärke von Null oder nahezu Null und liegen bei $\xi = 5, 9;$ $10, 2;$ $13, 7.$ Die Werthe sind in Tabelle 11 zusammengestellt. Für negative ξ nähert sich l'_1 asymptotisch der ξ-Achse. Tab. 11.

39. Abhängigkeit der Winkel zwischen den Streifen und dem geometrischen Streifen von der Dicke des Wasserstrahls. Wir wollen nun annäherungsweise bestimmen, nach welchem Gesetz die Ablenkung der Streifen vom geometrischen Streifen abhängt von der Dicke $2r$ des Wasserstrahls. Für $r = 100\lambda$ fanden wir die zu $\xi = 1$ gehörige Ablenkung der Richtung AP von der Richtung nach dem geometrischen Streifen $\delta = -y : x = 31\frac{1'}{3}$ (Gl. 22, S. 60).

Aendert sich nun der Strahlhalbmesser r, so ändert auch die Wellenlinie $FDCGH$ (Fig. 5) ihre Gestalt, bleibt aber, weil sich die Winkel nicht ändern, ihrer ursprünglichen Gestalt ähnlich. Würde sich λ proportional mit r ändern, also $r : \lambda$ unverändert bleiben, so würden auch δ und ebenso die Winkelabstände $\delta_1 = \xi_1 \delta$ der verschiedenen Streifen vom geometrischen sich nicht ändern, wobei ξ_1 der zu irgend einem bestimmten Streifen gehörige Werth des ξ (Tab. 11) ist. Nun ändert sich aber λ mit der Farbe, und noch in viel höherem Grade wechselt r, und es fragt sich, wie ändert sich δ mit dem Verhältnisse $r : \lambda$.

Die wirksamsten Theile der Wellenlinie sind die Bogen CF und CG (Fig. 5) und derjenige Theil von GH, welcher mit CG bei G nahe zusammenfällt, während der übrige Theil von GH Wirkungen ausübt, die sich wegen der rasch wachsenden Abstände der Punkte dieses Bogens von der Sehne CD (Fig. 9) grossentheils aufheben. Dies bestätigen auch die ausgeführten Rechnungstabellen (vergl. Tab. 9). Am wirksamsten sind besonders bei kleinen ξ die dem Wendepunkte C zunächst liegenden Theile der Wellenlinie, so CF.

Diesen näheren Theil ersetzen wir nach dem Vorgange Airys durch eine Kurve der dritten Ordnung

$$x^3 = -m^2 r^2 y;$$

darin ist mr die Konstante der Gleichung und m eine absolut unveränderliche Zahl, welche auch bei wechselndem r ihren Werth nicht ändert.

Da die Gleichung in x, r und y homogen ist, so sind alle diese Kurven mit wechselndem r unter einander ähnlich; und dies wurde ja verlangt.
Fig. 11. Fig. 11 zeigt diese Kurve, deren Ast CD an die Stelle des Bogens CD der Fig. 9 tritt.

Wenn nun zu der Sehne CD, welche senkrecht auf der Richtung AP (Fig. 9) der Lichtübertragung steht, bei einem gewissen Werthe von r eine gewisse verhältnissmässige Helligkeit gehört, so findet bei einem andern Werthe von r dieselbe verhältnissmässige Helligkeit statt, wenn die Kurve der Schwingungsgeschwindigkeiten $C_1 E_3 D_1$ (Fig. 9) ihre Gestalt im wesentlichen beibehält, d. h. wenn nur die x oder die Längen CE_2, $CD \ldots$ sich unter einander proportional ändern, und dies tritt dann nahezu ein, wenn der wirksamste, also der bei dem Pole liegende Theil der Wellenoberfläche seinen Phasenunterschied gegen C nicht ändert. Der Pol ist aber der Punkt E, welcher von CD den grössten Abstand besitzt; und für diesen Punkt E muss daher das Verhältniss seines Abstandes von CD, oder das Verhältniss der EE_2 zu λ ungeändert bleiben. Dies würde streng richtig sein, wenn der wirksame Theil der Wellenoberfläche unendlich klein und die Lichtstärke in diesem Theile ungeändert bliebe, was in Wahrheit nur sehr angenähert zutrifft.

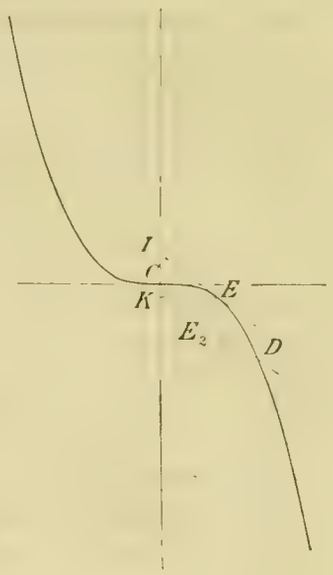


Fig. 11.

Zieht man nun in Fig. 11 die zu CD parallele Tangente der Kurve, welche in E berührt, schneidet sie mit der y-Axe in I, so ist, weil der Winkel der Sehne CD mit der x-Axe sehr klein, auch sehr nahe $IC = EE_2$. Dieser Abstand muss nach dem vorhin angegebenen bei wechselnden Werthen von r ungeändert bleiben. Es seien nun $CK = y$ und $KE = x$ die Koordinaten des Berührungspunktes E; durch Differentiation der Gleichung der Kurve $x^3 = -m^2 r^2 y$ erhält man

$$3x^2 dx = -m^2 r^2 dy,$$

daher

$$IK = x\frac{dy}{dx} = -3\frac{x^3}{m^2 r^2} = 3y,^{1})$$

und $IC = 2y$. Ist nun $\delta_1 = \xi_1 \delta$ die Abweichung der Stelle der betrachteten Helligkeit von der y-Axe oder von dem geometrischen Streifen gleich dem Winkel KEI, so gilt

$$\delta_1 = \xi_1 \delta = \frac{3y}{x}.$$

Ferner fanden wir, dass, für $\xi_1 = 1$, $IC : \lambda$ unveränderlich $(= k)$ sein soll, oder dass

$$\frac{2y}{\lambda} = k.$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit der obigen Gleichung der Kurve, geben

$$\delta^3 = -\frac{27}{4}\frac{k^2}{m^2}\frac{\lambda^2}{r^2},$$

oder wenn c eine Unveränderliche,

$$\delta = c\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2}.$$

Hierin bestimmen wir aber c, indem wir beachten, dass wir für $r : \lambda = 100$ gefunden haben $\delta = 0{,}00912 = 31\frac{1'}{3}$ (Gl. 22, S. 60), so dass auch

$$0{,}00912 = c\sqrt[3]{\left(\frac{1}{100}\right)^2},$$

und dies liefert mit der vorhergehenden Gleichung

$$\delta = 0{,}196\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2} = 674'\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2}. \qquad (24)$$

Diese Formel zeigt, dass δ und damit die Winkelabstände δ_1, δ_2 ... der Streifen vom geometrischen Streifen in umgekehrtem Verhältnisse zu den dritten Wurzeln aus dem Quadrate von $(r : \lambda)$, oder bei demselben λ,

---

[1]) Bei irgend einer Kurve ist in einem Punkte C mit 2-punktiger Berührung der Tangente (gewöhnlicher Punkt) bei obiger Bezeichnung und bei unendlich kleinem CE die $KI = 2y$, bei einem Punkte mit 3-punktiger Berührung (Wendepunkt, wie oben) $IK = 3y$, bei n-punktiger Berührung $IK = ny$.

d. i. derselben Farbe, aus dem Quadrate der Wasserstrahlhalbmesser stehen, dass sie also um so grösser sind, je kleiner die Strahlhalbmesser, z. B. 4,64 mal so gross, bei 10 mal so kleinem r.

40. Vergleichung der Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungen. Zur Benutzung bei den folgenden Vergleichungen seien in Tab. 12. der beistehenden Tabelle 12 die Wellenlängen und die Brechungskoefficienten des Wassers für einige Fraunhofer'sche Linien des Sonnenspektrums angegeben.

Tabelle 12.

Linien im Sonnenspektrum.	Wellenlänge λ in Millimetern.	Brechungskoefficient n des Wassers.
B Roth	0,000688	1,331
C Roth	656	1,332
D Orange	589	1,334
E Gelb	526	1,336
F zwischen Grün u. Blau	486	1,338
G Indigo	430	1,342
H Violett	396	1,344

Zur Vergleichung der hier gegebenen Theorie mit der Wirklichkeit stehen uns Versuche von Miller und Pulfrich zu Gebote. Miller[1]) hat nach dem Vorgange Babinets (Comptes rendus, Bd. 4, S. 638) Messungen an den Lichtstreifen ausgeführt, welche er an einem einzelnen dünnen aus einem vertikalen Röhrchen ausfliessenden Wasserfaden durch Sonnenbeleuchtung hervorbrachte, wobei er die Winkel der wechselnden Sehrichtung mit der Richtung nach dem Lichtflecke des ungebrochenen Sonnenlichtes mittelst eines um die Axenlinie des Wasserstrahles drehbaren kleinen Fernrohres maass. Er beobachtete entweder unmittelbar oder durch ein rothes vor das Okular gesetztes Glas, in welchem Falle er ziemlich gleichartiges Licht erhielt.

Miller hat drei Reihen von Beobachtungen für drei verschiedene Wasserstrahlen gemacht, und zwar solche, welche dem ersten und dem zweiten Regenbogen entsprechen. Wir wollen die für den ersten Fall vergleichen:

[1]) Miller, Prof. in Cambridge: Von den überzähligen Regenbogen. (Pogg. Annalen d. Phys. u. Chem., B. 53, 1841, S. 214, und B. 56, 1842, S. 558.)

bei ihnen hat er in den folgend verzeichneten Fällen der Reihe nach 14, 30, 22 dunkle Streifen beobachtet, welche sich vom ersten hellen bis zum letzten dunklen Streifen erstreckten von $\varphi = 40^0\ 50'$ bis $34^0\ 40'$, von $42^0\ 29'$ bis $30^0\ 24'$, von $43^0\ 8'$ bis 29^0.

I. Bei dem ersten Wasserstrahl war dessen Durchmesser $= 0{,}0206$ englische Zoll, also $r = \frac{1}{2} . 0{,}0206 . 25{,}4\ \text{mm} = 0{,}262$ mm, der Brechungskoefficient bei rothem Lichte $n = 1{,}3318$, daher der Abstand des geometrischen Streifens vom Gegenpunkte der Sonne (nach den Formeln 13 und 9) $\varphi = 42^0\ 15'$;

II. hier war $r = 0{,}267$ mm, $n = 1{,}3346$, $\varphi = 41^0\ 50'$;

III. $r = 0{,}171$ mm, $n = 1{,}3345$ bis $1{,}3348$, $\varphi = 41^0\ 50'$;

daraus ergiebt sich nach der Tab. 12 und Gl. 24

für I: $\lambda = 0{,}000662$ mm; $r : \lambda = 395$, $\delta = 674 : \sqrt[3]{395^2} = 12{,}5'$;

für II: $\lambda = 0{,}000570$ mm; $r : \lambda = 469$, $\delta = 11{,}2'$;

für III: $\lambda = 0{,}000570$ mm; $r : \lambda = 304$, $\delta = 14{,}9'$.

Miller hat vorwiegend die dunklen Streifen beobachtet, weil diese sicherer eingestellt werden können. Die Lichtgrenze auf der entgegengesetzten Seite (für negative ξ) ist sehr unsicher zu beobachten; wir dürfen sie nach Fig. 10 etwa dem $\xi = -4$ entsprechen lassen. Es ist wichtig die äussersten Werthe der wiederholten Beobachtungen anzuführen, weil diese zeigen, wie sehr dieselben schwanken. Wir haben die Beobachtungen von Miller und die Ergebnisse unserer Formeln in der Tabelle 13 zusammengestellt. Tab. 13.

Tabelle 13.

Abstände vom geometrischen Lichtstreifen am Wasserstrahle.

	I. Wasserstrahl		II. Wasserstrahl		III. Wasserstrahl	
	beobachtet von Miller	berechnet von Wiener	beobachtet von Miller	berechnet von Wiener	beobachtet von Miller	berechnet von Wiener
Grenze (verwischt)	—49′bis21′	—50′	—65′bis34′	—45′	—87′bis58′	—1°
Hellster Streifen	+17 „ 30	+27′	+17 „ 25	+25′	+20 „ 33	+33′
Dunkler Streifen 1	1°4′ „ 13′	1°14′	57 „ 61	1°6′	1°16′ „ 19′	1°28′
„ „ 2	1.56 „ 65	2.08	1°43′ „ 47	1.54	2.19 „ 22	2.32
„ „ 3	2.38 „ 48	2.51	2.22 „ 25	2.34	3.10 „ 12	3.25

Man bemerkt, dass unsere Rechnungsergebnisse meist nahe an der oberen Grenze der Messungsergebnisse liegen, theilweise innerhalb derselben, meist aber etwas ausserhalb derselben. Diese Abweichungen, die übrigens sehr klein sind, müssen wir zweifellos dem Umstande zuschreiben, dass die an die wirkliche Wellenlinie angeschlossene Kurve mit der Annahme einer gleichförmigen Helligkeit nur eine Annäherung ist, und dass dies deshalb auch von der Gl. 24 gilt. Hätten wir eine ganz sichere Prüfung unserer Theorie vornehmen wollen, so hätten wir die Rechnungen, welche zur Fig. 10 führen, für alle jene Werthe von $r:\lambda$ unmittelbar ausführen müssen.

Die Beobachtungen des Herrn Pulfrich[1]) wurden an Glascylindern angestellt, deren Dicke von 14 bis 38 mm, und deren Brechungskoefficienten von 1,6 bis 1,74 schwankten. Die ausgedehntesten Versuche bezogen sich auf den Cylinder von der Dicke von 14,7 mm ($r = 7{,}35$ mm) und dem Brechungskoefficienten für die Linie D von $n = 1{,}615$, wozu $\lambda = 0{,}0005893$ mm und der Ort des ersten geometrischen Streifens $\varphi = 166^0\,5'$ gehören. Diese Grössen weichen nun alle von denjenigen unseres Wasserstrahles bedeutend ab, für welchen $r = 100\,.\,\lambda = 0{,}06$ mm, $n = 1{,}333$, $\varphi = 137^0\,58'$. Obgleich der Glascylinder 122-mal so dick als der Wassercylinder, und die Brechungskoefficienten beider Stoffe so verschieden sind, wollen wir doch die Rechnung mit der Beobachtung vergleichen.

Es ist $r:\lambda = 7{,}35 : 0{,}0005893 = 12500$, daher, nach Gl. 24, $\delta = 674' : \sqrt[3]{12500^2} = 1,\,25'$. Hiermit und mit den Werthen der ξ in Tab. 11 sind die Abweichungen der hellen Streifen berechnet und mit den Beobachtungen des Herrn Pulfrich verglichen.

Heller Streifen	I	II	III
berechnet	2′ 45″	10′ 18″	14′ 54″,
beobachtet	2′ 18″	5′ 55″	10′ 09″.

Die Abweichung bei I mit $\frac{1}{5}$ ist nicht sehr erheblich, die bei III ist $\frac{1}{2}$, die bei II sogar $\frac{4}{5}$ der beobachteten Grössen; doch ist in Bezug auf diese Beobachtung zu bemerken, dass Herr Pulfrich für den II. Streifen bei der

[1]) Pulfrich, ein experimenteller Beitrag zur Theorie des Regenbogens und der überzähligen Bogen (Wiedemanns Annalen d. Phys. u. Ch., Bd. 33, 1888, S. 194).

zweiten Streifenschaar eine sogleich anzuführende verhältnissmässig grössere Zahl fand. Es ergiebt sich hieraus, dass die Formel 24 für sehr grosse Abweichungen des $r : \lambda$ von dem angenommenen Werthe 100, insbesondere bei den entfernteren Nebenstreifen nicht mehr angewendet werden kann.

In der Tab. 14 sind die Verhältnisse der Abweichungen vom geo- Tab. 14.
metrischen Streifen angegeben. Es sind auch die Rechnungsergebnisse von Airy zugefügt, und dessen Zahl 1,08 für den ersten hellen Streifen zu Grund gelegt; Airy hat seine Theorie für die Kugel aufgestellt, aber nur einen so kleinen Ring derselben vorausgesetzt, dass dieser als Cylinder behandelt wurde. Von Miller wurden die mittleren Beobachtungswerthe angeführt; die ziemlich gleichen Abstände des 1., 2. und 3. dunklen Streifens (1,99; 2,20) erlauben eine Einschaltung für die hellen; die Zahlen wurden in Klammern beigesetzt, um eine vollständigere Vergleichung zu ermöglichen.

Tabelle 14.

Verhältnissmässige Abstände der Streifen vom geometrischen Streifen bei Wasser- und Glas-Cylindern.

Streifen	beobachtet am Wassercylinder von Miller	beobachtet am Glascylinder von Pulfrich		berechnet für den Wassercylinder von Airy	berechnet für den Wassercylinder von Wiener
		am ersten Hauptstreifen	am zweiten Hauptstreifen		
I. heller	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08
1. dunkler	3,10			2,48	2,90
II. heller	(4,10)	2,78	3,54	3,47	4,03
2. dunkler	5,09			4,44	5,00
III. heller	(6,24)	4,76	5,52		5,85
3. dunkler	7,39				6,73

Diese Tabelle zeigt eine gute Uebereinstimmung meiner Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungen von Miller, was von der nahen Uebereinstimmung der vorausgesetzten und der vorhandenen Umstände herrührt. Zugleich wird durch die Tabelle bestätigt, dass selbst bei den weitaus anderen Verhältnissen bei Pulfrichs Beobachtungen doch die Verhältnisszahlen sich wenig ändern, wohl aber die absoluten Abweichungen, wie die vorhergehende Vergleichung zeigt.

Ich will noch ein interessantes Ergebniss mittheilen, welches Just in seiner S. 34 angeführten Schrift fand, dass sich nämlich die dritten Potenzen der Winkelabstände der dunklen Streifen vom geometrischen Streifen verhalten wie die Quadrate der Zahlen 3, 7, 11, 15, 19 . . .; die Abstände selbst also wie 2,08; 3,66; 4,95; 6,08; 7,12 . . . Vergleicht man diese Zahlen mit denen der Tab. 13, zunächst mit den Beobachtungen Millers, so findet man

nach Miller: 3,10; 5,09; 7,39,

nach jenen Verhältnissen: 3,10; 5,43; 7,38; 9,03; 10,6,

und mit meinen Rechnungen: 2,90; 5,00; 6,73,

nach jenen Verhältnissen: 2,90; 5,09; 6,88; 8,46; 9,92,

was mit Ausnahme für die zweite Zahl Millers befriedigend stimmt.

Als Gesammtergebniss der Vergleichungen dürfen wir aussagen, dass die von uns angegebene Theorie befriedigende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zeigt, und dass auch die Annäherungsformel (24), welche die Abweichungen δ aus dem Strahlhalbmesser r berechnet, bei nicht grosser Abweichung des $r:\lambda$ von 100 gut übereinstimmt. Der Satz aber, dass δ mit $\sqrt[3]{1:r^2}$ in Verhältniss steht, ist allgemein angenommen, und wird von Herrn Pulfrich[1]) Airy zugeschrieben; ich fand ihn übrigens in dessen Abhandlung nicht ausgesprochen.

Der Regenbogen und die überzähligen Bogen.

41. Die verhältnissmässige Lichtstärke l auf der Wellenoberfläche. Indem wir nun von den Cylindern der Wasserstrahlen zu den Kugeln der Wassertropfen übergehen, tritt, wie schon früher bemerkt, als Fig. 5. Wellenoberfläche an die Stelle des Cylinders, welcher die Wellenlinie $HGCF$ zum senkrechten Schnitte hat, eine Umdrehungsfläche, welche durch Umdrehung derselben Wellenlinie $HGCF$ um den nach der Sonne gerichteten Lichtstrahlendurchmesser AMB entsteht. Gelten die Bezeichnungen wie früher (S. 41), so ergiebt sich die Lichtmenge, welche auf den durch das Fig. 6. Element $BB_1 = r\,d\varepsilon$ bei seiner Drehung um den Sonnenhalbmesser MA

[1]) Am angeführten Orte, S. 207.

beschriebenen Ring der Tropfenoberfläche fällt, gleich

$$L\,2r\sin\varepsilon\,.\,\pi\,d\varepsilon\cos\varepsilon.$$

Diese Lichtmenge wird nach Gl. (15) durch zweimalige Brechung und einmalige Zurückwerfung geschwächt im Verhältniss von 1 zu

$$\frac{1}{2}\left[\alpha'(1-\alpha')^2+\alpha''(1-\alpha'')^2\right]=\alpha(1-\alpha)^2.$$

Die so geschwächte Lichtmenge wird auf dem von dem Elemente DD_1 der Wellenlinie beschriebenen Ringe vereinigt gedacht, dessen Breite

$$DD_1=ds=CC_1\cos\varepsilon\frac{r_2}{r_1}=r\,dx\,\frac{r_2}{r_1}\cos\varepsilon$$

ist, und dessen Halbmesser r'' sei, dessen Fläche sich daher ergiebt gleich

$$2r''\pi\,r\,dx\,\frac{r_2}{r_1}\cos\varepsilon.$$

Daraus folgt die Lichtstärke L_1 auf der Wellenoberfläche entlang des von D beschriebenen Kreises

$$L_1=\frac{L\,2r\sin\varepsilon\,.\,\pi\,r\,d\varepsilon\cos\varepsilon\,.\,\alpha(1-\alpha)^2}{2r''\pi\,r\,dx\,(r_2:r_1)\cos\varepsilon},$$

woraus sich die verhältnissmässige Lichtstärke ergiebt

$$l=\frac{L_1}{L}=\frac{r\sin\varepsilon}{r''}\,\frac{d\varepsilon}{dx}\,\frac{r_1}{r_2}\,\alpha(1-\alpha)^2. \tag{25}$$

42. Die Lichtübertragung auf einen entfernten Punkt P. Elemente der wirksamen Wellenoberfläche. Zur Bestimmung der Helligkeit, welche von der Wellenoberfläche auf einen entfernten Punkt P übertragen wird, dienen wieder die Gleichungen (19) (S. 55) für v_2 und v_3, wenn wir darin nur $v=\sqrt{l}$, bestimmt aus Gl. (25), einsetzen. Hier können wir aber nicht, wie früher bei der cylindrischen Wellenoberfläche, $df=dx\,.\,1$ setzen und somit durch eine einfache Integration v_2 erhalten. Wir müssen vielmehr die Umdrehungs-Wellenoberfläche durch eine zweifache Schaar von Linien in Elemente df zerlegen, so dass wir eine zweifache Integration zur Erlangung von v_2, sowie von v_3 durchführen müssen.

Die erste Zerlegung ist die schon betrachtete in Parallelkreisringe. Diese Ringe zerlegen wir dann weiter durch Kugeln, welche P zum Mittelpunkte haben, sich daher im Bereiche der Wellenoberfläche als Ebenen

darstellen. Diese Ebenen besitzen Abstände von einander gleich einem unendlich kleinen Zuwachse von $\triangle y$ oder $= d\triangle y$. Dabei haben wir unter $\triangle y$ den Abstand einer allgemeinen solchen Ebene von einer zu wählenden Ausgangslage der Ebenen verstanden (S. 53). Da nun die nach P gehende Richtung CP in Fig. 6 oder DD' in Fig. 4 mit dem einfallenden Lichtstrahle SB den Winkel φ bildet, so bildet sie mit den auf diesem Lichtstrahle senkrechten Parallelkreisebenen Winkel $90^\circ - \varphi$; und zwei jener Ebenen vom Abstande $d\triangle y$ schneiden eine Parallelkreisebene in Geraden vom Abstande $d\triangle y : \sin\varphi$.

Fig. 12.

In Fig. 12 ist ein Parallelkreis vom Halbmesser r'' und sind einige jener parallelen Schnittgeraden gezeichnet, darunter die allgemeine I_0I vom Abstande $\triangle y$. Die den Kreis in E berührende Parallele habe den Abstand $\triangle y_1$ von der Ausgangsebene. Der Abstand beider Geraden ist $EI_0 = (\triangle y - \triangle y_1) : \sin\varphi$. Bezeichnet man nun die Ordinate I_0I mit z, so ist, wenn die Wellenlänge und daher auch das höchstens gleich einer Wellenlänge genommene EI_0 klein gegen r'' sind,

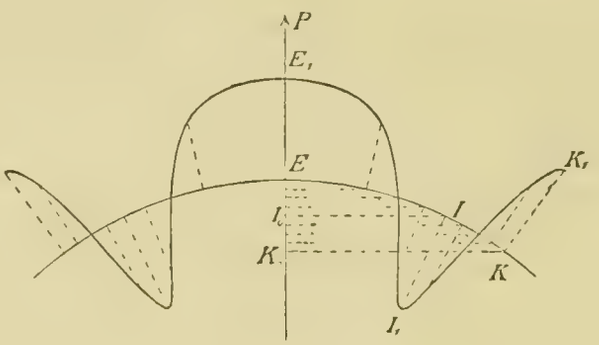


Fig. 12.

$$z = \sqrt{2r''(\triangle y - \triangle y_1) : \sin\varphi},$$

und

$$dz = \sqrt{\frac{r''}{2\sin\varphi}} \frac{d\triangle y}{\sqrt{\triangle y - \triangle y_1}} . \qquad (26)$$

dz dürfen wir auch als Element des Parallelkreises ansehen und die Breite des Parallelkreisringes $ds = dx$ setzen (wie a. S. 55), so dass $df = dx \,.\, dz$.

Indem wir nun nach der Art, wie auf S. 53, die Helligkeit auf der Wellenoberfläche übergehen lassen auf äussere Punkte P, nehmen wir diese in gleichen Abständen e, also auf einer zum Tropfen koncentrischen Kugel liegend an. Die aufnehmenden Elemente derselben sind Parallelkreisringe, denen wir eine gleichförmige Breite geben können, deren Halbmesser $e\sin\varphi$ aber mit der Ablenkung φ wechselt. Die Veränderung dieses Winkels φ

ist aber im allgemeinen gering, so dass wir die Formel (19) (S. 55) benutzen können, worin das aufnehmende Flächenelement unveränderlich angenommen ist. Wenn wir später auch einen bedeutenden Wechsel von φ stattfinden lassen, müssen wir eine entsprechende Korrektion vornehmen.

43. Das Doppelintegral zur Bestimmung der Helligkeit l_1 in P. Wir setzen nun den soeben erhaltenen Werth von df unter Beachtung der Gl. (26) und den Werth von $v = \sqrt{l}$ unter Beachtung von Gl. (25) in die zweite der Gleichungen (19) ein und erhalten

$$v_2 = \int\int dx \sqrt{\frac{r''}{2 \sin \varphi}} \frac{d \triangle y}{\sqrt{\triangle y - \triangle y_1}} \sqrt{\frac{r \sin \varepsilon}{r''} \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \alpha (1 - \alpha)^2 . \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}},$$

oder

$$v_2 = \int\int dx \sqrt{\frac{r}{2 \sin \varphi}} \frac{d \triangle y}{\sqrt{\triangle y - \triangle y_1}} \sqrt{\sin \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \alpha (1 - \alpha)^2 . \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}}. \quad (27)$$

Man bemerkt, dass r'' ganz aus dem Ausdrucke von v_2 ausgefallen ist. Es lässt sich dies leicht begreifen, da die Schwingungsgeschwindigkeit auf dem Parallelkreisringe umgekehrt, die Grösse des auf P wirkenden Flächenabschnittes dagegen direkt proportional mit $\sqrt{r''}$, also das Produkt aus beiden unabhängig von r'' sein muss. — Ganz entsprechend erhalten wir aus Gl. (19) das v_3, indem wir cos durch sin ersetzen.

Setzt man nun

$$z' = \sqrt{2r (\triangle y - \triangle y_1)}, \quad (28)$$

daher

$$dz' = \sqrt{\frac{r}{2}} \frac{d \triangle y}{\sqrt{\triangle y - \triangle y_1}}, \quad (29)$$

und setzt

$$v_0 = \sqrt{\sin \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \alpha (1 - \alpha)^2}, \quad (30)$$

so liefert die Gl. (27), wenn man beachtet, dass φ bei einer bestimmten für die Integration geltenden Richtung nach P unveränderlich ist, die folgende Gleichung, der wir dann entsprechend den Gleichungen (19) noch zwei andere beifügen:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \int dx \int dz' v_0 \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}, \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \int dx \int dz' v_0 \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}, \\ l_1 &= v_1^2 = v_2^2 + v_3^2. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Die erste Integration, nach dz', erstreckt sich über den Parallelkreis, die zweite, nach dx, über den Meridian der Wellenoberfläche; jede besitzt, wie früher, zu Grenzpunkten solche Scheitel der Kurven der auf P gleichzeitig einwirkenden Schwingungsgeschwindigkeiten, welche dem Ausgangspunkte benachbart sind: die erste Integration liefert die zwischen der Kurve $E_1 I_1 K_1$ (Fig. 12) und dem Kreisbogen EIK liegende Fläche. Weil aber die Faktoren $\sqrt{r''}$ gegen einander gestrichen und $\sqrt{\sin \varphi}$ vor das Integral gesetzt wurde, so entspricht die in Fig. 12 gegebene Abbildung nicht der Formel (29). Es hat vielmehr bei dieser Integration der Gl. (31) der Kreis EIK den unveränderlichen Halbmesser r, nicht den wechselnden r'', und die Koordinate des allgemeinen Punktes, von E aus gemessen, ist $EI_0 = \triangle y - \triangle y_1$ und nicht $(\triangle y - \triangle y_1) : \sin \varphi$. Die Ordinaten EE_1, II_1 in Fig. 12 sind

$$= v_0 \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda} = v_0 w; \quad w = \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}; \tag{32}$$

sie sind gleich der durch Formel (30) bestimmten Geschwindigkeit v_0, multiplicirt mit dem Cosinus der Phase. Vergleicht man die Formel (30) für v_0 mit der Formel (20) (S. 55) für die grösste Schwingungsgeschwindigkeit in dem ins Auge gefassten Punkte der Wellenlinie (wie EE_1 in Fig. 9 oder 12), so findet man

$$v_0 = v \sqrt{\sin \varepsilon}, \tag{33}$$

so dass wir leicht v_0 aus den v der Tabelle 8 durch Multiplikation mit dem zugehörigen Werthe von $\sqrt{\sin \varepsilon}$ berechnen können.

Da für die erste Integration (nach dz') v_0 unveränderlich, so bestimmen wir zuerst die Fläche

$$F = \int dz' \cos 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}. \tag{34}$$

Dies in Gl. (31) eingesetzt, giebt

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \int dx\, v_0 F. \tag{35}$$

44. Ausführung der ersten Integration. Die Ausführung der Integration von (34) geschah wieder durch mechanische Quadratur und wurde in einer Periode des Cosinus für 16 verschiedene Werthe des $\triangle y : \lambda$ in Intervallen von 1 : 16 ausgeführt. Die Fig. 12 stellt die halbe F als die

Fig. 12.

zwischen $E_1 I_1 K_1$ und EIK liegende Fläche für $\triangle y : \lambda = o$ oder gleich irgend einer ganzen Zahl vor, und Fig. 13 zeigt in etwas kleinerem Maassstabe Fig. 13. ebenfalls die halbe F für $\triangle y : \lambda = o$ oder $16 \cdot \frac{1}{16}$, sowie für $2 \cdot \frac{1}{16}, 4 \cdot \frac{1}{16}, \cdots 14 \cdot \frac{1}{16}$, wobei, wie die Rechnung voraussetzt, der Bogen EIK als Gerade behandelt wird. Die untere Grenze des z' und der $\frac{1}{2} F$ bildet der Punkt E und die Symmetrielinie EE_1, die obere dürfen wir, wie früher, in den Punkt K und in die Ordinate KK_1 des zweit-abliegenden Scheitelpunktes K legen und alle folgenden Wellen als sich nahezu aufhebend vernachlässigen. Diese

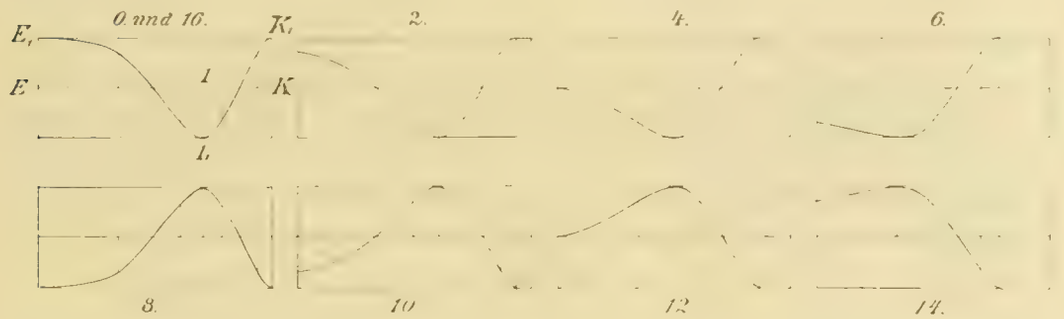


Fig. 13.

zweite Grenze wechselt mit $\triangle y$; die Grenzordinate geht aber stets durch den Scheitel der Wellenlinie, welcher von E um mehr als $\frac{1}{2}$ und höchstens um 1 ganze Welle entfernt ist.

Zur Ausführung trage man auf EI_0 die $EK_0 = \lambda = r : 100$ auf, und Fig. 12. theile sie in 16 gleiche Theile. Die zu dem $n$ten Theilungspunkte gehörige Ordinate ist dann nach Gl. (28), worin $\triangle y - \triangle y_1 = (n : 16)\,\lambda = (n : 16)\,(r : 100)$ wird,

$$z' = \sqrt{2r \frac{n}{16} \lambda} = \sqrt{\frac{2}{4}} \sqrt{n} \sqrt{r\lambda} = \sqrt{\frac{2}{40}} \sqrt{n \cdot r} \quad .$$

Aus zwei aufeinanderfolgenden Werthen z'_m, z'_n des z' ergiebt sich dann $\triangle z' = z'_n - z'_m$.

Sodann ist nach Gl. (32), da

$$\triangle y = \triangle y_1 + EI_0 = \triangle y_1 + \frac{n}{16}\lambda ,$$

$$w = \cos\ 2\pi\ \frac{\triangle y}{\lambda} = \cos\ 2\pi \left(\frac{\triangle y_1}{\lambda} + \frac{n}{16}\right). \tag{36}$$

Aus zwei aufeinanderfolgenden Werthen w_m, w_n des w, welche zu n_m und n_n gehören, ergiebt sich ihr mittlerer Werth $\frac{1}{2}(w_m + w_n)$. Nun wandelt man die Integration der Gl. (34) in eine Summirung endlicher Stücke um; indem wir diese aber nur von der Mitte E bis zum einen Ende K (Fig. 12) ausdehnen, müssen wir noch den Faktor 2 vorsetzen. Wir erhalten dann

$$F = 2\sum \triangle z' \frac{w_m + w_n}{2} = 2\sum (z'_n - z'_m) \frac{w_m + w_n}{2}. \tag{37}$$

Ist bei w_m ein Scheitel der Kurve $E_1\ J_1\ K_1$, so wird wieder statt $\frac{1}{2}\ (w_m + w_n)$ gesetzt $\frac{1}{3}\ (2w_m + w_n)$.

Tab. 15. Die Rechnung ist in Tabelle 15 ausgeführt. Dabei wurde aber für $n = 4$, statt dem nach obiger Formel bestimmten $z' = (\sqrt{4} : 4)\ (r : 10)\ \sqrt{2}$, angenommen $z'' = 1$, also im allgemeinen

$$z'' = z' : \frac{r}{10\ \sqrt{2}},$$

sodass nach dem obigen Ausdrucke von z' wird: $z'' = \sqrt{n : 4}$; ausserdem wurde nur die Fläche F' zwischen Mitte E und Ende K berechnet.

Sei nun:

$$F' = \sum \triangle z'' \frac{w_m + w_n}{2} = \sum (z''_n - z''_m) \frac{w_m + w_n}{2},$$

so wird, da $r = 100\lambda$ ist:

$$F = 2\frac{1}{2}\ \sqrt{2}\ \sqrt{r\lambda}\ F' = \sqrt{2}\ \sqrt{r\lambda}\ F'. \tag{38}$$

Tab. 15. In Tab. 15 enthält die erste aufrechte Reihe $n = 16\ (\triangle y - \triangle y_1) : \lambda$, wie vorhin angegeben. Die zweite Reihe enthält $z'' = \sqrt{n : 4}$, die dritte $\triangle z'' = z''_n - z''_m$. Die oberste wagrechte Zeile giebt die Bezeichnungszahl der Reihen, die zweite Zeile giebt 16 $(\triangle y_1 : \lambda)$ an, d. i. die Anzahl der in $\triangle y_1$ enthaltenen sechzehntel Wellenlängen (wie die n), und brauchte nur von 0 bis 8 durchgeführt zu werden, da von da an die Ergebnisse $\triangle F'$ nur mit entgegengesetzten Vorzeichen wiederkehren.

Tabelle 15.

Berechnung der Faktoren F'.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$16\triangle y_1 : \lambda$				0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	z''	$\triangle z''$	w	$\frac{w_m + w_n}{2}$									$\triangle F'$								
		0,		0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0	0,000		+1,000	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−
		500		975	852	599	255	128	491	779	962	975	488	426	300	128	064	246	390	481	488
1	0,500		+0,924	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−	−
		207		816	545	192	192	545	816	975	975	816	169	113	040	040	113	169	202	202	169
2	0,707		+0,707	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−
		159		545	192	192	545	816	975	975	816	545	087	031	031	087	130	155	155	130	087
3	0,866		+0,383	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−
		134		192	192	545	816	975	975	816	545	192	026	026	073	109	130	130	109	073	026
4	1,000		0,000	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+
		118		192	545	816	975	975	816	545	192	192	023	064	096	115	115	096	064	023	023
5	1,118		−0,383	−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+
		107		545	816	975	975	816	545	192	192	545	058	087	104	104	087	058	021	021	058
6	1,225		−0,707	−	−	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+
		098		816	975	975	816	545	192	192	545	816	080	095	095	080	053	019	019	053	080
7	1,323		−0,924	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	+
		091		975	975	816	545	192	192	545	816	975	089	089	074	050	017	017	050	074	089
8	1,414		−1,000	−	−	−	−	+	+	+	+		−	−	−	−	+	+	+	+	
		086		975	816	545	192	192	545	816	975		084	070	047	016	016	047	070	084	
9	1,500		−0,924	−	−	−	+	+	+	+			−	−	−	+	+	+	+		
		081		816	545	192	192	545	816	975			066	044	016	016	044	066	079		
10	1,581		−0,707	−	−	+	+	+	+				−	−	+	+	+	+			
		077		545	192	192	545	816	975				042	015	015	042	063	075			
11	1,658		−0,383	−	+	+	+	+					−	+	+	+	+				
		074		192	192	545	816	975					014	014	040	060	072				
12	1,732		−0,000	+	+	+	+						+	+	+	+					
		071		192	545	816	975						014	039	058	069					
13	1,803		+0,383	+	+	+							+	+	+						
		068		545	816	975							037	055	066						
14	1,871		+0,707	+	+								+	+							
		066		816	975								054	064							
15	1,937		+0,924	+									+								
		063		975									062								
16	2,000		+1,000																		
													+								
													937	742	519	315	195	205	218	232	250
													−								
													456	490	536	601	709	873	941	909	770
			$F' -$										+	+	−	−	−	−	−	−	−
													481	252	017	286	514	668	723	677	520
			Verbesserungen															+			
																		010	020	030	039
			Verbesserte F'										+	+	−	−	−	−	−	−	−
													481	252	017	286	514	658	703	647	481

Die vierte aufrechte Reihe giebt die Werthe von w nach Gl. (36) an, welche ebensowohl zu $\triangle y_1 = 0$ und den 16 vorkommenden Werthen von n, als auch zu $n = 0$ und den 16 vorkommenden Werthen von $16\triangle y_1 : \lambda$ gehören, d. i. auch der Reihe nach

$$\cos 0,\ \cos 22\tfrac{1}{2}^0,\ \cos 45^0 \ldots \cos 360^0.$$

Diese Reihe gilt also für $16\,(\triangle y_1 : \lambda) = 0$ und kann daher sogleich zur Berechnung der fünften aufrechten Reihe benutzt werden, welche für $16\,(\triangle y_1 : \lambda) = 0$ die Werthe von $\frac{1}{2}\,(w_m + w_n)$ oder die Mittel der beiden benachbarten Werthe von w der vierten Reihe enthält. Dabei ist zu beachten, dass als oberste Zahl, weil für $n = 0$ hier und stets ein Scheitel der Kurve $E_1\,J_1\,K_1$ (Fig. 12 u. 13) vorhanden ist, $\frac{1}{3}\,(2w_m + w_n) = \frac{1}{3}\,(2\,.\,1{,}000 + 0{,}924) =$ 0,975 eingetragen wurde.

Die sechste aufrechte Reihe enthält die Werthe von $\frac{1}{2}\,(w_m + w_n)$ für $16 \triangle y_1 : \lambda = 1$. Man erhält nach Gl. (34) hierfür die Werthe von w, indem man jedesmal den Winkel um $2\pi : 16$ vergrössert, oder die ganze aufrechte Reihe um eine Stufe hinaufschiebt. Dasselbe geschieht dann für die Werthe von $\frac{1}{2}\,(w_m + w_n)$, sodass man nur die fünfte Reihe um eine Stufe hinaufrücken muss, um die sechste zu erhalten. Nur bei $n = 0$ findet, wie bemerkt, stets ein Scheitel statt, sodass man hier immer $\frac{1}{3}\,(2w_m + w_n)$ einsetzen muss. Auf gleiche Weise erhält man die Reihen 7 bis 13 mit abnehmender Länge, übereinstimmend mit der abnehmenden Länge der Kurven 0 bis 8 in Fig. 13.

Die aufrechten Reihen 14 bis 22 enthalten die Werthe von $\triangle F'$; sie werden gewonnen durch die Vervielfachung der Werthe von $\frac{1}{2}\,(w_m + w_n)$ mit dem $\triangle z''$ derselben wagrechten Zeile.

Durch Addition der $\triangle F'$ in derselben aufrechten Reihe erhält man die Werthe von F'. Dabei erhält man für $16 \triangle y_1 : \lambda = 0$ und 8 bezw. $F' = + 0{,}481$ und $- 0{,}520$. Beide Werthe sollten absolut genommen gleich sein; der Unterschied rührt daher, dass die Genauigkeit der angenäherten Ergebnisse wegen Verminderung der beachteten Wellen abnimmt. Und da das erstere Ergebniss wegen des grösseren Bereiches der Summirung genauer ist, machten wir ihm das letztere gleich und dehnten die Verbesserung noch auf die drei vorhergehenden Zahlen mit gleichmässiger Vertheilung aus, wie der Schluss der Tabelle zeigt. Wir prüften noch die gewonnenen Zahlen durch eine Kurve, die hier nicht aufgezeichnet ist,

deren Abscissen die $16\triangle y_1 : \lambda$ und deren Ordinaten die F' waren, und fanden dieselbe stetig. Da nun in der folgenden Rechnung auch Bruchwerthe von $16\triangle y_1 : \lambda$ vorkommen, so habe ich durch Einschaltungen, welche durch die eben erwähnte Kurve stetig gemacht wurden, auch die Werthe des F' in Zwischenräumen von $\frac{1}{10}(16\triangle y_1 : \lambda)$ bestimmt, aber nur auf zwei Decimalen, welche den übrigen angewendeten Genauigkeiten entsprechen.

Ein kleiner Theil der dadurch gewonnenen Werthe von F', ausgedehnt bis zu $16\triangle y_1 : \lambda = 16$, sind in der Tabelle 16 niedergelegt. Tab. 16.

Tabelle 16.

Verzeichniss der zu $16\triangle y_1 : \lambda$ gehörigen Faktoren F'.

$16\triangle y_1 : \lambda$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
F'	0,+ 48	+ 38	+ 25	+ 12	− 02	− 15	− 29	− 40	− 51	− 59	− 66	− 69	− 70	− 68	− 65	− 58	− 48
$16\triangle y_1 : \lambda$	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5	16
F'	0,− 48	− 38	− 25	− 12	+ 02	+ 15	+ 29	+ 40	+ 51	+ 59	+ 66	+ 69	+ 70	+ 68	+ 65	+ 58	+ 48

45. Ausführung der zweiten Integration. Nun können wir nach Gl. (35)

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} \int dx \; v_0 \; F$$

berechnen, indem wir wieder die Integration durch eine mechanische Quadratur ersetzen; dabei tritt an die Stelle von dx die Differenz $\triangle x$ und an die Stelle von $v_0 F$ das Mittel je zweier benachbarten Werthe. Wir erhalten dann $\triangle x = x_n - x_m$, oder, indem wir die Zahlen der früheren Tabellen, welche $100x : r$ enthalten, benutzen wollen

$$\triangle x = \frac{r}{100}\left(100\,\frac{x_n}{r} - 100\,\frac{x_m}{r}\right) = \frac{\sqrt{r\lambda}}{10}\,100\,\frac{\triangle x}{r}.$$

Dabei mussten wir, wie in Gl. (21) (S. 60), um die Abhängigkeit des v_2 von r und λ zu erhalten, r durch $\sqrt{r^2} = \sqrt{r \,.\, 100\lambda} = 10\sqrt{r\lambda}$ ersetzen.

Ferner ist nach Gl. (33) $v_0 = v\sqrt{\sin \varepsilon}$, und da die Tab. 8 die Werthe von $10v$ enthält, setzen wir

$$v_0 = \frac{1}{10} \,.\, 10v \sqrt{\sin \varepsilon} = \frac{1}{10}\, v''.$$

Sodann sind in Tab. 15 die Werthe von F' enthalten; es ist aber nach Gl. (38)

$$F = \sqrt{2}\,\sqrt{r\lambda}\;F'.$$

Daher wird aus dem obigen Ausdrucke für v_2

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}} \sum \frac{\sqrt{r\lambda}}{10}\, 100\, \frac{\triangle x}{r}\, \frac{1}{10}\, \sqrt{2}\, \sqrt{r\lambda}\, \frac{1}{2} \left(v''_m F'_m + v''_n F'_n \right)$$

$$= \frac{r\lambda\sqrt{2}}{100}\, \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}} \sum 100\, \frac{\triangle x}{r} \cdot \frac{1}{2} \left(v''_m F'_m + v''_n F'_n \right).$$

Wir erleichtern uns diese Rechnung wesentlich, wenn wir das Mittel zweier benachbarten Produkte

$$\frac{1}{2} \left(v''_m F'_m + v''_n F'_n \right) = p$$

ersetzen durch das Produkt der mittleren Werthe der benachbarten Faktoren oder durch

$$\frac{1}{2} \left(v''_m + v''_n \right) \cdot \frac{1}{2} \left(F'_m + F'_n \right) = q.$$

Der Fehler (d. i. die Korrektion des fehlerhaften q) ergiebt sich dann als

$$p - q = \frac{1}{4} \left(v''_m F'_m + v''_n F'_n \right) - \frac{1}{4} \left(v''_m F'_n + v''_n F'_m \right) = \frac{1}{4} \left(v''_m - v''_n \right) \left(F'_m - F'_n \right).$$

Dieser Fehler verschwindet bei unendlich kleinen Intervallen $\triangle x$, da dann $v''_m = v''_n$ und $F'_m = F'_n$ wird; er ist aber auch bei unseren endlichen aber kleinen Werthen von $\triangle x$ von nicht erheblichem Einflusse. Wirklich erhielten wir durch beiderlei Rechnungsarten bei $\xi = 0$ (Bedeutung von ξ siehe S. 60) für jene Σ bezw. 14,37 und 14,26.

Es wird dann

$$v_2 = \frac{r\lambda}{10}\, \frac{\sqrt{2}}{10\,\sqrt{\sin\varphi}} \sum 100 \frac{\triangle x}{r}\, \frac{1}{2} \left(v''_m + v''_n \right) \frac{1}{2} \left(F'_m + F'_n \right) = \frac{r\lambda}{10} v'_2\,, \qquad (39)$$

wenn wir setzen:

$$v'_2 = \frac{\sqrt{2}}{10\,\sqrt{\sin\varphi}} \sum 100 \frac{\triangle x}{r}\, \frac{1}{2} \left(v''_m + v''_n \right) \frac{1}{2} \left(F'_m + F'_n \right).$$

Tabelle 17.

Berechnung der Faktoren $\frac{100}{r}\,\triangle x \cdot \frac{1}{2}\left(v''_m + v''_n\right) = \mathrm{AB}$.

$100\frac{x}{r}$	A $100\frac{\triangle x}{r}$	$10v$	$\sqrt{\sin\varepsilon}$	v''	B $\frac{v''_m+v''_n}{2}$	AB	$100\frac{x}{r}$	A $100\frac{\triangle x}{r}$	$10v$	$\sqrt{\sin\varepsilon}$	v''	B $\frac{v''_m+v''_n}{2}$	AB
−							+						
1,0	0,5	0,0	1,00	0,0	0,367	0,183	2	1	2,0	0,92	1,9	1,85	1,85
1,5	0,5	1,1		1,1	1,35	0,675	3	1	2,0		1,8	1,75	1,75
2	0,5	1,6		1,6	1,85	0,925	4	1	1,9	0,91	1,7	1,65	1,65
2,5	0,5	2,1		2,1	2,25	1,125	5	1	1,8		1,6	1,6	1,6
3	0,4	2,4		2,4	2,55	1,02	6	1	1,8	0,90	1,6	1,55	1,55
3,4	0,3	2,7		2,7	2,80	0,84	7	1	1,7		1,5	1,45	1,45
3,7	0,3	2,9	0,99	2,9	3,05	0,915	8	1	1,6	0,89	1,4	1,35	1,35
4	0,3	3,2		3,2	3,3	0,99	9	1	1,5		1,3	1,3	1,3
4,3	0,2	3,4		3,4	3,5	0,70	10	1	1,5	0,88	1,3	1,3	1,3
4,5	0,3	3,6		3,6	3,7	1,1	11	1	1,5		1,3	1,25	1,25
4,8	0,2	3,8		3,8	3,9	0,78	12	1	1,4	0,87	1,2	1,2	1,2
5,0	0,1	4,0		4,0	4,1	0,41	13	1	1,4		1,2	1,2	1,2
5,1	0,1	4,2		4,2	4,35	0,435	14	1	1,4	0,86	1,2	1,2	1,2
5,2	0,1	4,5		4,5	4,75	0,475	15	1	1,4		1,2	1,2	1,2
5,3	0,1	5,1	0,98	5,0	5,55	0,555	16	1	1,4	0,85	1,2	1,2	1,2
5,4	0,1	6,2		6,1	6,7	0,67	17	1	1,4		1,2	1,2	1,2
5,5	0,1	7,4		7,3	7,1	0,71	18	1	1,4	0,84	1,2	1,15	1,15
5,6	0,1	7,0		6,9	6,5	0,65	19	1	1,3		1,1	1,1	1,1
5,7	0,1	6,2		6,1	5,15	0,515	20	1	1,3	0,83	1,1	1,1	1,1
5,8	0,1	4,3		4,2	1,4	0,14	21	1	1,3		1,1	1,1	1,1
5,9	0,1	0,0	0,97	0,0	1,9	0,19	22	1	1,3	0,82	1,1	1,1	1,1
5,8	0,1	5,9		5,7	6,35	0,635	23	1	1,3		1,1	1,05	1,05
5,7	0,1	7,2		7,0	7,0	0,70	24	1	1,3	0,81	1,05	1,05	1,05
5,6	0,1	7,2		7,0	6,45	0,645	25	1	1,3		1,05	1,05	1,05
5,5	0,1	6,1		5,9	5,2	0,52	26	1	1,3	0,80	1,05	1,05	1,05
5,4	0,1	4,7	0,96	4,5	4,2	0,42	27	1	1,3		1,05	1,05	1,05
5,3	0,1	4,1		3,9	3,85	0,385	28	1	1,3	0,79	1,05	1,05	1,05
5,2	0,1	3,9		3,8	3,75	0,375	29	1	1,3		1,05	1,05	1,05
5,1	0,1	3,8		3,7	3,65	0,365	30	1	1,3	0,78	1,0	1,0	1,0
5,0	0,2	3,7		3,6	3,55	0,71	31	1	1,3		1,0	1,0	1,0
4,8	0,3	3,6		3,5	3,35	1,005	32	1	1,3		1,0	1,0	1,0
4,5	0,2	3,4	0,95	3,2	3,15	0,63	33	1	1,3	0,77	1,0	1,0	1,0
4,3	0,3	3,3		3,1	3,0	0,90	34	1	1,3		1,0	1,0	1,0
4	0,3	3,1		2,9	2,85	0,855	35	1	1,3	0,76	1,0	1,0	1,0
3,7	0,3	3,0		2,8	2,75	0,825	36	1	1,3		1,0	0,95	0,95
3,4	0,4	2,9		2,7	2,65	1,06	37	1	1,3	0,75	0,95	0,95	0,95
3	0,5	2,8	0,94	2,6	2,5	1,25	38	1	1,3		0,95	0,95	0,95
2,5	0,5	2,6		2,4	2,35	1,175	39	1	1,3	0,74	0,95	0,95	0,95
2	0,5	2,5		2,3	2,2	1,1	40	1	1,3		0,95	0,95	0,95
1,5	0,5	2,3		2,1	2,1	1,05	41	1	1,3	0,73	0,95	0,95	0,95
1	1	2,3	0,93	2,1	2,05	2,05	42	1	1,3		0,95	0,9	0,9
0		2,2		2,0			43	1	1,3	0,72	0,9	0,9	0,9
+ 1	1	2,1		1,9	1,95	1,95	44	1	1,3		0,9	0,9	0,9
2	1	2,0	0,92	1,9	1,9	1,9	45	1	1,3	0,71	0,9	0,9	0,9
							46		1,3		0,9		

Tabelle 18.

Berechnung der verhältnissmässigen Schwingungsgeschwindigkeiten in den Nebenregenbogen für $\xi = +6$.

$\frac{100}{r}x$	A B	$\frac{16}{y:\lambda}$	F'	$\frac{F'_m+F'_n}{2}$	$\frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi}\,\triangle v'_2$ +	$\frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi}\,\triangle v'_2$ −	$\frac{100}{r}x$	A B	$\frac{16}{\triangle y:\lambda}$	F'	$\frac{F'_m+F'_n}{2}$	$\frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi}\,\triangle v'_2$ +	$\frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi}\,\triangle v'_2$ −
—		+	0,(70)	0,(70)			—		+	+			
1,0		21,7	69				1,5		1,2	20			
1,5	0,183	19,0	29	29		0,05	1,0	1,05	0,9	28	24	0,25	
	0,675		+	+			0	2,05	0,0	48	38	0,78	
2,0		16,5	38	05	0,03		+		—				
2,5	0,925	14,0	70	59	0,55		1	1,95	0,9	64	56	1,09	
3,0	1,125	11,5	40	60	0,68		2	1,9	1,7	69	67	1,27	
3,4	1,02	9,5	12	14	0,14			1,85		(70)			
3,7	0,84	8,0	48	30		0,25	3	1,75	2,4	69	70	1,29	
4,0	0,915	6,6	68	58		0,53	4	1,65	3,2	64	66	1,16	
	0,99		(70)	69		0,68	5	1,6	3,9	53	59	0,97	
4,3		5,7	69				6	1,55	4,6	38	45	0,72	
4,5	0,70	5,3	68	69		0,48	7	1,45	5,2	23	31	0,48	
4,8	1,1	4,6	61	64		0,71	8	1,35	5,6	13	18	0,26	
5,0	0,78	4,3	56	59		0,46	9	1,3	6,1	01	06	0,08	
5,1	0,41	4,1	53	54		0,22	10	1,3	6,6	15	08		0,10
5,2	0,435	4,0	51	52		0,23	11	1,3	7,1	28	22		0,29
5,3	0,475	3,9	49	50		0,24	12	1,25	7,4	36	32		0,40
5,4	0,555	3,8	47	48		0,27	13	1,2	7,7	42	39		0,47
5,5	0,67	3,7	45	46		0,31	14	1,2	7,9	46	44		0,53
5,6	0,71	3,4	38	41		0,29	15	1,2	8,0	48	47		0,56
5,7	0,65	3,4	38	38		0,25	16	1,2	7,9	46	47		0,56
5,8	0,515	3,5	40	39		0,19	17	1,2	7,9	46	46		0,55
5,9	0,14	3,6	43	40		0,06	18	1,2	7,8	44	45		0,54
5,8	0,19	3,6	43	43		0,08	19	1,15	7,5	38	41		0,47
5,7	0,635	3,5	40	42		0,27	20	1,1	7,2	30	34		0,39
5,6	0,70	3,5	40	40		0,28	21	1,1	6,7	17	24		0,26
5,5	0,645	3,5	40	40		0,26	22	1,1	6,2	04	10		0,11
5,4	0,52	3,5	40	40		0,21				+	+		
5,3	0,42	3,4	38	39		0,16	23	1,1	5,6	13	05	0,05	
5,2	0,385	3,4	38	38		0,15	24	1,05	4,4	43	28	0,29	
5,1	0,375	3,4	38	38		0,14	25	1,05	4,1	49	46	0,48	
5,0	0,365	3,3	36	37		0,13	26	1,05	3,3	62	55	0,58	
4,8	0,71	3,3	36	36		0,26	27	1,05	2,3	69	66	0,69	
4,5	1,005	3,2	33	34		0,34		1,05		(70)			
4,3	0,63	3,1	31	32		0,20	28	1,05	1,3	67	69	0,72	
4,0	0,90	2,8	23	27		0,24	29		0,4	56	62	0,65	
3,7	0,855	2,7	21	22		0,17	30	1,0	+		42	0,42	
3,4	0,825	2,5	15	18		0,15	31	1,0	0,9	28	07	0,07	
3,0	1,06	2,2	07	11		0,12	32	1,0	2,4	13	31		0,31
	1,25		+	03		0,04	33	1,0	3,9	49	59		0,59
2,5		1,9	01	+				1,0	5,5	69			0,69
2,0	1,75	1,6	09	05	0,06		34	0,5	7,2	(70) 63	69 55		0,28
1,5	1,1	1,2	20	15	0,17		34,5		8,0	48			
												12,30	7,10
												1,63	8,42
					1,63	8,42							

$$\frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\varphi}\;v'_2 = -1{,}59 = 13{,}93 - 15{,}52.$$

Wir erreichen durch jene Umwandlung den Vortheil, dass wir den Faktor $100\frac{\triangle x}{r}\frac{1}{2}\left(v''_m+v''_n\right)=\mathrm{AB}$ für alle ξ nur einmal zu berechnen brauchen, da er nur von $\triangle x$ und nicht von ξ abhängt; es ist dies für die gewählten Intervalle in Tabelle 17 geschehen. Tab. 17.

Die Berechnung von v'_2 nach Gl. 39 geschieht in Tabellen, von denen diejenige für $\xi=+6$ als Tab. 18 mitgetheilt ist. Es ist hier zu $100x:r$ der Werth von $100\triangle x:r\cdot\frac{1}{2}\left(v''_m+v''_n\right)=\mathrm{AB}$ aus der Tab. 17 und der von $16\triangle y:\lambda$ aus der Tab. 9 übertragen; dann sind die F' nach den verzeichneten Werthen von $16\triangle y:\lambda$ aus der Tab. 16 eingetragen, welche Tabelle aber zur leichteren Benutzung auf Intervalle von 0,1 erweitert wurde; hiernach sind die $\frac{1}{2}(F'_m+F'_n)$ berechnet, und dann durch Multiplikation derselben mit AB die Werthe von $10:\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin\varphi}\ \triangle v'_2$ bestimmt; deren Summirung giebt dann $10:\sqrt{2}\ \sqrt{\sin\varphi}\ v'_2$. Bei $\xi=+6$ erhält man diesen Werth $=-1{,}59$.

Bei dieser Berechnung sind noch die Scheitel der Kurven besonders zu behandeln. Dies sollte zwar allein für den Faktor des $\triangle x$ in der Gl. (39) geschehen. Da aber dieser Faktor in zwei Theilfaktoren zerlegt und der eine mit $\triangle x$ verbunden wurde, so müssen die Scheitel der beiden Faktoren besonders behandelt werden. Der eine Theilfaktor $\frac{1}{2}\left(F'_m+F'_n\right)$ ändert sich am raschesten und hat die meisten Scheitel, in welchen (s. Tab. 16) $F'=0{,}70$ wird. Es wurden diese Scheitel in der früheren Weise berücksichtigt, indem wieder statt $\frac{1}{2}\left(F'_m+F'_n\right)$ gesetzt wurde $\frac{1}{3}\left(2F'_m+F'_n\right)$. — Der vereinte Theilfaktor AB hat zwei kleinste Werthe, welche Null sind, bei $100x:r=-1$ ($\varepsilon=90^0$) und bei $100x:r=-5{,}9$, indem hierfür $v''=0$ wird. Hier soll nach der ursprünglichen Formel $\frac{1}{3}\left(2v''_m F'_m+v'_n F'_n\right)$ genommen werden, was wegen $v'_m=0$ zu $\frac{1}{3}v''_n F'_n$ wird. Demgemäss ist hier $\frac{1}{2}\left(v''_m+v''_n\right)$ durch $\frac{1}{3}v''_n$ und $\frac{1}{2}\left(F'_m+F'_n\right)$ durch F'_n ersetzt. Dies ist in den Tabellen 17 und 18 beachtet.

In entsprechender Weise berechnet man nach der zweiten der Gleichungen (31) (S. 77) und nach Gl. (39) (S. 84) v'_3, indem man in den Rechnungen für v'_2 den Cosinus durch den Sinus ersetzt. Dadurch ändern

sich nur die zu $\triangle y$ gehörigen Werthe von F, indem sich die Gl. (34) (S. 78) in

$$F = \int dz' \sin 2\pi \frac{\triangle y}{\lambda}$$

verwandelt.

Dieses bestimmt man durch die Tabelle 16 der Cosinus, indem man, wie früher (S. 64), $16\triangle y : \lambda$ durch $4 - (16\triangle y : \lambda)$ ersetzt. Man erhält dann in der Weise der Tabelle 18 auch die Werthe von $(10 : \sqrt{2})\sqrt{\sin\varphi}\, v'_3$.

Die so erhaltenen Werthe müssen durch $(10 : \sqrt{2})\sqrt{\sin\varphi}$ getheilt werden, um v'_2 bezw. v'_3 zu ergeben. φ ist aber für den geometrischen Strahl oder für $\xi = 0$ das φ_3 der Seite 31, also $137^0\,58'$; für jede Einheit von ξ wächst φ bei $r = 100\lambda$ um $\delta = 31\frac{1}{3}'$ (S. 60), oder es ist

$$\varphi = 137^0\,58' + \xi \,.\, 31\tfrac{1}{3}'.$$

Tab. 19. Damit sind die Werthe von v'_2 und v'_3 berechnet und in die Tab. 19 eingetragen. Nun ist nach den Gleichungen (39) (S. 84) und (31) (S. 77)

$$l_1 = v_2^2 + v_3^2,\ v_2 = \frac{r\lambda}{10} v'_2,\ v_3 = \frac{r\lambda}{10} v'_3; \tag{40}$$

und indem wir

$$l'_1 = v'^2_2 + v'^2_3$$

setzen, erhalten wir

$$l_1 = \frac{r^2\lambda^2}{100} l'_1. \tag{41}$$

Nach dieser Gleichung ist die Helligkeit, welche ein Wassertropfen erzeugt, mit dem Quadrat seines Halbmessers proportional, wie sogleich einleuchtet, da hiermit die auf den Tropfen fallende Menge des Sonnenlichtes im Verhältniss steht. Dass nach Gl. (40) die vom Tropfen aus erzeugte Schwingungsgeschwindigkeit nur mit der ersten Potenz des Halbmessers proportional ist, kann für den ersten Augenblick befremden, da doch der Zuwachs dieser Geschwindigkeit mit dem Elemente der wirkenden Wellenoberfläche, also auch mit der Tropfenoberfläche proportional gesetzt wurde (Gl. 19. S. 55). Dies Ergebniss leuchtet aber ein, wenn man beachtet, dass eine lineare Erstreckung des EK (Fig. 12) des den Pol E umgebenden wirksamen Theiles der Wellenoberfläche gleich $\sqrt{2r\lambda}$ ist, worin r der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes jener Fläche in der Richtung

jener Erstreckung, und dass daher die wirksame Fläche mit $r\lambda$ proportional, wenn diese Fläche nicht abwickelbar wie beim Tropfen (Gl. 40), dagegen nur mit $\sqrt{r\lambda}$ proportional, wenn sie abwickelbar ist wie bei dem Cylinder des Wasserstrahles (S. 63).

46. Die Helligkeitskurve in der Nähe des geometrischen Regenbogens und die überzähligen Bogen. Wir haben aber, da es uns zunächst nur auf die verhältnissmässige Helligkeit ankommt, die Werthe von l'_1 berechnet und in Tab. 19 eingetragen, und mittelst dieser Tabelle in Tab. 19.

Tabelle 19.

Komponenten v'_2 und v'_3 der verhältnissmässig grössten Schwingungsgeschwindigkeiten und die Helligkeit l'_1 in den Abständen ξ vom geometrischen Regenbogen für Orange.

ξ	−16	−15	−14	−13	−12	−11	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
v'_2	−0,513	0,698	0,799	0,906	0,796	0,653	0,434	0,037	+0,453	0,896	1.322	1,679	2,038	2,248	2,508	2.565	2,406
v'_3	+0,414	0,304	−0,013	0.363	0,645	0,874	1,120	1,322	1,322	1,138	0,976	0,547	0,126	+0,970	1,648	2,539	3,556
l'_1	0,43	0,58	0,64	0,95	1,05	1,20	1,42	1,72	1,93	2,09	2,70	3,12	4,17	5,99	9,01	13,02	18,45

ξ	+1	2	2,4	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v'_2	+2,702	3,426	3,652	3,640	3,326	1,831	−0,284	2,562	3,132	1,658	+0,170	−0,278	2,452	1,915	+0,854	1,173
v'_3	+4,330	4,225	4,180	3,592	2,460	0,992	−0,055	+0,301	1,808	2,422	0,682	−2,317	2,150	0,414	+0,017	−2,686
l'_1	26,04	29,61	30,82	26,20	17,13	4,33	0,08	6,65	13,07	8,61	0,46	5,45	10,63	3,80	0,73	8,59

Fig. 14 die Kurven v'_2, v'_3, l'_1 gezeichnet. Diese Kurven sind stetig gezogen und gehen, wie man bemerkt, nicht genau durch alle aus der Tabelle bestimmten Punkte, besonders zeigen sich bei $\xi = 2$ und 2,4 Abweichungen, die wir durch Wiederholung der Rechnung nicht beseitigen konnten und die in der etwas geringen Anzahl der beibehaltenen Ziffern ihren Grund haben dürften. Wir haben durch einen stetigen Zug ausgeglichen. Die Figur entspricht der für den Wasserstrahl geltenden Fig. 10. In beiden Figuren sind die Fig. 14.

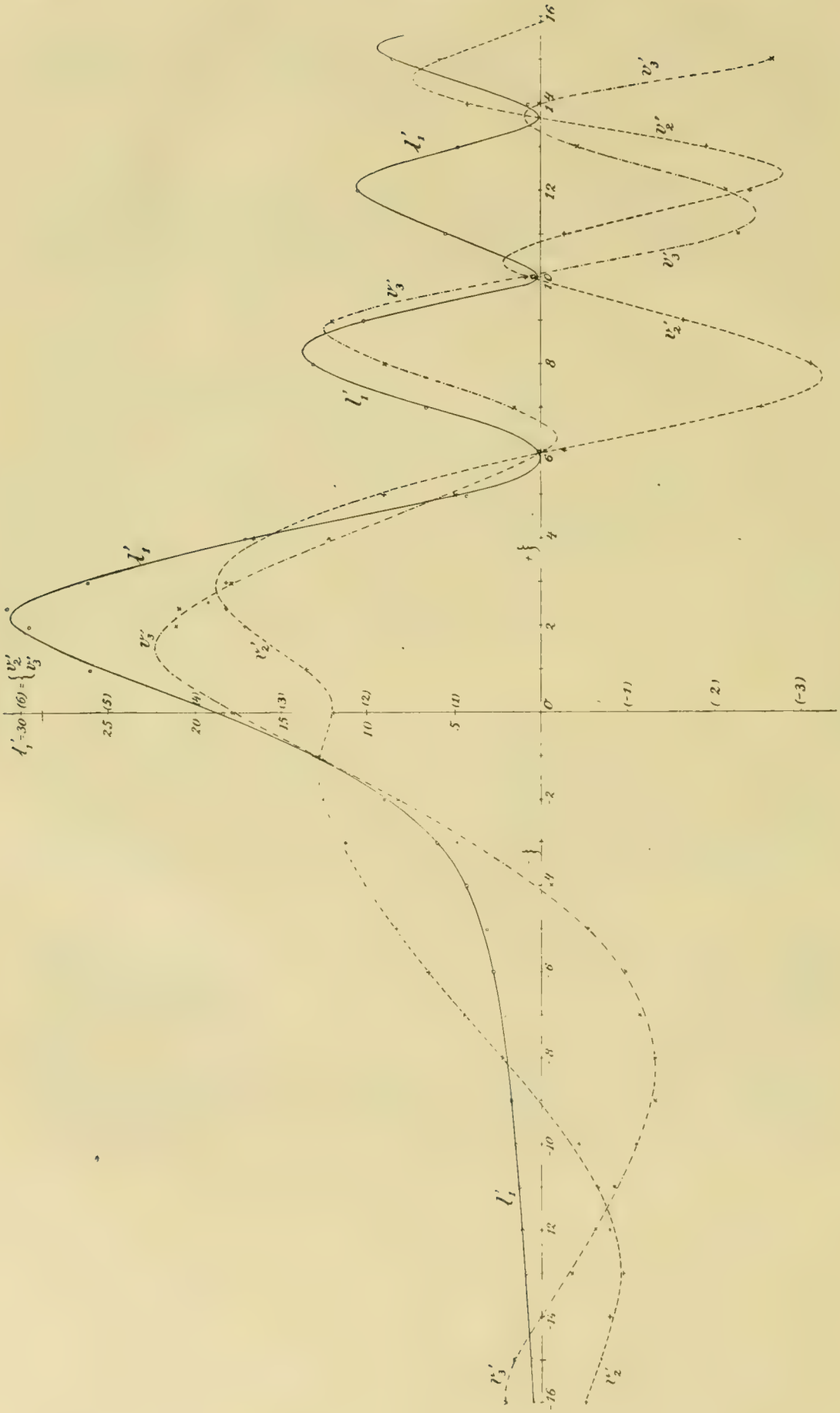

l_1'
v_2'
v_3'
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
(6)
(5)
(4)
(3)
(2)
(1)
(-1)
(-2)
(-3)
30
25
20
15
10
5
0

Fig. 14.

Kurven v'_2 und v'_3 wesentlich verschieden, die daraus entspringenden Kurven der l'_1 sind anscheinend untereinander affin, indem die zu derselben Abscisse ξ gehörigen Ordinaten l'_1 in unveränderlichem Verhältnisse stehen; sie stimmen also überein, da es nur auf die Verhältnisse ankommt.

Bestimmt man nun aus Fig. 14 die Maxima und Minima der Helligkeit l'_1 so erhält man die Tabelle 20 der Werthe von ξ und der zugehörigen Werthe von l'_2. Tab. 20.

Tabelle 20.

Maxima (I, II, III) und Minima (1, 2, 3) der Helligkeit l'_1 des ersten Regenbogens (I) und seiner überzähligen Bogen und ihre verhältnissmässigen Abstände ξ vom geometrischen Regenbogen für Orange.

Bogen	I	1	II	2	III	3
Abstand ξ	+ 2,2	5,9	8,2	10,2	12,1	13,7
Helligkeit l'_1	30,6	0	13,9	0,11	10,9	0,05

Diese Tabelle stimmt fast genau mit der entsprechenden Tab. 11 überein.

Was zuerst ξ anbelangt, so liefern

	I	1	II	2	III	3
Tab. 11)	2,2	5,9	8,2	10,2	11,9	13,7
Tab. 20)	2,2	5,9	8,2	10,2	12,1	13,7.

Die einzige Abweichung des 12,1 von 11,9 liegt wohl innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Rechnung. Bringt man andererseits die l'_1 auf dieselben zu I gehörigen Anfangszahlen, so erhält man aus

	I	1	II	2	III	3
Tab. 11)	23,2	0,0	10,8	0,0	8,2	0,0
Tab. 20)	23,2	0,0	11,1	0,11	8,3	0,05,

Zahlen, die sehr nahe übereinstimmen.

Man findet also die Ergebnisse für den Wasserstrahl und die Wassertropfen sehr nahe übereinstimmend, obgleich noch entferntere Theile von dem Wendepunkte C der Wellenlinie (Fig. 5) in merklicher aber verschiedener

Weise einwirken. Beim Tropfen scheinen die Minima 2 und 3 nicht vollständig Null zu sein.

Die Ergebnisse über die Abstände der Streifen am Wassercylinder von dem geometrischen Streifen dürfen wir ebenso von dem Regenbogen und seinen Nebenbogen gelten lassen, weil wir für $r = 100\ \lambda$ dieselben Abstände gefunden haben. Messungen sind mir nur solche bekannt, die an den Regenbogen, nicht aber solche, die an den überzähligen angestellt wurden. Galle[1]) maass mehrmals die Abstände verschiedener Farben des ersten Regenbogens von der Sonne und fand für Roth 138° 1,5′; 138° 8,9′; 137° 38,8′. Nach S. 71 ist für Roth bei dem Brechungskoefficienten $n = 1{,}3318$ der Abstand des geometrischen Bogens von der Sonne $= 180° - 42°\ 15′ = 137°\ 45′$. Die Abweichungen hiervon wären also 16,5′; 23,9′; — 6,2′; und da hierunter auch eine negative, was in Wahrheit unmöglich, so ist eine genaue Vergleichung werthlos. Der Mangel liegt entweder in der Unkenntniss des zu dem beobachteten Roth gehörigen n oder in der Ungenauigkeit der Winkelangaben, die mittelbar aus Messungen gegen terrestrische Gegenstände und aus Zeitbestimmungen abgeleitet wurden.

47. Abhängigkeit der Abstände zwischen den überzähligen Bogen und den geometrischen Bogen von der Tropfendicke und die Bedingungen für das Zustandekommen der überzähligen Bogen und des Hauptregenbogens. Da die Gleichung (24) (S. 69), welche die Beziehung zwischen den Winkelabständen der Streifen und der Wasserstrahldicke darstellt, auch für die Regenbogen und die Wassertropfen gilt, so können wir mit ihrer Hülfe die Grösse der Tropfen bestimmen, bei welchen ein überzähliger Regenbogen sichtbar wird. Die ungefähre Breite des ganzen Regenbogens beträgt 2° (S. 32); daher muss der Abstand einer Farbe im ersten und im zweiten Bogen, damit diese Bogen durchweg getrennt erscheinen, ebenfalls 2° sein. Ferner ist der Abstand des I. und II. Lichtmaximums nach Tab. $20 = 8{,}2\,\delta - 2{,}2\,\delta = 6{,}0\,\delta$; somit folgt aus Gl. 24 (S. 69)

$$6{,}0\ .\ 674′ \sqrt[3]{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2} = 2° = 120′,$$

[1]) Galle, Messungen des Regenbogens. Pogg. Annalen d. Phys. u. Chem., Bd. 63, 1844, S. 342.

also ist $\lambda : r = 0{,}0051$, und für $\lambda = 0{,}0006$ mm, $r = 0{,}117$ mm, $2r = 0{,}234$ mm.

Ein überzähliger Bogen erscheint daher deutlich getrennt, wenn die Durchmesser der Regentropfen etwa gleich $\frac{1}{4}$ mm oder kleiner sind.

Hiermit wäre der Regenbogen mit den überzähligen Bogen erklärt. Wir haben den Abstand des farbigen Hauptbogens vom geometrischen Bogen $\xi = 2{,}2\,\delta = 2{,}2 \,.\, 674' \sqrt[3]{\lambda^2 : r^2}$ gefunden (Gl. 24 u. Tab. 20). Daher ist bei Orange, wofür $\lambda = 0{,}0006$ mm, und bei $r = 100$ $\lambda = 0{,}06$ mm, $\xi = 2{,}2 \,.\, 31{,}33' = 1^0\,9'$. Da aber die Regentropfen grösser sind, so wird für sie der Abstand kleiner, es wird für

$r = 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4$ mm,
$\xi = 10{,}6;\ 6{,}7;\ 5{,}1;\ 4{,}2$ Minuten.

Dieses sind aber Grössen, die bei Regentropfen vorkommen. Da nun die Tropfen nicht gleich gross sind, so werden viele Regenbogen an verschiedenen Stellen hervorgebracht, und es wird daher eine Mischung der Farben stattfinden. Dieselbe tritt jedoch bei gleichzeitigem Vorhandensein von Tropfen der eben bezeichneten Halbmesser nur schwach auf, d. h. die Farben werden doch noch deutlich getrennt erscheinen, da hier die Ueberdeckung nur $10{,}6' - 4{,}2'$ oder etwa $6'$, dagegen die ganze Breite des Regenbogens etwa 2^0 beträgt. Anders ist es aber bei den sehr kleinen Tröpfchen, die im Nebel oder gar bei klarem Himmel vorhanden sind. Beim Nebel ist nach S. 58 r von 0,003 bis 0,008 mm, bei feinem Regen von 0,05 bis 0,3 mm und darüber gemessen worden. Für solche Maasse erhält man aber

für $r = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}001$ mm
$\xi = 16{,}8;\ 49{,}3;\ 77{,}0;\ 228;\ 362;\ 1060$ Min.

Der Abstand ξ schwankt also von etwa $\frac{1}{4}{}^0$ bis 18^0. Nimmt man nun an, dass bei klarer Luft der Halbmesser r höchstens das Maass der kleinsten Tröpfchen des Nebels mit 0,003 mm, d. i. die fünffache Wellenlänge erreiche und vielleicht bis zur einfachen $= 0{,}0006$ mm und noch darunter herab gehe, so würde

für $r = 0{,}003;\quad 0{,}0006$ mm,
$\xi = 508;\quad 1490$ Min.

sein, wobei zu beachten, dass für die kleinsten Maasse unsere Formel nicht mehr genau zutrifft, aber doch einen ungefähren Anhalt giebt. Es würde also ein Schwanken von $8\frac{1}{2}$ bis 25^0 und darüber stattfinden, daher ein vollständiges Vermischen der Farben eintreten, wie auch in Wirklichkeit bei klarem Himmel nichts mehr von einem Regenbogen beobachtet wird.

III. Berücksichtigung der Verschiedenheit der Tropfengrösse und das Gesetz der Zerstreuung des Lichtes durch Rückstrahlung und Brechung an Wassertropfen.

48. Verwaschung der farbigen Bogen durch kleine Tröpfchen von verschiedener Grösse. Um die entstehende Lichtzerstreuung für einen der unendlich vielen möglichen Fälle zu bestimmen, wollen wir zunächst die Verhältnisse für die verschiedenen Tropfenhalbmesser $r : \lambda = 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}$ untersuchen. Es sind dann nach Gl. (24) (S. 69) die Abstände des hellsten vom geometrischen Ringe $\xi = 2{,}2\,\delta$, also für

$r : \lambda =$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$,
$\xi = 2{,}2\,\delta =$	$9^0\ 50'$	11.54	15.37	24.50	39.30.

Die grösste verhältnissmässige Helligkeit l'_1 hatten wir für $r = 100\,\lambda$ nach Tab. 20 gleich 30,6 gefunden. Die Gleichung (41) (S. 88) ist aber

$$l_1 = \frac{r^2\,\lambda^2}{100}\,l'_1\ ,$$

woraus für $r = 4\,\lambda$ und $l'_1 = 30{,}6$, $l_1 : \lambda^4 = 4{,}93$ wird. Man gewinnt nun aus der für $r = 100\,\lambda$ geltenden Kurve der Helligkeiten l'_1 der Fig. 14 die für $r = 4\,\lambda$ geltende affine Kurve, wenn man die Abscissen im Verhältniss von 2,2 zu $9^0\ 50'$, die Ordinaten im Verhältniss von 30,6 zu 4,93 verändert. Diese Kurve ist in Fig. 15 eingetragen und mit der Ziffer 4 bezeichnet.

In übereinstimmender Weise könnte man die Kurven für die anderen kleineren Werthe des r zeichnen, deren Ordinaten $l_1 : \lambda^4$ im Verhältniss der Quadrate der Halbmesser, oder im Verhältniss der Oberflächen kleiner würden. Da die grösseren Tropfen durch Wachsen, aber auch durch die Vereinigung der kleineren entstehen, so dürften die kleineren in grösserer Anzahl vorhanden sein. Nehmen wir ihre Anzahl in demselben Verhältniss grösser

an, in welchem die Oberfläche eines einzelnen kleiner wird, so wären die Gesammtoberflächen der Tropfen von übereinstimmender Grösse die gleichen bei den verschiedenartigen Tropfen, wodurch auch die von jeder dieser Arten erzeugte Helligkeit dieselbe wäre. Denn wirklich, bezeichnen wir den zu einem Tropfen vom Halbmesser $r = 4\lambda$ gehörigen Werth $i_1 : \lambda^4$ mit (i_1), so ist der zu einem Tropfen vom Halbmesser r gehörige nach obiger Formel

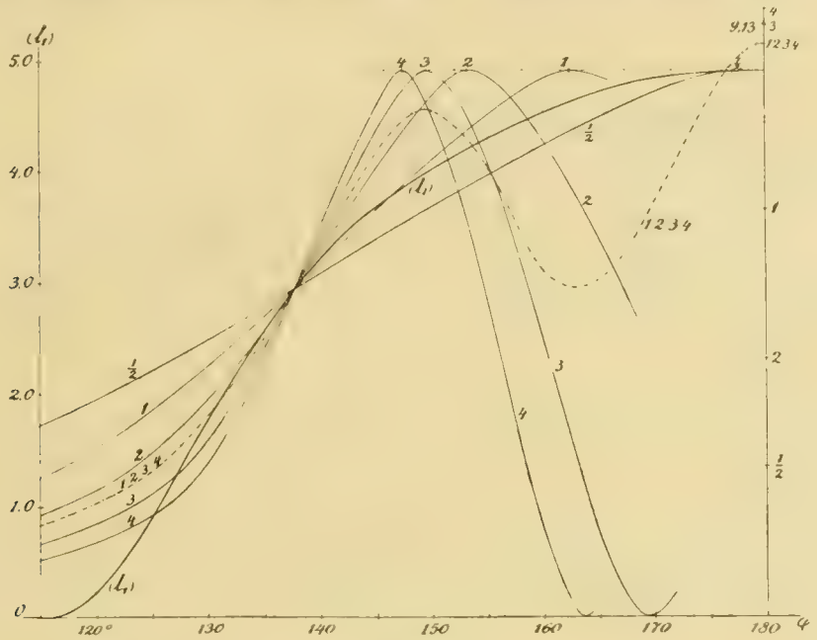


Fig. 15.

$= (i_1)\ (r : 4\lambda)^2$, der zu $(4\lambda : r)^2$ solcher Tropfen gehörige wieder (i_1); für die hellste Stelle gilt daher stets $i_1 : \lambda^4 = 4{,}93$, wie sich oben für $r = 4\lambda$ ergab. Daher geben wir allen Kurven dieselben Ordinaten und verändern nur die Abscissen. So sind mit den oben gegebenen Werthen von ξ ausser der Kurve 4 noch die mit 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ bezeichneten zugefügt.

Nimmt man nun an, dass gleichzeitig Tröpfchen von den Halbmessern $r = 4\lambda$, 3λ, 2λ, 1λ vorhanden seien, mit gleicher Gesammtoberfläche bei jeder Art, so wird die mittlere Wirkung aller dargestellt durch die zu dem Mittel der vier ineinander liegenden Ordinaten gehörige gestrichelte Kurve. Dieselbe kann aber vorerst nur bis zu einem Abstand von 20° oder etwas mehr vom geometrischen Bogen, für welchen $\varphi = 137^\circ\,58'$ ist, an-

gegeben werden, also etwa von $\varphi = 116^0$ bis $\varphi = 160^0$. Denn Miller beobachtete bei einem Wassercylinder (S. 71) den äussersten (den 22ten) dunklen Streifen in einem Abstande von 13' vom geometrischen Streifen, so dass die verwaschenen Streifen noch etwas weiter reichen. Um für den weiteren Verlauf der Kurve der mittleren Helligkeit noch einen Anhalt zu gewinnen, ist noch die Helligkeit für $\varphi = 180^0$ ursprünglich zu berechnen, was aber in wesentlich anderer Weise wie in der Nähe des Regenbogens geschehen muss.

49. Die Helligkeit im Gegenpunkte der Sonne. Um diese zu bestimmen, beachten wir, dass für $\varphi = 180^0$ die Richtung des zurückgeworfenen Lichtes BLA gerade der des ankommenden entgegengesetzt, dass also der Pol der Wellenoberfläche ihr Schnittpunkt L mit ihrer Drehaxe BA ist. Wir nehmen dabei, entsprechend dem früheren, LB als y-Axe an, wobei aber L der Ursprung und LB die $+ y$-Axe sei, sodass die Grössen, die wir früher auf S. 53 und in Gl. 19 mit $\triangle y$ bezeichnet haben, jetzt y werden; die x-Axe steht in L senkrecht auf LB und sei positiv gegen K hin.

Wir müssen nun vorerst die Koordinaten der bestimmten Punkte der Wellenlinie, welche früher auf den Ursprungspunkt C bezogen waren, auf L übertragen. Bezeichnen wir vorübergehend die neuen auf L bezogenen Koordinaten mit x' und y', so müssen wir die in Tab. 3 gegebenen alten Koordinaten in neue überführen. Seien $x' = a$, $y' = b$ die neuen Koordinaten von C, so ist zunächst LM durch Messung auf der vergrösserten Zeichnung ermittelt, womit die sogleich sich ergebende Probe übereinstimmt, und $LM : r = 0{,}229$ gefunden; für C ist sodann (nach Tab. 3) $\varkappa = 258^0\ 35'$, sodass die neuen Koordinaten von C sind:

$$\frac{a}{r} = -\sin \varkappa = 0{,}980,$$

$$\frac{b}{r} = 0{,}229 - \cos \varkappa = 0{,}427.$$

Ferner ist für C (nach Tab. 3) $\varphi = 137^0\ 58'$, und dies ist der Winkel der y- und der y'-Axe; daher ist

$$\frac{x'}{r} = \frac{a}{r} + \frac{x}{r}\cos\varphi + \frac{y}{r}\sin\varphi,$$

$$\frac{y'}{r} = \frac{b}{r} - \frac{x}{r}\sin\varphi + \frac{y}{r}\cos\varphi.$$

Mittelst dieser Formeln erhalten wir die neuen Koordinaten x', y', die wir nun aber auch mit x, y bezeichnen wollen; dieselben sind in Tab. 21 eingetragen. Tab. 21.

Tabelle 21.

Die auf neue Axen bezogenen Koordinaten der Wellenlinie.

Punkt	L	K	J	F	E	D	C	G	H
$x:r$	0,000	213	419	609	769	899	980	1,026	0,979
$y:r$	0,000	018	072	156	255	357	427	466	444

Zur Bestimmung der Helligkeit im Gegenpunkte P der Sonne benutzen wir die Gleichungen (19) (S. 55), worin wir jedoch, wie schon bemerkt, $\triangle y$ durch y ersetzen. Die Flächenelemente df von gleichförmigem Abstande von P sind Parallelkreisringe der Wellenfläche vom Halbmesser x, beschrieben von einem Elemente der Wellenlinie, dessen Neigung gegen die x-Axe $= \varphi$, dessen Länge daher $dx : \cos\varphi$ ist, so dass

$$df = 2x\pi\,\frac{dx}{\cos\varphi}.$$

Da nun zum Hervorbringen der Helligkeit im Gegenpunkte der Sonne bei kleinen Tropfen die ganze Wellenfläche in Wirksamkeit tritt, und da an deren verschiedenen Stellen das in zweierlei Weise polarisirte Licht sehr verschieden durch Brechung und Zurückwerfung geschwächt wird, so müssen wir das einfallende natürliche Licht in die zweierlei Arten von polarisirtem Licht zerlegt denken und jedes für sich verfolgen. Wir setzen daher in (Gl. 19) (S. 55)

$$l_1 = v_1^2 = v_1'^2 + v_1''^2,$$

wo l_1 die in P erzeugte Helligkeit, v_1, v_1', v_1'', die zugehörigen grössten Schwingungsgeschwindigkeiten bezw. des zusammengesetzten, des in der

Einfallsebene und des senkrecht zu derselben polarisirten Lichtes bedeuten. Es gilt dann nach Gl. (19)

$$v_1'^2 = l_1' = v_2'^2 + v_3'^2, \quad v_1''^2 = l_1'' = v_2''^2 + v_3''^2,$$

worin v_2', v_3', v_2'', v_3'' Seitengeschwindigkeiten bedeuten, die wegen der wechselnden Phasen eingeführt werden mussten.

Wir erhalten dann aus Gl. (19)

$$v_2' = \int df v' \cos 2\pi \frac{y}{\lambda}, \qquad v_3' = \int df v' \sin 2\pi \frac{y}{\lambda},$$

und wenn wir darin den für Wassertropfen geltenden Werth von $v = \sqrt{l}$ aus der Gl. (25) (S. 75) einführen, zugleich aber wegen der Lichtzerlegung v und l durch v', v'', l', l'' und entsprechend der Gl. (15) (S. 42) $\alpha(1-\alpha)^2$ durch $\frac{1}{2}\alpha'(1-\alpha')^2$ und $\frac{1}{2}\alpha''(1-\alpha'')^2$ ersetzen und den obigen Ausdruck für df einführen, so erhalten wir

$$v_2' = \int 2x\pi \frac{dx}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{r \sin\varepsilon}{r''} \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{2} \alpha'(1-\alpha')^2} \cos 2\pi \frac{y}{\lambda}.$$

Darin bedeutet aber r'' (Fig. 6, S. 41) den Abstand eines Punktes der Wellenlinie von MA, d. i. x nach der neuen Bezeichnung, und hierdurch wird

$$v_2' = r^2 2\pi \int \frac{dx}{r} \frac{1}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{x}{r} \sin\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{2} \alpha'(1-\alpha')^2} \cos 2\pi \frac{y}{\lambda},$$

und entsprechend

$$v_3' = r^2 2\pi \int \frac{dx}{r} \frac{1}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{x}{r} \sin\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{2} \alpha'(1-\alpha')^2} \sin 2\pi \frac{y}{\lambda}.$$

Um hieraus v_2'' und v_3'' herzuleiten, müssen wir α' durch α'' ersetzen und ausserdem mit $\cos\varphi$ multipliciren. Denn während die Schwingungen des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes senkrecht auf dieser Ebene, d. i. auf der durch die Sonne gehenden Meridianebene des Wassertropfens stehen, also auch senkrecht auf der Richtung des einfallenden und zurückgeworfenen Lichtstrahls, so dass sie in unserer Wellenoberfläche und in der Wellenoberfläche des beleuchteten Punktes P parallel sind, so liegen die Schwingungsrichtungen des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes in der Einfallsebene, und es bilden daher diejenigen im Tropfen und diejenigen bei P den Winkel φ miteinander, sodass die übertragene Geschwindig-

keit nur mit dem Produkte der ursprünglichen Geschwindigkeit in $\cos \varphi$ proportional ist. Daher wird

$$v_2'' = r^2\, 2\pi \int \frac{dx}{r} \sqrt{\frac{x}{r} \sin \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{2} \alpha'' (1-\alpha'')^2} \cos 2\pi \frac{y}{\lambda},$$

$$v_3'' = r^2\, 2\pi \int \frac{dx}{r} \sqrt{\frac{x}{r} \sin \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{2} \alpha'' (1-\alpha'')^2} \sin 2\pi \frac{y}{\lambda}.$$

Diese vier Integrale können wieder nur durch mechanische Quadratur bestimmt werden. Tragen wir zu dem Ende auf der y-Axe von L aus Fig. 5. Längen $= \frac{1}{16}\lambda$ auf und legen durch deren Endpunkte Ebenen senkrecht zu y, so schneiden zwei aufeinander folgende derselben aus der Wellenoberfläche Ringe aus, welche die Flächenelemente bilden, und bestimmen auf der Wellenlinie Punkte, deren x-Koordinaten x_1, x_2 sind. Auf diese Weise wurde die Wellenlinie zwischen L und C zerlegt; das folgende Stück CGH aber nach Tab. 5 und 6 mit ungleichen Zunahmen des y. Die zu diesen Punkten der CGH und zu L, K, I, F, E gehörigen Werthe von $l = \frac{r_1}{r_2} \frac{d\varepsilon}{dx} \alpha (1-\alpha)^2$ wurden aus der Tab. 5 und 6 entnommen, daraus diejenigen berechnet, welche durch Vertauschung von $\alpha (1-\alpha)^2$ mit $\frac{1}{2} \alpha' (1-\alpha')^2$ bezw. $\frac{1}{2} \alpha'' (1-\alpha'')^2$ entstehen, daraus diejenigen für die Theilungspunkte der y-Achse in $\frac{1}{16}\lambda$ durch Einschaltung mittelst der Verzeichnung einer Kurve ermittelt, und dann die obigen Formeln berechnet, nachdem in denselben dx durch $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ ersetzt war unter Benutzung des Mittels der Werthe des andern Theiles der Ausdrücke, welche zu x_1 und x_2 gehören.

Auf diese Weise erhält man die in Tab. 22 verzeichneten Werthe Tab. 22. der obigen Integrale, also die Werthe von $v'_2 : (r^2 2\pi)$, $v'_3 : (r^2 2\pi)$ u. s. w. für $r = 4\lambda, 3\lambda, 2\lambda, 1\lambda$; ausserdem wurden die für $r = 100\lambda$ und $r = \frac{1}{2}\lambda$ berechnet und zugefügt. Dabei ist zu bemerken, dass für $r = 100\lambda$ die Wellenoberfläche so gross gegen $\frac{1}{16}\lambda$ ist, dass nicht alle ringförmigen Flächenelemente berücksichtigt zu werden brauchten. Es sind in diesem Falle zunächst $1\frac{1}{2}$ Wellenlängen auf der y-Axe von L an verfolgt, also von 0 bis 24 mal $\frac{1}{16}\lambda$, und dann ist in die Nähe des Punktes C übergesprungen, dessen $y = 0{,}427\, r = 42{,}7\, \lambda = 683{,}2 \,.\, \frac{1}{16}\lambda$ ist, indem mit $680 \,.\, \frac{1}{16}\lambda$ fortgefahren wurde unter Annahme von Intervallen auf der y-Axe von $\frac{1}{16}\lambda$ auch auf dem Stücke CGH der Wellenlinie.

Aus Gl. (19) ergiebt sich sodann die Lichtstärke des einen und des anderen polarisirten Lichtstrahls, wie schon oben verzeichnet,

$$l'_1 = v_2'^2 + v_3'^2, \qquad l_1'' = v_2''^2 + v_3''^2,$$

wonach $l_1' : r^4$ und $l_1'' : r^4$ durch Quadrirung der Ausdrücke der Tabelle, durch Multiplikation mit $(2\pi)^2$ und durch Addition je zweier berechnet und eingetragen sind. Daraus wurden die Werthe von $l_1' : \lambda^4$, $l_1'' : \lambda^4$ durch Multiplikation der vorhergehenden mit $r^4 : \lambda^4$, also der Reihe nach mit $100^4, 4^4, \ldots$ erhalten.

Tabelle 22.

Berechnung der Helligkeit (l_1) im Gegenpunkte der Sonne, bewirkt durch Wassertropfen von mehrfach verschiedener Grösse bei einmaliger innerer Zurückwerfung.

$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{v_2'}{r^2 2\pi}$	$\frac{v_3'}{r^2 2\pi}$	$\frac{v_2''}{r^2 2\pi}$	$\frac{v_3''}{r^2 2\pi}$	$\frac{l_1'}{r^4}$	$\frac{l_1''}{r^4}$	$\frac{l_1'}{\lambda^4}$	$\frac{l_1''}{\lambda^4}$	(l_1')	(l_1'')	(l_1)
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,	0,					
	—	+	—	+							
100	0080	0038	0041	0092	000028	000040	2800	4000	4,48	6,40	10,88
	+	—	+	—							
4	014	200	078	088	01590	00547	4,075	1,40	4,08	1,40	5,48
	—	+	—	+							
3	076	350	095	151	05080	01260	4,11	1,02	7,31	1,82	9,13
	+	—	+	+							
2	142	232	128	012	02960	00653	0,475	0,105	1,90	0,42	2,32
	—	+	—	+							
1	288	546	041	189	15100	01550	0,151	0,015	2,42	1,24	3,66
	+	+	+	+							
$\frac{1}{2}$	464	712	211	256	28600	04355	0,018	0,003	1,15	0,19	1,34

Diese Zahlen geben die verhältnissmässigen Helligkeiten, welche von unseren polarisirten Strahlen im Gegenpunkte der Sonne durch einen einzelnen Tropfen hervorgebracht werden. Lässt man aber die Zahl der wirksamen Tropfen, wie es vorhin schon geschah, umgekehrt proportional mit ihrer Oberfläche sein, und vergleicht alle mit $r = 4\lambda$, so erhält man die verhältnissmässigen Helligkeiten, welche durch die Gesammtwirkung aller Tropfen von übereinstimmender Dicke entstehen, indem man die vorhergehenden Zahlen mit $(r : 4\lambda)^2$ vervielfacht, wobei wir

$$(l_1') = \frac{l_1'}{\lambda^4}\left(\frac{r}{4\lambda}\right)^2, \quad (l_1'') = \frac{l_1''}{\lambda^4}\left(\frac{r}{4\lambda}\right)^2$$

setzen wollen. Als Gesammthelligkeit (J_1) erhalten wir dann $(J_1) = (J'_1) + (J''_1)$.

Wir bemerken bei Betrachtung der Tabelle, dass bei $r = 100\lambda$ das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht (J''_1) etwas über das andere (J'_1) überwiegt, dagegen bei $r \lessgtr 4\lambda$ (J'_1) über (J''_1) bedeutend; das (J'_1) ist der Reihe nach etwa 3, 4, 5, 12, 6 mal so gross als (J''_1). Es schwanken diese Zahlen stark hin und her, was daraus zu erklären sein wird, dass bei kleinen Werthen von r stark wirksame Theile der Wellenoberfläche schon bei einem geringen Wechsel der r ihre Phase und ihre Wirksamkeit rasch ändern.

50. Vereinigung der zu verschiedenen Tropfendicken gehörigen Helligkeitskurven für das Lichtbüschel J_1. Die erhaltenen Werthe von (J_1) sind in Fig. 15 auf der Ordinatenlinie bei $\varphi = 180^0$ eingetragen, und es ist das Mittel der Werthe für $r : \lambda = 4, 3, 2, 1$ genommen und $= 5{,}14$ erhalten und so ein Punkt für die früher bis zu etwa $\varphi = 160^0$ bestimmte mittlere Kurve 1, 2, 3, 4 ermittelt, und dadurch ist diese Kurve vervollständigt. Fig. 15.

Man sieht aus ihrer Gestalt, dass bei diesen viererlei Wassertröpfchen und bei gleichförmig gelbem Lichte die fragliche Helligkeit bei $\varphi = 115^0$ noch gering sein, bei $\varphi = 150^0$ ein Maximum besitzen würde, dann wieder sänke bis zu etwa $\varphi = 163^0$, um wieder bis $\varphi = 180^0$ etwas über die Stärke des Maximums bei $\varphi = 150^0$ zu steigen.

Die Einsenkung der Kurve bei $\varphi = 163^0$ rührt von der sehr enge begrenzten Annahme der Grössen von r her. Berücksichtigt man noch Tropfen mit $r : \lambda = \frac{1}{2}$, so erhält man in Fig. 15 eine Kurve, die ihren Scheitel mit $(J_1) = 4{,}93$ bei $\varphi = 177\frac{1}{2}^0$, also sehr nahe bei 180^0 hat. Die gleichförmige Steigung dieser Kurve bis dahin entspricht besser der Beobachtung. Diese lehrt nämlich, dass bei untergehender Sonne die Helligkeit am klaren Himmel in einer Höhe von 15^0 über dem Horizont, wo der gewöhnlich Abends herrschende Bodendunst nicht mehr stört, etwa in 120^0 Sonnenabstand am geringsten ist und von da bis zum Gegenpunkt der Sonne $(\varphi = 180^0)$ beständig zunimmt. Dementsprechend lassen wir die Kurve der Gesammthelligkeit (J_1) in Fig. 15 von dem allen Kurven gemeinschaftlichen Punkte bei 138^0 stetig bis $\varphi = 180^0$ zu $(J_1) = 4{,}93$ ansteigen, und in diesem

Bereiche zwischen den Kurven für $r = \frac{1}{2}\lambda$ und $r = 1\,\lambda$ verlaufen. Dagegen lassen wir sie der Beobachtung entsprechend von 138° nach der andern Seite rascher als jene Kurven abfallen und zwar bei $\varphi = 115°$ bis zu $(l_1) = 0$. Die zusammengehörigen Werthe der φ und der (l_1) sind in der Tab. 23 in der vierten aufrechten Reihe als (l_3) eingetragen.

51. Zurückführung der Helligkeiten auf die früher angenommene Einheit. Es kommt nun darauf an, die jetzt erhaltenen Helligkeiten durch die früher angenommenen in den Formeln 12 (S. 26 u. 27) für l'_i und l''_i benutzten Einheiten zu messen. In unserem Falle ist $i = 3$, die Lichtmengen sind die in Tab. 2 als l'_3 und l''_3 verzeichneten und erstrecken sich von $\varphi_3 = 180°$ bis 137° 58′ oder nahezu 138°. Wir müssen ihre gesammte Lichtmenge berechnen und gleich derjenigen setzen, welche sich nach der neuerdings erhaltenen Vertheilung und bei der neuen Einheit ergiebt, und dadurch das Verhältniss beider Einheiten gewinnen. Da wir nun in der neuen Berechnung des Regenbogens und seiner Zerstreuung die beiderlei polarisirten Strahlen der allzu grossen Mühe wegen nicht mehr unterschieden, sondern nur die Summe ihrer Lichtmengen bestimmt haben, so müssen wir auch aus den Formeln 12 oder der Tab. 2 die Summe $l'_3 + l''_3 = l_3$ bestimmen.

Tab. 23. Die Ergebnisse haben wir mit den zugehörigen Winkeln φ_3 in Tab. 23 eingetragen in Intervallen der φ_3 von 5°. Die Lichtmenge in je einem Ringe der Himmelskugel von φ_3 Sonnenabstand und $d\varphi_3$ Breite ist dann $2\pi \sin \varphi_3\, d\varphi_3\, l_3$, oder wenn man mit Elementen von der Breite $\triangle\varphi_3 = 5°$ rechnet, und statt $\sin \varphi_3$ und l_3 die mittleren Werthe $M \sin \varphi_3$ und $M\, l_3$ einsetzt, $= 2\pi\, 5 \,.\, \sin 1°.\, M \sin \varphi_3 \,.\, M\, l_3$, wovon die Werthe von $M \sin \varphi_3 \,.\, M\, l_3$ in der Tabelle berechnet sind.

Dabei tritt aber für das Intervall von $\varphi = 135$ bis 140° die Schwierigkeit ein, dass l'_3 und l''_3 für $\varphi_3 = 138°$ (oder genauer 137° 58′) unendlich werden, weil $d\varphi_3 = 0$ wird. Man berechnet dann die hervorgebrachte (endliche) Lichtmenge nach Gl. (12) (S. 26), indem man in derselben $i = 3$, $Lmr^2 = 1$ setzt. Man erhält dann durch Summirung der l'_i und l''_i der Gleichungen (12′) und (12″), wenn man noch $\alpha' (1 - \alpha')^2 + \alpha'' (1 - \alpha'')^2 = A$ setzt, $l_3 \sin \varphi_3\, d\varphi_3 = \frac{1}{4} A \sin 2\varepsilon \,.\, d\varepsilon$.

Tabelle 23.

Umrechnung der Helligkeit (l_3) des zerstreuten Regenbogens auf die allgemeine Einheit in l_3.

φ_3	l_3	$\frac{M}{l_3}$	(l_3)	$\frac{M}{(l_3)}$	$\frac{M}{\sin\varphi_3}$	$\frac{M}{l_3 \sin\varphi_3}$	$\frac{M}{(l_3)\sin\varphi_3}$	$\frac{C}{l_3}$	$\frac{l''_3}{l_3}$	l'_3	l''_3
	0,	0,			0,	0,		0,	0,	0,	0,
115°			0,00					000		000	000
120			0,22	0,08	887		0,071	004		004	000
125			0,90	0,48	843		0,405	018		017	001
130			1,77	1,33	793		1,050	035		032	003
135			2,57	2,17	737		1,600	050	078	043	007
140	∞ 125		3,18	2,87	676	165	1,940	062	115	049	013
145	081	103	3,68	3,43	609	063	2,090	072	295	051	021
150	058	070	4,02	3,85	537	038	2,067	079	408	047	032
155	040	049	4,32	4,17	462	023	1,928	084	426	048	036
160	025	032	4,55	4,43	383	012	1,700	089	442	050	039
165	021	023	4,73	4,64	301	007	1,396	092	460	050	042
170	019	020	4,86	4,71	216	004	1,020	095	475	050	045
175	020	019	4,91	4,88	131	002	0,641	096	490	049	047
180	020	020	4,93	4,92	044	001	0,217	096	500	048	048
					Σ	315	16,131				

Ersetzt man auch hier die Integration durch eine Summirung mit Elementen $\triangle\varphi = 5^0$, und lässt dann den Faktor 5 weg, d. h. dividirt mit ihm, — weil es uns genügt, die Summe der $l_3 \sin\varphi_3$ zu ermitteln — und nimmt überall die Mittel aus den Grenzwerthen des Intervalles, so $M\,l_3$, $M \sin\varphi_3$, MA, $M \sin 2\varepsilon$, so erhält man

$$M\,l_3 \,.\, M \sin\varphi_3 \,.\, \frac{\triangle\varphi_3}{5} = \frac{1}{4} \,.\, MA \,.\, M \sin 2\varepsilon \,.\, \frac{\triangle\varepsilon}{5}.$$

Tabelle 24.

Berechnung der Lichtmenge in der Nähe von $\varphi_3 = 138^0$.

ε	φ_3	A	$\frac{M}{A}$	$\frac{M}{\sin 2\varepsilon}$	$\frac{1}{4} \frac{MA}{\sin 2\varepsilon}$	φ_3	$\frac{1}{4} \frac{MA}{\sin 2\varepsilon}$
		0,	0,	0,	0,		0,
50°	139° 36′	0586				140° 0′	
			0650	966	0314		0432
55	138.28	0714				138.20	
			0829	906	0378		0378
60	137.58	0944				138.00	
			1113	819	0456		0456
65	138.24	1282				138.24	
			1526	707	0540		0381
70	140.40	1770				140	
							0,1647

Tab. 24. Hiervon sind in Tab. 24 die Werthe für $\varepsilon = 50$ bis 70^0, d. i. auch für $\varphi_3 = 139^0\,36'$ bis $137^0\,58'$ und wieder zurück bis $140^0\,40'$ ausgerechnet und in der 6. Reihe als $\frac{1}{4}\,MA \sin 2\varepsilon$ eingetragen. Da aber die Summe von $\varphi_3 = 135$ bis 140^0 verlangt wird, so wurden in der 6. Reihe diese Werthe von φ_3 und in der 7. die neuen Werthe von $\frac{1}{4}\,MA \sin 2\varepsilon$ eingetragen, welche den neuen Intervallen von φ_3 zugehören und durch proportionale Aenderung der Werthe der 5. Reihe gebildet wurden.

Es ergiebt sich dadurch ihre Summe $= 0{,}1647$, welche in Tab. 23 in das Intervall von $\varphi_3 = 135$ bis 140^0 als $M l_3 \sin \varphi_3$ eingetragen ist.

Nun erhalten wir durch Addition die $\Sigma = l_3 \sin \varphi_3 = 0{,}315$. Andererseits sind auch in Tab. 23 aus Fig. 15 die Ordinaten (l_3) der dortigen Kurve (l_1) eingetragen und die Mittelwerthe in den gegebenen Intervallen von $(l_3) \sin \varphi_3$ berechnet, und daraus die Summe $\Sigma M (l_3) \sin \varphi_3 = 16{,}131$ bestimmt. Daraus ergiebt sich der Korrektionskoefficient

$$\frac{\Sigma M l_3 \sin \varphi_3}{\Sigma M (l_3) \sin \varphi_3} = \frac{0{,}315}{16{,}131} = 0{,}01952.$$

Hiermit sind die Werthe von (l_3) multiplicirt und als die korrigirte l_3 mit $C l_3$ in der Tabelle eingetragen.

52. Antheil der beiden Arten des polarisirten Lichtes im Büschel l_3. Es bleibt nun noch für diesen Lichtbüschel l_3 zu ermitteln übrig, welche Lichtantheile als l'_3 in der Einfallsebene und welche als l''_3 senkrecht zu derselben polarisirt sind. Es kann dies, nachdem einmal beide Lichtmengen vermischt wurden, nachträglich nur angenähert geschehen. Es dürfte wohl die beste Annäherung erreicht werden, wenn wir annehmen, dass durch Rechnung mittelst der Wellenoberfläche, wie wir sie zur Bestimmung der überzähligen Regenbogen durchgeführt haben, dieselbe Vertheilung eintritt, wie bei der Rechnung mittelst Strahlen, wie sie zur Aufstellung der Tabelle 2 angewendet wurde. So zeigt Tab. 2 für den zweimal vorkommenden Werth $\varphi_3 = 145^0$ nach ausgeführter Einschaltung zwei Werthe von l'_3, nämlich 0,025 und 0,035, deren Summe 0,060, und zwei Werthe von l''_3, nämlich 0,005 und 0,020, deren Summe 0,025, und hieraus entspringt der Werth von $l''_3 : l_3 = 0{,}025 : (0{,}060 + 0{,}025) = 0{,}295$. Diese Werthe sind in Tab. 23 eingetragen, und aus ihnen sind durch Multipli-

kation mit den entsprechenden Cl_3 die Werthe von l''_3 ermittelt, die aber nach dem Gesetze der Stetigkeit verbessert wurden; dann ergaben sich die $l'_3 = Cl_3 - l''_3$.

53. Die Lichtbüschel l_4 und l_5. In gleicher Weise könnte die Zerstreuung des Lichtes l_4 des zweiten und l_5 des dritten Regenbogens behandelt werden. Wir durften aber bei der Geringfügigkeit dieser Lichtmengen uns begnügen, dies nur nach Aehnlichkeit mit l_3 auszuführen.

54. Vereinigung der 5 Lichtbüschel. Die Ergebnisse dieser und der vorhergehenden Rechnungen haben wir in ausgedehnter Weise in der Tabelle 25 niedergelegt. Zur leichteren Uebersicht geben wir hier nochmals die Bedeutung der Buchstaben.

φ ist der Winkelabstand eines Wassertropfens von der Sonne für den Beobachter;

die verschiedenen l sind die durch die Tropfen hervorgebrachten verhältnissmässigen Helligkeiten, und zwar

$$l'_1,\ l'_2,\ l'_3,\ l'_4,\ l'_5,\ l'$$

des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes;

$$l''_1,\ l''_2,\ l''_3,\ l''_4,\ l''_5,\ l''$$

des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes;

l'_1, l''_1 des 1-mal durch den Tropfen zurückgeworfenen Lichtes;

l'_2, l''_2 des 2-mal gebrochenen Lichtes;

l'_3, l''_3 des 2-mal gebrochenen und 1-mal zurückgeworfenen Lichtes (1. Regenbogen);

l'_4, l''_4 des 2-mal gebrochenen und 2-mal zurückgeworfenen Lichtes (2. Regenbogen);

l'_5, l''_5 des 2-mal gebrochenen und 3-mal zurückgeworfenen Lichtes (3. Regenbogen);

l', l'' sind die Summen dieser Helligkeiten;

$l = l' + l''$ ist die Gesammthelligkeit;

$i'_1 = l : L'$ ist das Verhältniss der im Sonnenabstand φ erzeugten Helligkeit zu der von dem Tropfen im Ganzen zerstreuten Lichtmenge.

Tabelle 25.

Zerstreuung des Sonnenlichtes durch Wassertropfen.

φ	i'_1	i'_2	i'_3	i'_4	i'_5	i''_1	i''_2	i''_3	i''_4	i''_5	i'	i''	i	i'_1
	0,				0,	0,				0,				
0°	125	1,918				125	1,918				2,043	2,043	4,086	1,295
1	120	1,911				116	1,911				2,031	2,027	4,058	1,286
2	115	1,901				108	1,901				2,016	2,009	4,025	1,276
3	111	1,885				101	1,886				1,996	1,987	3,983	1,262
4	107	1,861				094	1,865				1,968	1,959	3,927	1,244
5	103	1,831				088	1,838				1,934	1,926	3,860	1,223
6	099	1,796				082	1,806				1,895	1,888	3,783	1,199
7	095	1,755				077	1,769				1,850	1,846	3,696	1,171
8	091	1,708				072	1,727				1,799	1,799	3,598	1,140
9	087	1,655				067	1,680				1,742	1,747	3,489	1,106
10	084	1,598				062	1,628				1,682	1,690	3,372	1,069
11	081	1,538				058	1,572				1,619	1,630	3,249	1,030
12	078	1,475				054	1,512				1,553	1,566	3,119	0,989
13	075	1,410				050	1,450				1,485	1,500	2,985	946
14	072	1,344				046	1,387				1,416	1,433	2,849	903
15	069	1,278				043	1,323				1,347	1,366	2,713	860
16	066	1,214				040	1,262				1,280	1,302	2,582	819
17	063	1,151				037	1,205				1,214	1,242	2,456	779
18	061	1,090				034	1,150				1,151	1,184	2,335	740
19	059	1,030				032	1,097				1,089	1,129	2,218	702
20	057	0,974				030	1,046				1,031	1,076	2,107	667
21	054	920				028	0,997				0,974	1,025	1,999	633
22	052	870				026	949				922	0,975	1,897	600
23	050	822				024	901				872	925	1,797	569
24	048	776			000	022	854			000	824	876	1,700	539
25	046	731			001	020	808			000	778	828	1,606	509
26	044	687			001	018	763			000	732	781	1,513	479
27	042	643			002	017	719			000	687	736	1,423	451
28	040	600			002	016	676			000	642	693	1,335	423
29	038	558			003	015	634			001	599	650	1,249	397
30	036	517			003	014	594			001	556	609	1,165	370
31	035	479			003	013	557			001	517	571	1,088	346
32	034	445			003	012	523			002	482	537	1,019	325
33	033	416			004	011	494			002	453	507	0,960	305
34	032	388			004	010	466			002	424	478	902	286
35	031	361			004	009	439			001	396	449	845	268
36	030	336			004	009	412			001	370	422	792	251
37	029	312			004	008	386			001	345	395	740	235
38	028	289			003	007	360			001	320	368	688	218

φ	l'_1	l'_2	l'_3	l'_4	l'_5	l''_1	l''_2	l''_3	l''_4	l''_5	l'	l''	l	i'_1
	0,	0,			0,	0,	0,			0,	0,	0,	0,	0,
39°	027	267			003	006	335			001	297	342	639	202
40	027	246			002	006	313			001	275	320	595	189
41	026	227			002	005	292			001	255	298	553	176
42	025	209			002	005	272			001	236	278	514	163
43	024	192			002	004	254			001	218	259	477	151
44	024	176			001	004	237			001	201	242	443	141
45	023	160			001	004	220			000	184	224	408	130
46	022	145			001	003	203			000	168	206	374	119
47	022	130			001	003	187				153	190	343	109
48	021	116			001	003	171				138	174	312	099
49	020	104			000	002	155				124	157	281	089
50	020	094			000	002	140				114	142	256	081
51	019	086				002	128				105	130	235	075
52	018	078				002	120				096	122	218	069
53	017	071				002	112				088	114	202	064
54	017	065				002	104				082	106	188	060
55	016	059				002	097				075	099	174	055
56	016	054				002	090				070	092	162	052
57	015	049				001	083				064	084	148	047
58	015	044				001	076				059	077	136	043
59	014	039				001	069				053	070	123	039
60	014	034				001	063				048	064	112	036
61	013	029				001	057				042	058	100	032
62	013	024				001	051				037	052	089	028
63	012	021				001	046				033	047	080	025
64	012	018				001	041				030	042	072	023
65	012	015				001	036				027	037	064	020
66	011	012				001	031				023	032	055	017
67	011	009				001	026				020	027	047	015
68	011	007				000	022				018	022	040	013
69	011	006				000	018				017	018	035	011
70	010	006				000	015				016	015	031	010
71	010	005				000	012				015	012	027	009
72	010	004				000	009				014	009	023	007
73	010	003				000	006				013	006	019	006
						73.44								
74	009	003				000	004				012	004	016	005
75	009	002				000	003				011	003	014	004
76	009	001				000	003				010	003	013	004
77	009	001				000	002				010	002	012	004
78	008	001				000	001				009	001	010	003
79	008	000				000	000				008	000	008	003

φ	l'_1	l'_2	l'_3	l'_4	l'_5	l''_1	l''_2	l''_3	l''_4	l''_5	l'	l''	l	i'_1
	0,	0,	0,	0,		0,	0,	0,	0,		0,	0,	0,	0,
80°	008	000				000	000				008	000	008	003
85	007					001					007	001	008	003
90	006					001					006	001	007	002
95	006					001					006	001	007	002
100	005			000		001			000		005	001	006	002
105	005			001		001			000		006	001	007	002
106	005			001		001			000		006	001	007	002
107	005			001		001			000		006	001	007	002
108	005			002		001			000		007	001	008	003
109	005			003		001			001		008	002	010	003
110	005			004		001			001		009	002	011	003
111	005			005		001			001		010	002	012	004
112	005			006		001			001		011	002	013	004
113	005			006		001			002		011	003	014	004
114	005			007		001			002		012	003	015	005
115	005			007		001			002		012	003	015	005
116	004		000	008		001		000	002		012	003	015	005
117	004		000	008		001		000	002		012	003	015	005
118	004		001	008		001		000	002		013	003	016	005
119	004		002	009		001		000	002		015	003	018	006
120	004		004	009		001		000	002		017	003	020	006
121	004		006	009		001		000	002		019	003	022	007
122	004		008	009		001		001	002		021	004	025	008
123	004		011	008		001		001	002		023	004	027	009
124	004		014	008		001		001	002		026	004	030	010
125	004		017	007		001		001	002		028	004	032	010
126	004		019	007		001		002	002		030	005	035	011
127	004		022	006		001		002	002		032	005	037	012
128	004		025	006		001		002	002		035	005	040	013
129	004		028	005		001		003	002		037	006	043	014
130	004		032	004		001		003	002		040	006	046	015
131	004		034	004		001		004	001		042	006	048	015
132	004		037	003		001		004	001		044	006	050	016
133	004		039	003		001		005	001		046	007	053	017
134	004		041	003		001		006	001		048	008	056	018
135	004		043	003		001		007	001		050	009	059	019
136	004		045	002		002		008	000		051	010	061	019
137	003		047	002		002		009	000		052	011	063	020
138	003		048	002		002		010			053	012	065	021
139	003		049	002		002		011			054	013	067	021
140	003		049	002		002		013			054	015	069	022
141	003		050	001		002		014			054	016	070	022

φ	l'_1	l'_2	l'_3	l'_4	l'_5	l''_1	l''_2	l''_3	l''_4	l''_5	l'	l''	l	i'_1
	0,		0,	0,		0,		0,			0,	0,	0,	0,
142°	003		050	001		002		016			054	018	072	023
143	003		051	000		002		017			054	019	073	023
144	003		051	000		002		019			054	021	075	024
145	003		051	000		002		021			054	023	077	024
146	003		051			002		023			054	025	079	025
147	003		051			002		025			054	027	081	026
148	003		050			002		027			053	029	082	026
149	003		049			002		029			052	031	083	026
150	003		048			002		031			051	033	084	027
151	003		048			002		032			051	034	085	027
152	003		047			002		034			050	036	086	027
153	003		047			002		035			050	037	087	028
154	003		047			002		036			050	038	088	028
155	003		048			002		036			051	038	089	028
156	003		048			002		037			051	039	090	029
157	003		049			002		037			052	039	091	029
158	003		049			002		038			052	040	092	029
159	003		050			002		038			053	040	093	030
160	003		050			002		039			053	041	094	030
161	003		050			002		040			053	042	095	030
162	003		050			002		041			053	043	096	030
163	003		050			003		041			053	044	097	031
164	003		050			003		042			053	045	098	031
165	003		050			003		042			053	045	098	031
166	003		050			003		043			053	046	099	031
167	003		050			003		043			053	046	099	031
168	003		050			003		044			053	047	100	032
169	003		050			003		044			053	047	100	032
170	003		050			003		045			053	048	101	032
171	003		050			003		045			053	048	101	032
172	003		050			003		045			053	048	101	032
173	003		049			003		046			052	049	101	032
174	003		049			003		047			052	050	102	032
175	003		048			003		048			051	051	102	032
180	003		048			003		048			051	051	102	032

55. Einführung einer allgemeinen Einheit für die durch Wassertropfen erzeugte Helligkeit. Es ist also dies i'_1 der verhältnissmässige Antheil, welchen die von einem Tropfen nach einer bestimmten Richtung auf die Flächeneinheit geschickte Lichtmenge an der von diesem

Tropfen nach allen Richtungen oder im Ganzen zerstreuten Lichtmenge L' hat. Dabei bedeutet l die nach dem bisherigen Maassstabe gemessene Lichtstärke, welche im Sonnenabstande φ wirksam erscheint, d. i. auch die Lichtmenge, welche von dem Wassertropfen auf die Flächeneinheit (1 qm) einer Kugel vom Halbmesser Eins (1 m), deren Mittelpunkt im Tropfen liegt, an die Stelle gestreut wird, welche jenem Punkte vom Sonnenabstande φ gegenüber steht. Auf einen Kugelring von unveränderlichem φ und der Breite $d\varphi$ fällt dann die Lichtmenge $l\,2\pi \sin\varphi\, d\varphi$, und daher ist die gesammte auf jene Kugel zerstreute Lichtmenge, gemessen nach dem Maassstabe wie l

$$L' = 2\pi \int_0^{\pi} l \sin\varphi\, d\varphi.$$

Da nun l nicht als Funktion von φ, sondern in einer Tabelle von Grad zu Grad gegeben ist, so müssen wir eine Summirung an die Stelle der Integration setzen; wir nehmen dabei Intervalle von 1^0 oder ersetzen $d\varphi$ durch $\sin \triangle\varphi = \pi : 180$ und erhalten dann

$$L' = \frac{\pi}{180}\, 2\pi \sum_0^{180} l \sin\varphi = \frac{\pi^2}{90} \sum_0^{180} l \sin\varphi.$$

Die Ausführung giebt

$$L' = 0{,}10966 \,.\, 28{,}8477 = 3{,}155.$$

Nach den Gleichungen 7' und 7'' (S. 23) ist aber die wirkliche von m Tropfen herrührende Helligkeit $h = Lmr^2/l$, so dass die gesammte in der Kugel vom Halbmesser Eins ausgebreitete Lichtmenge $= Lmr^2\, L' = Lmr^2 \,.\, 3{,}155$ ist. Diese muss aber gleich der auf die m Wassertropfen auffallenden Lichtmenge sein, da diese ganz zerstreut wird, oder sie muss sein $= L \,.\, m \,.\, r^2\pi$, woraus folgt

$$L' = \pi.$$

Und wirklich zeigt unsere gewonnene Zahl $L' = 3{,}155$ eine ausserordentlich gute Uebereinstimmung mit $\pi = 3{,}1416$.

Mit diesem Werthe ist die letzte Reihe $i'_1 = l : L'$ der Tabelle 25 berechnet. In derselben könnte auffallen, dass auch $i'_1 > 1$ vorkommt, nämlich bei kleinen φ, weil dabei die theilweise Lichtmenge grösser als die ganze zerstreute Lichtmenge zu sein scheint. Dies wird aber verständlich, wenn man beachtet, dass jede dieser Lichtstärken in Wahrheit nur auf

eine kleine Stelle, nicht aber auf 1 qm ausgebreitet ist, während i'_1 sich auf 1 qm bezieht.

56. Ueberblick über das durch Zurückwerfung und Brechung des Lichtes an Wassertropfen bedingte Gesetz der Lichtzerstreuung.

Die Abhängigkeit der i'_1 von den φ wurde in Fig. 16 durch die Kurve i'_1 dargestellt, von welcher ein Theil mit den 10-fachen Werthen der i'_1 in der Kurve $10\,i'_1$ wiederholt wurde. Fig. 16.

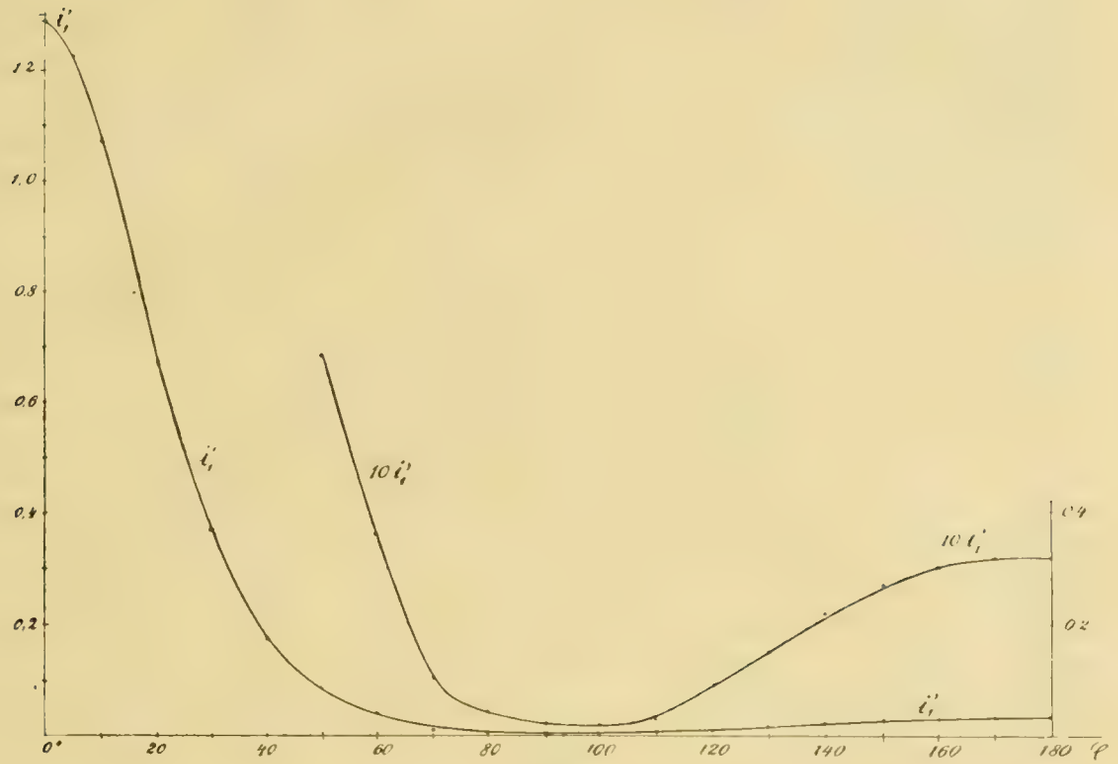


Fig. 16.

Die Ergebnisse lassen sich so zusammenfassen. Die grösste Helligkeit bringen die Wassertropfen vermöge ihrer Durchsichtigkeit mit $i'_1 = 1{,}295$ bei $\varphi = 0^0$, also unmittelbar neben der Sonne hervor. Mit wachsendem φ nimmt i'_1 rasch ab, ist bei $\varphi = 20^0$ nur noch 0,667, bei $\varphi = 50^0$ nur noch 0,081, sinkt dann bei $\varphi = 80^0$ auf 0,003, erreicht bei $\varphi = 100^0$ den kleinsten Werth 0,002, um dann von $\varphi = 110^0$ an wieder langsam zu steigen und bei $\varphi = 180^0$ den Werth von 0,032 zu erreichen.

Den grössten Antheil an dem l zwischen $\varphi = 0$ und 73° hat das Büschel der 2-mal gebrochenen Strahlen l_2, welches besonders bei $\varphi = 0$ stark wird, indem der Tropfen ähnlich wie ein Brennglas wirkt.

Der dunkle Ring etwa zwischen $\varphi = 70$ bis 130° ist hauptsächlich die Erscheinung des zerstreuten Regenbogens. Bei grossen Tropfen lassen die beiden ersten Regenbogen zwischen sich von $\varphi = 129$ bis 138° einen tief dunklen, tintenfarbigen Ring. Bei kleinen Tropfen werden die Regenbogen zerstreut, der erste ($\varphi = 138°$) vorwiegend gegen $\varphi = 180°$, den Gegenpunkt der Sonne hin, der zweite ($\varphi = 129°$) vorwiegend gegen $\varphi = 0$, die Sonne hin; aber ein dunkler Ring bleibt bemerklich. Dieser bewirkt auch, dass bei untergehender Sonne mit grösserer oder geringerer Deutlichkeit (bei grösseren oder kleineren Tröpfchen) der Horizont in der Nähe von $\varphi = 120°$ am dunkelsten erscheint, was schon Bouguer bemerkte, wie zu Anfang angeführt.

Sodann zeigt die Tabelle 25, dass das Licht in einem Sonnenabstande $\varphi = 80°$ vollständig polarisirt ($l'' = 0$) und bei benachbarten φ nahezu polarisirt ist, dass dagegen dasjenige unmittelbar neben der Sonne oder in ihrem Gegenpunkte unpolarisirt oder neutral ist und bis zu Abständen von 15 — 20° von diesen Punkten fast ganz neutral bleibt. Wir werden später sehen, dass diese Wirkung durch das von den kleinsten schwebenden Theilchen hervorgebrachte Licht unterstützt wird, indem dieses bei $\varphi = 90°$ vollständig polarisirt, bei $\varphi = 0$ und 180° unpolarisirt ist. Diese Ergebnisse stimmen im Ganzen mit den Beobachtungen von Arago überein, welcher das Licht bei $\varphi = 90°$ stark polarisirt fand, und neutral in einem Abstande von 12 bis 25° vom Gegenpunkte der Sonne, sowie in zwei Punkten in der Nähe der Sonne in deren Vertikalebene. Vollkommene Uebereinstimmung unserer Zahlen mit den Beobachtungen kann man nicht suchen, da die bald zu betrachtenden Eiskryställchen keine vollständigen Polarisationen liefern, und weil der recht bedeutende später zu bestimmende Reflex der Atmosphäre an jeder Stelle des Himmels die vollständige Polarisation aufhebt.

Zweiter Abschnitt.

Wirkung der Wassertropfen und Eiskrystalle durch Beugung.

57. Beugung durch einen Spalt. Ausserdem dass die Wassertröpfchen die auf sie selbst fallenden Sonnenstrahlen zerstreuen, ändern sie auch noch die seitwärts nahe an ihnen vorbeistreifenden Strahlen in ihrer Wirksamkeit, indem sie deren Beugung hervorbringen. Wir werden auch später bei den schwebenden Eiskryställchen eine gleichartige Erscheinung durch die langen schmalen Seitenflächen dieser Eisnadeln zu verfolgen haben und wollen deswegen zunächst als gemeinschaftliche einfache Grundlage dieser Erscheinungen die Beugung einer Lichtwelle durch einen schmalen langen Spalt untersuchen, der in einer undurchsichtigen Wand angebracht ist, auf welche wir die parallelen Sonnenstrahlen senkrecht auftreffen lassen.

Es stelle in einer zur Längsrichtung des Spaltes senkrechten Zeichen- Fig. 17.
fläche $AB = a$ die in der Zeichenfläche liegende Breite des Spaltes dar, LA, LB die auf der Spaltfläche senkrechten einfallenden Lichtstrahlen; dann ist die Spaltfläche eine Wellenfläche, in welcher an allen Stellen zu derselben Zeit dieselbe Phase der schwingenden Aethertheilchen herrscht. Ein in der Zeichenfläche liegender entfernter Punkt P wird von den verschiedenen Elementen dieser Wellenfläche in verschiedener Weise zur Schwingung angeregt, weil die Entfernungen von P und daher die gleichzeitig dort anlangenden Schwingungsphasen wechseln. Ein solches Element bei M, für welches $AM = x$ sei, habe die Breite dx und eine sehr kleine mit der Längsrichtung des Spaltes parallele Höhe, die wir ausser Acht lassen oder in Gedanken $= 1$ setzen können, da die in der Längsrichtung übereinander liegenden Theilchen des Spaltes wegen dessen Länge ihre Einwirkung auf P gegenseitig aufheben, oder, was dasselbe ist, da die Vorgänge in den Schichten zwischen Ebenen, die auf der Längsrichtung des Spaltes senkrecht sind, als von einander unabhängig angesehen werden können.

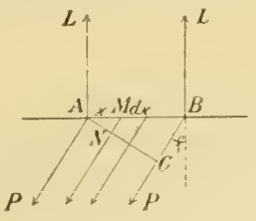


Fig. 17.

Ist nun C die grösste in der Wellenfläche AC herrschende Schwingungsgeschwindigkeit, und findet bis zu P keine merkliche Lichtschwächung statt, so ist C auch die grösste auf P übertragene Schwingungs-

geschwindigkeit. Eine solche Schwächung wird durch den Weg AP allein in keiner merklichen Weise hervorgebracht, da er innerhalb der Atmosphäre klein gegen die Entfernung der Sonne ist, wohl aber durch eine theilweise Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre, die wir aber erst später in Rechnung ziehen werden.

Die von dem Elemente dx (oder $dx \cdot 1$) der Spaltöffnung bei A auf P übertragene Schwingungsgeschwindigkeit ist nun bekanntlich

$$C \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei t die von irgend einem festen Zeitpunkt bis zum betrachteten verflossene Zeit und T die Schwingungsdauer des Lichtes bedeutet; als Zeitpunkt kann z. B. derjenige einer grössten Schwingungsgeschwindigkeit bei A, und als t die Fortpflanzungsdauer des Lichtes von A bis P gelten. Da es hier nur auf die Verhältnisse ankommt, können wir C weglassen. Die von dem Elemente bei M nach P gleichzeitig übertragene Schwingungsgeschwindigkeit ist dann offenbar

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \varphi}{\lambda} \right) dx,$$

wenn λ die Wellenlänge und φ den Winkel bedeutet, welchen die Richtung AP mit der Normalen AL zur Wellenoberfläche bildet. Dann drückt nämlich $MN : \lambda = x \sin \varphi : \lambda$ den Phasenunterschied der von A und der von M nach P übertragenen Schwingungen aus.

Die Gesammtgeschwindigkeit, welche von der ganzen Welle in der Breite a nach P übertragen wird, ist daher

$$r = \int_0^a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \varphi}{\lambda} \right) dx$$

$$= \sin 2\pi \frac{t}{T} \int_0^a \cos 2\pi \frac{x \sin \varphi}{\lambda} dx - \cos 2\pi \frac{t}{T} \int_0^a \sin 2\pi \frac{x \sin \varphi}{\lambda} dx.$$

Somit ist die Geschwindigkeit in die zweier getrennten Schwingungen von gleicher Dauer zerlegt, die man aber wieder zu einer einzigen vereinigen kann.

Setzt man nämlich

$$\psi = 2\pi \frac{t}{T},$$

$$A = \int_0^a \cos\ 2\pi \frac{x \sin\varphi}{\lambda}\, dx, \quad B = \int_0^a \sin\ 2\pi \frac{x \sin\varphi}{\lambda}\, dx,$$

so ist

$$v = A \sin\psi - B \cos\psi = C \sin(\psi - \Theta),$$

wenn man nämlich setzt

$$tg\,\Theta = \frac{B}{A}, \qquad C^2 = A^2 + B^2.$$

Nun ist aber die Intensität J des Lichtstrahls proportional mit dem Quadrate der Schwingungsgeschwindigkeit, und bei deren Wechsel im Mittel proportional mit dem halben Quadrat der grössten Schwingungsgeschwindigkeit, welche hier C ist. Da wir aber doch nur Proportionalität berücksichtigen, setzen wir $J = C^2$ und erhalten daher

$$J = \left(\int_0^a \cos\ 2\pi \frac{x \sin\varphi}{\lambda}\, dx\right)^2 + \left(\int_0^a \sin\ 2\pi \frac{x \sin\varphi}{\lambda}\, dx\right)^2,$$

und dies wird

$$J = \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin\varphi} \sin\ 2\pi \frac{a \sin\varphi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin\varphi}\left[\cos\ 2\pi \frac{a \sin\varphi}{\lambda} - 1\right]\right)^2$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin\varphi}\right)^2 \left(2 - 2\cos\ 2\pi \frac{a \sin\varphi}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\pi \sin\varphi}\right)^2 \sin^2\pi \frac{a \sin\varphi}{\lambda} = a^2 \frac{\sin^2\xi}{\xi^2},$$

wenn man setzt

$$\pi \frac{a \sin\varphi}{\lambda} = \xi.$$

Da $\sin\xi : \xi$ für $\xi = 0$ zu 1 wird, sonst aber < 1 ist, so erhält J seinen grössten Werth a^2 für $\xi = o$. J kann nicht negativ werden; seine kleinsten Werthe $J = 0$ treten für $\xi = n\pi$ ein, wobei n eine ganze Zahl, verschieden von Null ist, oder, da $a \sin\varphi = n\lambda$ und $a \sin\varphi = BC$ ist, jedesmal wenn BC ein Vielfaches von λ wird. Es ist dies auch leicht zu übersehen, da dann alle Schwingungsphasen auf der Länge AC n-mal vorkommen und sich in ihrer Wirkung auf das von allen Punkten der Strecke AC gleich weit entfernte P gegenseitig aufheben.

Die ausser für $\xi = 0$ bestehenden Maxima von J erhält man, wenn man $dJ : d\xi$, d. i. auch den Differentialquotienten von $\sin \xi : \xi = 0$ setzt, also für

$$\frac{\cos \xi}{\xi} - \frac{\sin \xi}{\xi^2} = 0, \quad \text{oder für } \xi = tg\, \xi,$$

und diese Gleichung wird erfüllt durch die Werthe $(\xi : \pi) = 1{,}43;\ 2{,}46;\ 3{,}47$ u. s. w., welche sich immer mehr dem Ausdrucke $n + {}^1/_2$ nähern. Die Maxima von $J : a^2 = \sin^2 \xi : \xi^2$ für $\xi = 0$ und für die oben bezeichneten Werthe von ξ findet man aber der Reihe nach gleich

$$1\ ;\ 0{,}0472\ ;\ 0{,}0164\ ;\ 0{,}00837,$$

sie nehmen also sehr rasch ab.

Diese Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$(\xi : \pi)$	0	1	1,43	2	2,46	3	3,47.
$\frac{J}{a^2}$	1	0	0,0472	0	0,0164	0	0,00837.

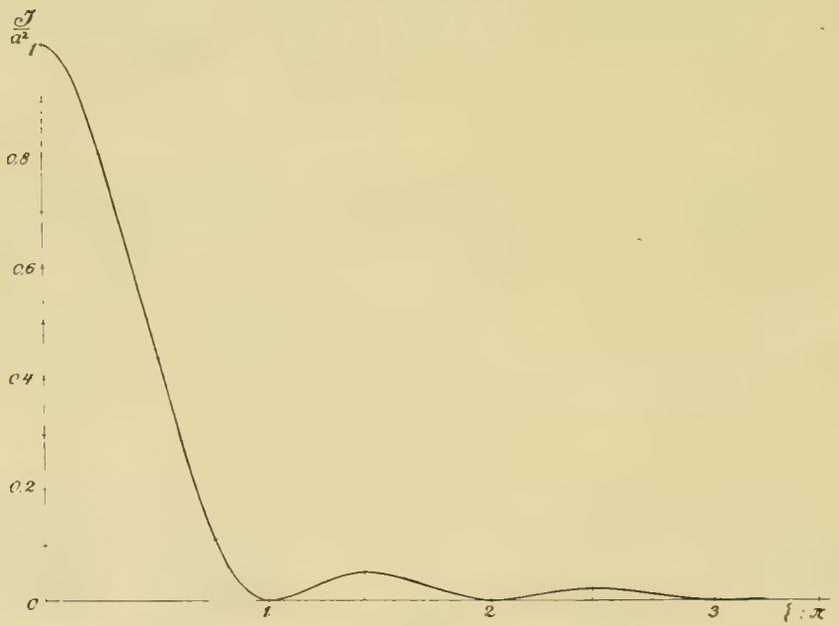


Fig. 18.

Fig. 18. Die Figur 18 veranschaulicht die Funktion $(\xi : \pi)$, $(J : a^2)$; sie ist nur für positive ξ (und φ) gezeichnet; die Gestalt für negative ξ (und φ) ist damit symmetrisch.

Man bemerkt, dass der Werth von $\xi : \pi = a \sin \varphi : \lambda$ für jeden hellen und dunklen Streifen eine von λ und a unabhängige Grösse c ist. Es geht dies aus den Gleichungen (auf voriger Seite) hervor, aus denen diese Werthe gefunden sind. Z. B. ist für den zweiten hellen Streifen $c = 1{,}43$, so dass für denselben Streifen, oder für ein konstantes c gilt:

$$\sin \varphi = \frac{\xi}{\pi} \frac{\lambda}{a} = c \frac{\lambda}{a}.$$

Daher ist der Sinus der Ablenkung φ, oder nahezu φ selbst, für denselben Streifen geradezu mit λ und umgekehrt mit a proportional. Bei weissem Licht sind also die hellen Streifen farbig, und das kurzwellige Violett erscheint näher bei dem geometrischen Spaltbild, das langwellige Roth ferner. Sodann sind bei grosser Spaltbreite a die Streifen gedrängter, bei kleinem a ausgedehnter.

Ferner zeigt der Ausdruck von J, dass für gegebene Werthe von ξ, z. B. für ein Maximum, die Lichtstärke mit a^2 proportional ist, dass daher die Schwingungsgeschwindigkeit v mit a selbst proportional sein muss. Man erkennt leicht den Grund hiervon darin, dass das auf v bei P wirkende Stück von a für ein Maximum derselbe verhältnissmässige Theil von a ist. Auf der ganzen Spaltbreite ist nämlich jedes Stück $\lambda : \sin \varphi$ (AM der Fig. 17, wenn $MN = \lambda$ ist) unwirksam, weil sich von ihm alle verschiedenen Phasen auf P übertragen und ihre Wirkungen sich aufheben; es bleibt daher nur ein Rest von a wirksam. Für das erste Maximum von J, bei $\varphi = 0$ und $\xi = 0$, scheidet kein solcher Theil von a aus. Bei wachsenden φ und ξ heben zunächst nur Theile von a ihre Wirkung gegenseitig auf; und wenn dann $\lambda : \sin \varphi$ auf die Grösse a heruntergegangen ist, heben sich alle Wirkungen auf. Der zweite helle Streifen wird erzeugt, während $\lambda : \sin \varphi$ von a bis zu $\frac{1}{2} a$ abnimmt; wird $\lambda : \sin \varphi = \frac{1}{2} a$, so heben sich die Wirkungen wieder auf; die Wirkung ist dann nahezu am stärksten, wenn der wirksame Theil von a nur halb so gross als der unwirksame, also $\frac{1}{3} a$ ist; ebenso für die folgenden hellen Streifen, wenn die wirksamen Theile $\frac{1}{5} a$, $\frac{1}{7} a$ u. s w. betragen.

Für das Hauptmaximum der Lichtstärke ($\varphi = 0$), für welche die ganze Oeffnungsweite a wirkt, herrscht entlang a eine übereinstimmende Phase; für die übrigen Maxima aber verschiedene Phasen, deren Wirkungen

sich theilweise aufheben; man erhält für sie eine Annäherung, wenn man das Maximum der Schwingungsgeschwindigkeit durch die mittlere ersetzt, d. i. mit dem Verhältniss $2 : \pi$ multiplicirt. Denn aus der Formel für v (S. 114) folgt bekanntlich, dass die ungleichförmige Bewegung eines schwingenden Aethertheilchens die Projektion der gleichförmigen Bewegung eines Punktes auf einem Kreise ist, der die Schwingungsweite zum Durchmesser hat; daher verhalten sich die Wege und die mittleren Geschwindigkeiten wie $2 : \pi$. Demnach wird man die Lichtstärken in dem zweiten, dritten u. s. w. Maximum annähernd durch die Zahlen

$$\left(\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{7}\frac{2}{\pi}\right)^2$$

erhalten, d. i. durch 0,0449; 0,0162; 0,0083, und dies stimmt mit den der vollständigen Theorie entsprechenden, oben gegebenen, ziemlich überein.

Es sei ferner noch bemerkt, dass diese Theorie nur für dasjenige Licht gilt, dessen Schwingungen in der Richtung des Spaltes stattfinden, dass dagegen für die darauf senkrechten, in der Ebene AC (Fig. 17) vor sich gehenden Schwingungen offenbar von der Geschwindigkeit v nur die Seitengeschwindigkeit $v \cos \varphi$ auftritt, wodurch die Lichtstärke von 1 zu $\cos^2 \varphi$ vermindert wird, was aber nur bei grösseren Ablenkungswinkeln φ von Belang ist. Stokes[1]) fand nun, dass das in der durch die Spaltlinie gehenden Ebene polarisirte Licht schwächer ist, und schloss daraus, dass die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen. Für kleine Ablenkungswinkel φ ist indess die Berücksichtigung des zweierlei polarisirten Lichtes nicht erforderlich.[2])

58. Beugung durch einen undurchsichtigen Streifen. Dieselbe Wirkung wie ein Spalt in einer dunklen Wand bringt ein dünner undurchsichtiger Streifen, z. B. ein Haar, in einer breiteren Lichtöffnung

[1]) Stokes. On the dynamical theory of diffraction. Trans. Camb. Phil. Soc. Bd. 9. 1856. S. 1.

[2]) Nach Rowlands Untersuchungen (Phil. Mag. Ser. (5) Bd. 17. 1884. S. 413) ist die Intensität des gebeugten Lichtes überhaupt unabhängig von der Richtung der Polarisationsebene, somit auch Stokes' Schluss unzulässig. [Die Herausgeber.]

hervor. Um nämlich diese Wirkung zu bestimmen, muss man die frühere Wand als wirksamen Theil der Wellenfläche und die frühere Oeffnung AB als unwirksamen Theil annehmen, also in der Formel für J die Integration von $x = -\infty$ bis $x = 0$ und von $x = a$ bis $x = +\infty$ ausführen. $x = \pm\infty$ werden nicht erreicht. Nun werden aber schon in endlichen Abständen die Lichtwirkungen verschwindend klein; und um den Einfluss der äusseren Ränder auszuschliessen, schreibt man ihnen gleiche Schwingungsphasen zu, was z. B. dadurch geschieht, dass man $\mp\infty$ durch $\mp n\lambda : \sin\varphi$ ersetzt, worin n eine (grosse) ganze Zahl ist. Dann erhält man in dem Ausdrucke für J unter dem Quadratzeichen denselben Ausdruck, wie vorher, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, also für J den früheren Werth. Man kann sich dies Ergebniss auch leicht erklären. Jetzt, wie vorher, heben sich die Wirkungen aller Theile der Wellenfläche von der Breite $\lambda : \sin\varphi$ auf, bis auf einen kleineren Theil als dieser, der allein wirkte. Die in dem Spalt oder in den Seitentheilen desselben wirksamen Theile ergänzen sich aber zu $\lambda : \sin\varphi$. Beide zusammen würden sich auch gegenseitig unwirksam machen, einzeln bringen sie daher gleiche aber entgegengesetzte Geschwindigkeiten in P, also dieselbe Lichtstärke hervor.

Die beugende Wirkung des Spaltes werden wir später, wie schon bemerkt, bei nadelförmigen Eiskryställchen unmittelbar benutzen.

59. Beugung durch eine rechteckige Oeffnung. Die Wirkung einer rechteckigen Oeffnung will ich nur erwähnen; sie ist gleichsam die Verbindung der Wirkung zweier Spalte in zwei auf einander senkrechten Richtungen. Jeder gedachte Spalt bringt mit seiner Richtung parallele helle und dunkle Streifen hervor. Dadurch entsteht in der Mitte ein heller Fleck, von dem in den Richtungen der Kanten der Oeffnung weitere rasch schwächer werdende Flecke ausgehen, die zusammen ein helles Kreuz bilden. In dessen Winkeln erscheinen weitere helle Flecke, die mit denen des Kreuzes in Streifen angeordnet sind. Weil die Breite der Streifen mit der Breite der Oeffnung umgekehrt proportional sind, haben die hellen Flecke rechteckige Gestalten, die mit der der Oeffnung ähnlich sind, aber verschränkt gerichtet.

60. Beugung durch eine kreisförmige Oeffnung. Der Beugung des Lichtes durch Wassertröpfchen liegt die Wirkung einer kreisförmigen Oeffnung zu Grunde. Dieselbe wurde theoretisch untersucht von Schwerd[1]) und Knochenhauer[2]), und die Ergebnisse wurden von ersterem durch Beobachtungen bestätigt. Verdet[3]) theilt in seiner Optik die Entwicklung des letzteren mit. Ich will dieselben hier nicht wiederholen, nachdem ich den Vorgang der Beugung in einem besonderen Falle entwickelt und erörtert habe, sondern nur die Ergebnisse mittheilen.

Fällt das Licht senkrecht auf die Fläche der Kreisöffnung, so entsteht an der Stelle des geometrischen Bildes der Oeffnung ein heller Fleck von der Helligkeit $\pi^2 r^4$, die also mit dem Quadrat der Kreisfläche proportional ist, und um diesen Fleck dunkle und helle Ringe mit rasch abnehmender Lichtstärke J.

Ist r der Halbmesser des Kreises der Oeffnung, und haben φ und ξ die entsprechende Bedeutung wie bisher, so dass

$$\pi \frac{r \sin \varphi}{\lambda} = \xi,$$

so ist

$$J = \pi^2 r^4 \left[1 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{(1.2)^2 3} - \frac{\xi^6}{(1.2.3)^2 4} + \frac{\xi^8}{(1.2.3.4)^2 5} - \cdots\right]^2.$$

Daraus erhält man folgende Tabelle für die Maxima und Minima von J

$(\xi : \pi)$	0	0,610	0,819	1,116	1,333	1,619
$(J : \pi^2 r^4)$	1	0	0,01745	0	0,00415	0

$(\xi : \pi)$	1,847	2,120	2,361	2,621
$(J : \pi^2 r^4)$	0,00165	0	0,00078	0.

Vergleicht man diese Tabelle mit derjenigen für den Spalt (S. 116), so findet man die entsprechenden Werthe von ξ hier etwas mehr als halb so gross, wie dort; und dies kommt daher, dass r etwa dem halben a dort entspricht. Die Abnahme der Helligkeit ist hier eine viel stärkere wie dort, offenbar weil hier das Licht ringsum auf einen ganzen Kreis, dort aber nur nach zwei Seiten hin zerstreut wird.

[1]) Schwerd, Die Beugungserscheinungen, 1835, S. 67.
[2]) Knochenhauer, Die Undulationstheorie des Lichtes, 1839, S. 22.
[3]) Verdet, Leçons d'optique physique. 1869, t. 1, p. 302.

61. Die durch Beugung entstehende Helligkeit. Wenn nun eine grosse Anzahl gleicher Kreisöffnungen unregelmässig zerstreut angebracht sind, aber doch so nahe bei einander, dass ihr Abstand gegen denjenigen vom bestrahlten Punkte P verschwindend ist, so sind die Ablenkungen φ für alle gleich, und dann addiren sich die von den einzelnen hervorgebrachten Lichtstärken J. J wird durch n Oeffnungen an jeder Stelle n mal so gross, wie durch eine Oeffnung. Man könnte denken, dass sich die erzeugten Geschwindigkeiten v addiren, so dass v n-mal und J n^2-mal so gross wird. Dies ist aber nicht der Fall, da die von zwei Oeffnungen übertragenen Schwingungsgeschwindigkeiten nicht dieselben Phasen besitzen, wie es bei der Interferenz an einer engen Oeffnung und bei derselben Lichtquelle stattfindet.

Zur Berechnung der Stärke J des gebeugten Lichtes dienen die Formeln S. 120, wobei wir eine vorläufige Annahme für den Halbmesser r der Tröpfchen machen, uns aber eine spätere Veränderung zu möglichst gutem Anschluss an die Beobachtungen vorbehalten.

Wir werden später zu der Annahme von Eiskryställchen mit wechselnder Grösse $r : \lambda = 3{,}5$ bis $2{,}4$ gelangen und wollen bei den Tröpfchen den Versuch machen für die grösseren, deren r wir mit r_1 bezeichnen, ebenfalls $r_1 : \lambda = 3{,}5$ zu setzen, und später die Ergebnisse der Rechnung mit denen unserer Messung vergleichen. Man erhält dann aus

$$\sin \varphi = \frac{\xi}{\pi} \frac{\lambda}{r}$$

für den ersten dunklen Ring, oder für $\xi : \pi = 0{,}610$, $\varphi_1 = 10^0\ 3'$, und für den zweiten hellen, oder für $\xi : \pi = 0{,}819$, $\varphi_1 = 13^0\ 32'$. Statt nun sehr mannigfache Grössen der Tropfen anzunehmen, wollen wir nur noch diejenige kleinere Grösse r_2 annehmen, bei welcher der erste dunkle Ring den eben bezeichneten zweiten hellen deckt; dann muss sein:

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{\xi}{\pi} = \frac{1}{\sin \varphi_1} = \frac{0{,}610}{\sin\ 13^0\ 32'} = 2{,}6.$$

Bei der Berechnung von J_1 müssen nach S. 118 die verschiedenen Polarisationsrichtungen beachtet werden, da die Ablenkungen φ gross werden. Zerlegt man das natürliche Licht von der Stärke 1 in das senkrecht

zu der den einfallenden und gebeugten Strahl enthaltenden Ebene und das parallel zu derselben schwingende Licht, jedes von der Stärke $\frac{1}{2}$, so muss das gebeugte letztere noch mit dem Faktor $\cos^2\varphi$ versehen werden. Es ist dann die Stärke des gesammten gebeugten Lichtes J_1' getheilt durch πr_1^4 gleich $(J_1 : \pi^2 r_1^4) \frac{1}{2} (1 + \cos^2\varphi)$. Danach erhält man nun für die Stellen der Tabelle auf Seite 120 und für einige Zwischenstellen, wenn $r_1 : \lambda = 3{,}5$

$(\xi : \pi)$	0	0,1525	0,305	0,4575	0,610	0,819	1,116
φ_1	0°	2° 30′	5.01	7.32	10.03	13.32	18.33
$(J_1' : \pi^2 r_1^4)$	1	0,8903	0,6085	0,270	0	0,01745	0 .

Von den kleineren Tropfen mit $r_2 : \lambda = 2{,}6$ seien derart mehr vorhanden als von den grösseren mit $r_1 : \lambda = 3{,}5$, dass die Summen der Oberflächen von beiderlei Arten gleich sind; es müssen dann $r_1^2 : r_2^2$ mal so viele vorhanden sein. Die von je einem kleineren und einem grösseren Tröpfchen bei demselben ξ hervorgebrachten Helligkeiten verhalten sich gemäss der Formel für J wie $r_2^4 : r_1^4$. Die von den vorhandenen ungleichen Anzahlen hervorgebrachten Helligkeiten J_2 und J_1 verhalten sich daher wie $r_2^4 (r_1^2 : r_2^2) : r_1^4$, oder es ist

$$J_2 : J_1 = r_2^2 : r_1^2,$$

woraus

$$\frac{J_2}{\pi^2 r_1^4} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{J_1}{\pi^2 r_1^4} = \left(\frac{2{,}6}{3{,}5}\right)^2 \frac{J_1}{\pi^2 r_1^4} = 0{,}551 \frac{J_1}{\pi^2 r_1^4}.$$

Unter Beachtung der Polarisation ist dann wieder $J_2' = J_2 \frac{1}{2}(1 + \cos^2\varphi_2)$, und hieraus erhält man die folgende Tabelle:

$(\xi : \pi)$	0	0,1525	0,305	0,4575	0,610	0,819	1,116
φ_2	0°	3° 20′	6.42	10.05	13.32	18.22	
$(J_2' : \pi r_1^4)$	0,551	0,490	0,333	0,147	0	0,0091	0 .

Bestimmt man nun durch Einschaltung von Grad zu Grad die Lichtstärken für beiderlei Tröpfchen und nimmt das Mittel der für jedes $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ geltenden, gleicht aber die Zahlen aus, sodass jede Wellenform der Funktion $J_1 \varphi$ verschwindet und eine stetige Abnahme der J bei zunehmendem φ auftritt — wie dies durch die Tröpfchen von zwischenliegenden Grössen

in der That bewirkt wird — so erhalten wir die Werthe J' der Tabelle 26. Die sehr kleinen Werthe von J, welche zu $\varphi > 18^0$ gehören, sind weggelassen.

Tabelle 26.

Berechnung der durch die Beugung an den Wassertröpfchen hervorgebrachten Helligkeit i''.

φ	0^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
J'	0,776	763	729	672	597	510	421	331	241	152	090	054
$J' \sin \varphi$	0,0034	0134	0255	0352	0416	0445	0440	0403	0336	0238	0156	0103
i''	20,460	20,080	19,200	17,720	15,700	13,410	11,090	8,720	6,340	4,000	2,374	1,424

φ	12	13	14	15	16	17	18
J'	028	016	010	006	003	001	000
$J' \sin \varphi$	0058	0036	0025	0016	0009	0003	0000
i''	0,736	0,422	0,264	0,158	0,080	0,026	0,000

62. Einführung der gleichen Einheit wie bei der durch Zurückwerfung und Brechung erzeugten Helligkeit. Um nun für die durch Beugung hervorgebrachten Helligkeiten denselben Maassstab einzuführen, wie für die durch Zurückwerfung und Brechung hervorgebrachten, müssen wir beachten, dass die durch beide Ursachen zerstreuten Lichtmengen einander gleich sind (S. 119); und da wir die letzteren $= 1$ gesetzt haben, müssen auch die ersteren $= 1$ sein.

Wir werden die Helligkeiten i'' nach dem neuen Maassstabe aus den Werthen J' durch Vervielfachung mit einem zu ermittelnden Faktor C erhalten, sodass $i'' = C J'$. Die Lichtmenge, welche aber von einem Raumtheilchen, das Tröpfchen oder Kryställchen enthält, durch Beugung auf eine Kugel zerstreut wird, die jenes Theilchen zum Mittelpunkt und $1\,m$ zum Halbmesser hat, muss nach dem eben Gesagten $= 1$ sein, sodass

$$1 = 2\pi \, \triangle\varphi \sum_0^\pi \sin \varphi \; C J'.$$

Denn das Licht von der Ablenkung φ und der Stärke CJ' fällt auf einen Ring jener Kugel von der Fläche $2\pi \sin \varphi \, . \, \triangle\varphi$, so dass die Licht-

menge für die ganze Kugel durch jene Summe ausgedrückt wird. Aus Tab. 26 ergiebt sich aber für $\triangle\varphi\ (= 1^0) = \pi : 180$, $\sum_0^\pi \sin\varphi\, J' = 0{,}3459$, daher

$$1 = \frac{\pi^2}{90}\ 0{,}3459\ .\ C; \quad C = 26{,}36.$$

Mittelst dieses Werthes von C sind dann die Werthe i'' berechnet und in Tab. 26 eingetragen.

Dritter Abschnitt.

Wirkung der Eiskrystalle durch Zurückwerfung und Brechung.

I. Allgemeines. Das Verfahren zur Berechnung der von den Eiskrystallen erzeugten Helligkeit.

63. Form der Eiskrystalle. Die in den höheren kalten Theilen der Atmosphäre befindlichen Eiskryställchen, welche auch die Cirruswolken bilden, werden allgemein als dem hexagonalen System angehörig angesehen, sowohl weil man unmittelbar diese Krystallform des Eises beobachtete, als auch weil man aus dieser Form die in Cirruswolken besonders deutlich auftretenden hellen Ringe von 22° Abstand von Sonne oder Mond, sowie die verschiedenen anderen derartigen Erscheinungen, wie helle Horizontal- und Vertikalstreifen, Nebensonnen u. s. w. erklären kann. In dieser Beziehung verweise ich besonders auf die eingehenden Arbeiten von Galle[1]) und Bravais[2]).

Diese Kryställchen haben vorherrschend die sechsseitig prismatische Gestalt und sind bei nicht sehr ruhiger Luft beständig bewegt, so dass sie nach keiner Richtung vorherrschend gerichtet sind. Aus dieser Stellung erklärt sich der helle Ring um Sonne oder Mond, der in einem Abstande

[1]) Galle, „Ueber Höfe und Nebensonnen." (Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. Bd. 19, 1840, S. 1 u. 241).

[2]) Bravais, „Mémoire sur les halos et les phénomènes optiques, qui les accompagnent" (Journ. de l'école polyt. t. 18, cah. 31, 1847, S. 3).

von 22° die häufigste der angeführten Erscheinungen ist, auf welche wir eingehend zurückkommen werden. Die anderen Erscheinungen treten nur bei verhältnissmässig ruhiger Luft auf und werden alle durch die annähernd aufrechte Stellung erklärt, welche die langsam sinkenden Eisnadeln annehmen, weil dieses die Stellung des kleinsten Widerstandes ist. Dabei werden die Horizontalstreifen durch Spiegelung an den vertikal stehenden Prismenflächen, der durch die Sonne gehende Vertikalstreifen durch solche an den annähernd horizontalstehenden Endflächen, die selteneren schiefen Streifen durch Spiegelung an den abstumpfenden Pyramidenflächen hervorgebracht.

Das viel häufigere Vorkommen der erstgenannten Ringe zeigt, dass die zerstreute Stellung die häufigste ist, wie es auch dem häufigeren Zustande der stärkeren Bewegung der Luft entspricht. Wir nehmen die Krystalle regelmässig sechsseitig prismatisch mit vorherrschender Längserstreckung, also nadelförmig an, wie es den beobachteten Formen der Schneekrystalle, welche aus Nadeln sternartig zusammengesetzt sind, entspricht, und wie es die aufrechte Stellung bei langsamem Sinken verlangt, da prismatische Plättchen sich mit den Endflächen lothrecht stellen würden. Wir werden dabei nur die Wirkung der Prismenflächen verfolgen, weil dies die weitaus grössten sind, und weil die Beachtung weiterer Flächen die schon ohne dies grossen Schwierigkeiten der Untersuchung noch mehr steigern würde.

Ueber die Grösse der Krystalle ist schwer eine Angabe zu machen. Galle[1]) schreibt die schmalen Höfe, die er am Monde in feinen Cirruswolken öfter maass und deren äussere Grenze er zu 29 bis 31′ Halbmesser fand, der Beugung zu und schliesst daraus, dass der kleinste Durchmesser eines Krystalles = 0,133 mm sei. Den Eiskrystallen, die bei klarem Himmel in den hohen Luftschichten schweben, ist dann ein noch kleineres Maass zuzuschreiben.

64. Brechungskoefficient des Eises. Um nun die Wirkungen solcher Eiskrystalle auf das auffallende Licht zu ermitteln, müssen wir zunächst den Brechungskoefficienten n von Eis gegen Luft kennen. Nach

[1]) A. a. O. S. 285.

Galles[1]) Angabe maass ihn Brewster für dichtes Eis und für die hellste Stelle des Sonnenspektrums und fand $n = 1{,}3085$; Galle selbst bestimmte ihn für die Eiskrystalle aus der Stellung der Nebensonnen $= 1{,}31504$. Bravais[2]) maass ihn für roth $= 1{,}307$, orange $= 1{,}3085$, gelb $= 1{,}3095$, grün $= 1{,}3115$, blau $= 1{,}315$, violett $= 1{,}317$ und nimmt dann für seine Rechnungen an, was wir ebenfalls annehmen wollen, als nahe für die hellste Stelle geltend $n = 1{,}31$.

65. Sätze über die Brechungen durch Eisprismen. Wir entnehmen von Bravais noch folgende Sätze[3]):

Satz 1: Wenn ein Lichtstrahl aus einem Mittel in ein anderes übertritt, so verhält sich der Sinus des Winkels, den der einfallende Strahl mit irgend einer durch das Einfallsloth gelegten Ebene bildet, zu dem Sinus des Winkels, den der gebrochene Strahl mit derselben Ebene bildet, wie der Brechungskoefficient zwischen beiden Mitteln zur Einheit.

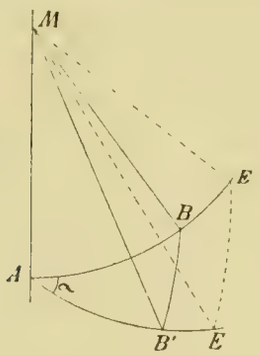


Fig. 19.

Beweis: Es werde durch den Einfallspunkt M eine Kugel gelegt. Diese treffe der verlängerte einfallende Strahl in E, der gebrochene in B, das Einfallsloth in A, so messen die in einer Ebene liegenden Bogen AE und AB bezw. den Einfallswinkel ε und den Brechungswinkel β. Ist nun[4]) $MAB'E'$ jene durch MA gelegte (Normal-)Ebene, welche mit der Einfallsebene den Winkel $EAE' = \alpha$ bildet, sind ME', MB' die senkrechten sphärischen Projektionen von ME, MB auf diese Normalebene, so entstehen die bei E', bezw. B' rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AEE', ABB', worin $EE' = \varepsilon_1$, $BB' = \beta_1$ die Winkel von ME und MB mit jener Normalebene sind. Nun ist nach dem Brechungsgesetze

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = n$$

und nach den Sätzen der sphärischen Trigonometrie $\sin \varepsilon_1 = \sin \varepsilon \sin \alpha$,

[1]) A. a. O. S. 10. [2]) A. a. O. S. 10. [3]) A. a. O. S. 27.
[4]) In Fig. 19 sollte statt des unteren E stehen: E'.

$\sin \beta_1 = \sin \beta \sin \alpha$, woraus unser Satz folgt, nämlich

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \beta_1} = n.$$

Zusatz 1. Wenn ein Lichtstrahl in ein Prisma durch eine Seitenfläche eindringt, so verhält sich der Sinus des Neigungswinkels des äusseren Zweiges des Lichtstrahls gegen die Ebene des auf der Prismenaxe senkrechten Hauptschnittes zu dem Sinus des Neigungswinkels des inneren Zweiges gegen dieselbe Ebene, wie der Brechungskoefficient zur Einheit.

Zusatz 2. In demselben Falle nimmt der aus irgend einer Prismenfläche austretende Strahl die Neigung gegen die Ebene des Hauptschnittes an, welche der Strahl vor dem Eintritte in das Prisma hatte. Findet im Innern des Prismas Zurückwerfung statt, so haben die inneren Zweige des Strahls ebenfalls gleiche Neigung gegen die Ebene des Hauptschnittes.

Satz 2. Die Projektion eines Lichtstrahls auf jede zur brechenden Fläche normale Ebene durchsetzt diese Fläche nach dem Brechungsgesetze mit dem Brechungskoefficienten n', für welchen die brechende Kraft $n'^2 - 1$ gleich ist der brechenden Kraft des Mittels $n^2 - 1$, multiplicirt mit dem Quadrate der Secante der Neigung ψ des eintretenden Strahles gegen jene Normalebene. Ist der lichtbrechende Körper prismatisch und jene zur brechenden Fläche normale Ebene der Normalschnitt des Prismas, und ist ν der Winkel des einfallenden Strahles mit der Prismenaxe, so ist $\nu = 90 - \psi$ und $\sec^2 \psi$ wird durch $1 : \sin^2 \nu$ ersetzt. n' mag der reducirte Brechungskoefficient heissen.

Beweis. In der vorhin betrachteten Fig. 19 stelle MAE' jene Normalebene vor, dann sind $AME' = \varepsilon'$ und $AMB' = \beta'$ die Projektionen des Einfalls- und Brechungswinkels auf diese Ebene; ferner ist $E'ME = \psi = 90^0 - \nu$ und

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \beta'} = n';$$

es wird behauptet

$$n'^2 - 1 = (n^2 - 1) \sec^2 \psi = (n^2 - 1) : \sin^2 \nu. \tag{42}$$

Nach der sphärischen Trigonometrie ist

$$tg\, \varepsilon' = tg\, \varepsilon \cos \alpha, \quad tg\, \beta' = tg\, \beta \cos \alpha, \quad \cos \varepsilon = \cos \varepsilon' \cos \psi = \cos \varepsilon' \sin \nu. \tag{43}$$

Nun ist offenbar

$$n^2 - 1 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \beta} - 1 = \frac{tg^2 \varepsilon \,(1 + tg^2\beta)}{(1 + tg^2\varepsilon)\, tg^2 \beta} - 1 = \frac{tg^2 \varepsilon - tg^2 \beta}{(1 + tg^2 \varepsilon)\ tg^2 \beta}$$

und entsprechend

$$n'^2 - 1 = \frac{tg^2 \varepsilon' - tg^2 \beta'}{(1 + tg^2 \varepsilon')\, tg^2 \beta'}.$$

Daraus wird aber durch Benutzung der obigen Ausdrücke erhalten

$$n'^2 - 1 = \frac{tg^2 \varepsilon - tg^2 \beta}{(1 + tg^2 \varepsilon')\, tg^2 \beta} = (n^2 - 1)\, \frac{1 + tg^2 \varepsilon}{1 + tg^2 \varepsilon'}$$

$$= (n^2 - 1)\, \frac{\sec^2 \varepsilon}{\sec^2 \varepsilon'} = (n^2 - 1)\, \frac{\cos^2 \varepsilon'}{\cos^2 \varepsilon} = (n^2 - 1)\ \sec^2 \psi.$$

Zusatz. Durchsetzt ein Lichtstrahl (in schiefer Richtung) ein Prisma, so ist in der Projektion des Weges des Lichtstrahls auf die Ebene des Hauptschnitts der Brechungskoefficient an der Austrittsebene derselbe n' wie an der Eintrittsebene. Denn der austretende Lichtstrahl bildet denselben Winkel ψ mit der Hauptschnittebene wie der eintretende Lichtstrahl (Satz 1, Zus. 2).

66. Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Richtungen der Axen der Eiskrystalle. Wir nehmen nun die Richtungen der Axen der Eisprismen gleichförmig zerstreut an, so dass ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel auf dieser gleichförmig vertheilt sind. Ebenso nehmen wir die Stellung der Seitenflächen bei den Krystallen mit parallelen Axen gleichförmig vertheilt an.

67. Die durch Eisprismen mit parallelen Axen erzeugten hellen Punkte liegen auf einem durch die Sonne gehenden Kreise, den sie ungleichförmig erhellen. Wenn nun ein Büschel von parallelen Lichtstrahlen auf eine Seitenfläche eines Eisprismas auffällt, so wird ein Theil dieses Lichtes zurückgeworfen und erzeugt einen hellen Punkt auf der Himmelskugel. Ein Theil jenes aufgefallenen Lichtes dringt aber in das Innere des Krystalles ein, trifft dort eine andere Seitenfläche und wird hier entweder total reflektirt, oder tritt zum Theil unter Brechung aus und erzeugt wieder einen hellen Punkt auf der Himmelskugel, während ein anderer Theil wieder in's Innere zurückgeworfen wird. Das im Innern

bleibende Licht trifft wieder eine Seitenfläche, wird hier total reflektirt oder zum Theil reflektirt, zum Theil gebrochen, und so ohne Ende weiter, bis das im Innern bleibende Licht so schwach wird, dass es nicht mehr beachtet zu werden braucht.

Die von einem auffallenden Parallelstrahlenbüschel hervorgebrachten austretenden Lichtbüschel sind ebenfalls aus parallelen Strahlen gebildet, welche mit der Axe des Krystalles nach dem angeführten Satz 1. Zus. 2 (S. 127) denselben Winkel wie der einfallende Strahl bilden, scheinen also alle von Punkten der Himmelskugel herzukommen, welche von dem Punkte A, den die Axe auf derselben bezeichnet, ebenso weit abstehen, wie die Sonne. Alle diese hellen Punkte liegen also auf einem durch die Sonne gehenden Kreise, dessen Pol der Punkt A ist.

Diese Punkte sind verschieden hell, weil die Lichtbüschel verschiedene Querschnitte haben und weil die Lichtschwächungen bei Brechung und Zurückwerfung verschieden sind. Die Querschnitte werden wir durch Zeichnung, die Lichtschwächungen durch Rechnung bestimmen.

So wie das eine Eisprisma erzeugen auch alle andern, die parallele Axen haben, helle Punkte, die auf dem Kreise mit dem Pole A liegen; und diese hellen Punkte bewirken bei ihrer grossen Anzahl und der Lichtschwäche der einzelnen eine scheinbar stetige Beleuchtung. Genau genommen erzeugt das auffallende Lichtbüschel, das wegen der scheinbaren Grösse der Sonne in Wahrheit nicht ein Parallelbüschel ist, nicht einen hellen Punkt, sondern ein ausgedehntes Sonnenbildchen. Die Gesammtmenge des auffallenden Lichtes und die mittlere Helligkeit der betrachteten Stelle werden aber dadurch nicht geändert, so dass wir die Sonne als Punkt und die Lichtbüschel als Parallelbüschel ansehen dürfen.

68. Schwächung des Lichtes beim Begegnen mit einer Krystallfläche. Bestimmen wir zuerst die Schwächung des Lichtes beim Begegnen mit einer Fläche des Krystalls. Will man genau verfahren, so muss man das auffallende natürliche Licht in die beiden in der Einfallebene und senkrecht dazu polarisirten Strahlen zerlegen. Ist dann die verhältnissmässige Menge des vom ersteren zurückgeworfenen Lichtes α', die des zweiten α'', so gilt nach Gl. (5) und (6) (S. 21)

$$\alpha' = \frac{\sin^2(\varepsilon-\beta)}{\sin^2(\varepsilon+\beta)}, \quad \alpha'' = \frac{tg^2(\varepsilon-\beta)}{tg^2(\varepsilon+\beta)},$$

worin ε der Einfalls-, β der Brechungswinkel, also $\sin\varepsilon : \sin\beta = n$. Das ins Innere eindringende Licht hat daher die Stärke

$$1-\alpha',\ 1-\alpha''.$$

Das letztere Licht wird dann an einer anderen Seitenfläche wieder in zurückgeworfenes und gebrochenes zerlegt; um die verhältnissmässigen Lichtmengen beider Bestandtheile zu bestimmen, müsste man, da hier nicht, wie bei den Wassertropfen, die Einfallsebene bei jedem Auftreffen auf die Oberfläche dieselbe bleibt, jeden der beiden polarisirten Strahlen wieder in zwei in der neuen Einfallsebene und senkrecht zu derselben polarisirte Strahlen zerlegen und für alle vier die Stärken ermitteln, und diese

Tabelle 27.

Verhältnissmässige zurückgeworfene α und eindringende $(1-\alpha)$ Lichtmenge bei Eis für natürliches Licht bei dem Einfallswinkel ε.

ε	α	$1-\alpha$	ε	α	$1-\alpha$	ε	α	$1-\alpha$	ε	α	$1-\alpha$	ε	α	$1-\alpha$	ε	α	$1-\alpha$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,		0,	0,
0°	018	982	41°	022	978	51°	032	968	61°	059	941	71°	141	859	81°	378	622
32	018	982	42	023	977	52	034	966	62	064	936	72	155	845	82	420	580
33	019	981	43	024	976	53	036	964	63	069	931	73	170	830	83	465	535
34	019	981	44	025	975	54	038	962	64	075	925	74	187	813	84	528	472
35	019	981	45	026	974	55	040	960	65	081	919	75	205	795	85	578	422
36	020	980	46	027	973	56	042	958	66	088	912	76	225	775	86	643	357
37	020	980	47	028	972	57	045	955	67	096	904	77	248	752	87	717	283
38	021	979	48	029	971	58	048	952	68	105	895	78	275	725	88	800	200
39	021	979	49	030	970	59	051	949	69	116	884	79	306	694	89	893	107
40	022	978	50	031	969	60	055	945	70	128	872	80	340	660	90	1,000	000

Ausführung müsste sich mehrmals wiederholen. Da aber der Zeitaufwand bei den vielerlei Stellungen der Krystalle zu den Lichtstrahlen ein ganz unerschwinglicher wäre, so habe ich das natürliche Licht nicht zerlegt, sondern für dasselbe die mittleren Zahlen

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha''), \quad 1 - \alpha$$

angewendet. Dabei fand ich bei Proberechnungen, welche ich in genauer und in angenäherter Weise ausführte, den Fehler in den ungünstigsten Fällen höchstens = 0,01 der entstehenden Helligkeit, also innerhalb der Beobachtungsgrenze und daher zu vernachlässigen. Ich habe nun die Werthe von α und $1-\alpha$ für ε in Abständen von 10° berechnet und mittelst einer verzeichneten Kurve die Werthe für Abstände von 1° eingeschaltet und in Tab. 27 eingetragen. Von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 32°$ ändert sich α nicht merklich, d. h. nicht um eine Einheit der dritten Stelle. Tab. 27.

69. Die reducirten Brechungskoefficienten für den Normalschnitt eines Eisprismas und die zugehörigen Winkel der totalen Reflexion. In Tab. 28 habe ich die nach Formel (42) (S. 127) berechneten Werthe der reducirten Brechungskoefficienten n' des Eises für die verschiedenen Neigungen ν des Lichtstrahls gegen die Krystallaxe niedergelegt, sowie die Winkel τ der totalen Reflexion in der Ebene des Hauptschnittes, d. h. den Einfallswinkel τ der Projektion des Lichtstrahls im Innern des Krystalles auf die Hauptschnittsebene, bei welchem dieser Lichtstrahl total reflektirt wird, sodass Tab. 28.

$$\sin \tau = \frac{1}{n'}. \tag{44}$$

Tabelle 28.

Reducirte Brechungskoefficienten n' und Winkel τ der totalen Reflexion in Eiskrystallen für die Winkel ν zwischen einfallendem Strahl und Krystallaxe.

ν	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
n'	∞	4,972	2,669	1,967	1,653	1,490	1,400	1,346	1,318	1,310
τ	0	11° 35′	21.59	30.32	37.12	42.06	45.33	47.58	49.23	49.46

70. Bezeichnungen. Für die weiteren Untersuchungen und in Fig. 20 sind folgende Bezeichnungen eingeführt: Fig. 20.

M Ort eines Eiskrystalls und Mittelpunkt der Himmelskugel SA, deren Halbmesser = 1 und gross gegen die Maasse des Krystalles ist;

S Ort der Sonne auf der Himmelskugel;

A Schnittpunkt der Axe des Eisprismas mit der Himmelskugel;

SPT Parallelkreis, aus A als Pol durch S gelegt, auf welchem die durch die Wirkung einer oder mehrerer Seitenflächen des Eisprismas hervorgebrachten Sonnenbildchen P erscheinen;

$v = \sphericalangle SMA =$ Bog. $SA =$ Bog. AT, Neigung der Sonnenstrahlen gegen die Krystallaxe;

$\varphi = \sphericalangle SMP =$ Bog. $SP =$ Winkelabstand eines Sonnenbildchens von der Sonne;

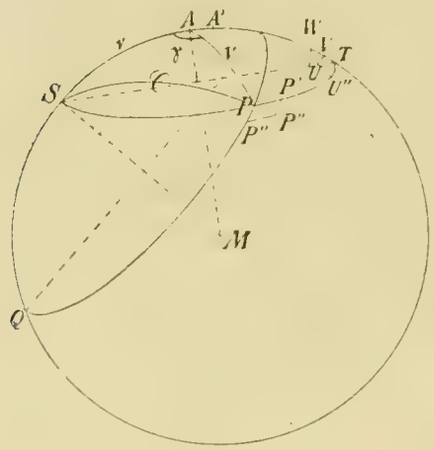


Fig. 20.

$\gamma = \sphericalangle SAP =$ Winkel der beiden durch die Krystallaxe AM gelegten Ebenen, von denen die erste noch den eintretenden Strahl SM, die andere den austretenden PM enthält;

e die Entfernung des betrachteten Lufttheiles vom Beobachter, wobei dieser Theil 1 Kubikmeter Inhalt habe und in der Richtung des Sehstrahles 1 m dick sei, also dem Beobachter die Fläche von 1 qm zukehre;

m die Anzahl der Eiskrystalle in diesem Kubikmeter;

f die Grösse der Seitenflächen der sechsseitig prismatischen Eiskrystalle;

$Q = f \cos \varepsilon$ der senkrechte Querschnitt des auf die Fläche f unter dem Einfallswinkel ε auffallenden Lichtbüschels;

q der verhältnissmässige räumliche Antheil an diesem auffallenden Lichtbüschel, welcher demjenigen Lichtbüschel zukommt, der den Krystall verlässt und den Eindruck des hellen Punktes P hervorbringt, und welcher einmal zurückgeworfen, oder zweimal gebrochen und im Innern des Krystalls keinmal, einmal oder mehrmal zurückgeworfen sein kann;

η das Verhältniss der Lichtstärke dieses Lichtbüschels nach seinem Austritt zu derjenigen vor seinem Eintritt;

$\triangle v = AA'$ kleine unveränderliche Bogenabstände benachbarter Axenpunkte A auf der Himmelskugel;

δ der Winkel der Ebene MAS der Krystallaxe und der Sonne mit der Normalen der betrachteten Krystallfläche, d. i. auch der Winkel der Projektion des Lichtstrahls auf die Normalfläche des Krystalls mit der Normale der betrachteten Fläche;

$\triangle \delta$ kleine unveränderliche Unterschiede der Winkel δ bei denjenigen Krystallen, welche parallele Axen oder denselben Axenpunkt A besitzen;

$\triangle \gamma$ kleine veränderliche Unterschiede der Winkel γ, welche durch die Veränderungen von ν und δ um $\triangle \nu$ und $\triangle \delta$ verursacht werden.

71. Regelmässige Vertheilung der Krystalle in kleine Gruppen von gleicher Stellung. Wir denken uns nun die m in einem Kubikmeter enthaltenen Eiskrystalle in regelmässige Vertheilung gestellt, derart, dass die Schnittpunkte A der Axen mit der Himmelskugel auf dieser gleichförmig vertheilt sind, so dass auf gleichen Flächen gleich viele Punkte liegen, wenn diese Zahl nicht klein ist. Wir wollen die Krystalle in Gruppen vereinigen, so dass die Punkte A einer Gruppe benachbart sind und Abstände $< \triangle \nu$ besitzen und den Raum $\triangle \nu . \triangle \nu$ auf der Himmelskugel erfüllen; dabei soll die Eintheilung der Himmelskugel durch Parallelkreise um den Sonnenpunkt S als Pol von den Kreisbogenhalbmessern ν und in Bogenabständen $\triangle \nu$ geschehen, und auf jedem dieser Kreise sollen die Punkte A wieder die Abstände $\triangle \nu$ besitzen. Dadurch liegen in den Ringen zwischen zwei benachbarten Parallelkreisen verschiedene Anzahlen jener Parallelogramme vom Inhalt $\triangle \nu . \triangle \nu$, welche man an jeder Stelle für sich als Quadrate ansehen kann. Die Anzahl der in einem Kubikmeter enthaltenen Gruppen ist daher gleich der halben Kugelfläche 2π, getheilt durch den von dem einen der Axenenden A erfüllten Raum $\triangle \nu^2$ oder $= 2\pi : \triangle \nu^2$. Allen Krystallen einer Gruppe wollen wir der Einfachheit der Behandlung wegen parallele Axen mit ihrem mittleren Sonnenabstande ν zuschreiben.

Die Krystalle einer Gruppe sollen aber gleichförmig vertheilte Stellungen der Seitenflächen besitzen, so dass die Normalen der je 6 Seitenflächen in den verschiedenen Krystallen einer Gruppe gleiche Winkelabstände $\triangle \delta$ besitzen. Dieser Winkelabstand $\triangle \delta$ ist gleich dem sechsten Theil von 360^0 oder von 2π, getheilt durch die Anzahl der Krystalle einer Gruppe,

er wird also um so kleiner, je grösser man den einer Gruppe zukommenden Raum $\triangle \nu^2$ macht, oder er nimmt ab bei zunehmendem $\triangle \nu$, so dass diese sich in entgegengesetztem Sinne ändernden Grössen einmal einander in der Gleichheit begegnen, wir sie also gleich machen dürfen. Wir machen daher der Einfachheit halber die Gruppen so gross, dass $\triangle \delta = \triangle \nu$ wird. Die Anzahl der Krystalle einer Gruppe ist daher $= (2\pi : 6) : \triangle \nu = \pi : 3 \triangle \nu$, und daher erhält man für die Anzahl m der Krystalle in einem Kubikmeter $m = (2\pi : \triangle \nu^2)\ (\pi : 3 \triangle \nu)$, oder da m gegeben ist,

$$\triangle \nu = \sqrt[3]{\frac{2\pi^2}{3m}}. \tag{45}$$

Dabei soll $\triangle \nu$ so klein werden, dass man es im allgemeinen wie unendlich klein behandeln kann; daher muss m eine sehr grosse Zahl sein. Sollte m in Wahrheit klein werden, so denkt man es mit einer grossen Zahl α vervielfacht, und erhält dann die Wirkung von α Kubikmeter Luftraum, die, wieder mit α getheilt, die mittlere Wirkung von einem Kubikmeter bezeichnet.

72. Anordnung der Sonnenbildchen. Ein Eiskrystall erzeugt mit dreien Seitenflächen, auf welche das Sonnenlicht auffällt, Sonnenbildchen, und zwar eine unbegrenzte Anzahl, da das ins Innere eingedrungene Licht
Fig. 20. immer nur zum Theil an einer Seitenfläche wieder austritt; von diesen Bildchen verfolgen wir aber nur die kleine Anzahl der verhältnissmässig hellen. Alle durch die Krystalle mit parallelen Axen erzeugten Bildchen P liegen auf demselben um A durch S gezogenen Kreise SPT. Nun denken wir uns die drei wirksamen, von der Sonne beschienenen Flächen um die Krystallaxe ruckweise, und zwar jedesmal um den Winkel $\triangle \delta$, im Ganzen um 60° gedreht, oder was einfacher, wir denken uns nur eine wirksame Fläche, diese ebenfalls jedesmal um $\triangle \delta$, im Ganzen aber um 180° gedreht, von einer Lage des streifenden Lichtes zur andern. Dabei kann, wie wir finden werden, in Bezug auf P zweierlei eintreten:

1. P verändert seine Lage und geht auf jenem Parallelkreise SPT nach P, wobei sich γ um $\triangle \gamma$ ändert; durch alle Krystalle derselben Gruppe entsteht dadurch eine Reihe von Punkten P, P' . . .

2. P bleibt trotz der Drehung des Krystalls um seine Axe an der Stelle, γ ändert seine Grösse nicht; die durch die Krystalle derselben Gruppe erzeugten Punkte P decken sich. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn der Lichtstrahl ohne eine Zurückwerfung erfahren zu haben durch die der Eintrittsfläche gegenüberliegende parallele Fläche austritt; ausserdem aber auch bei anderen weniger einfachen Strahlengängen.

Geht man sodann in jedem dieser Fälle auf die andern Krystallgruppen von demselben ν über, so beschreibt A um S als Pol einen Kreis, und um denselben Pol S beschreibt P den Kreis PQ. Auf diesem letzteren befinden sich so viele helle Punkte $P''\ldots$, als Lagen des A auf seinem Kreise, d. i. als $\triangle\nu$ in dem Kreisumfange enthalten ist. Nun ergiebt sich ein Unterschied in beiden Fällen.

1. Im ersten Falle beschreiben die verschiedenen Punke $P, P'\ldots$ verschiedene Parallelkreise um S, und es entsteht ein Netz heller Punkte, welches an jeder Stelle eine Helligkeit erzeugt, ausgedrückt durch die Lichtmenge des hellen Punktes dieser Stelle, getheilt durch die Fläche b des Parallelogramms $PP'P'''P''$ der benachbarten Punkte des Netzes, d. i. des Bereiches jenes Punktes. Diese Helligkeit ist entlang des Kreises PQ unveränderlich. Das Bereich dieser durch eine bestimmte Art von Punkten P hervorgebrachten Beleuchtung auf der Himmelskugel ist durch zwei um S als Pol gezogene Kreise begrenzt, welche durch die Erstreckung der Punkte P auf dem Kreise SPT bestimmt sind, indem diese nicht immer den ganzen Kreis besetzen. Lässt man nun ν sich um $\triangle\nu$ ändern, so geht A in den benachbarten A', der Kreis SPT in einen benachbarten ebenfalls durch S gehenden über, und die auf diesem liegenden hellen Punkte bringen eine neue Beleuchtung der Himmelskugel hervor. Derselbe Vorgang wiederholt sich für weitere Lagen von A, und es müssen dann alle auf demselben um S gezogenen Kugelkreise herrschenden Helligkeiten addirt werden. Es muss hier eine Summirung nach ν ausgeführt, oder es müssen verschiedene Einzelhelligkeiten in einer Anzahl addirt werden, welche angiebt, wie oft $\triangle\nu$ in dem für jenen Kugelkreis wirksamen Bereiche der Punkte A auf dem Kreise SA enthalten ist.

2. Wenn dagegen bei unveränderlichem A und ν, aber bei veränderlichem δ, also bei Drehung des Krystalls um seine Axe, der Punkt P und

der Winkel γ sich nicht ändern, so häufen sich in P die hellen Punkte; diese erzeugen aber bei Drehung um MS keinen hellen Flächenstreifen, sondern nur eine helle Linie PQ, deren Helligkeit, ebenso wie die des hellen Sonnenpunktes, unendlich wäre. Man kommt aber für die Berechnung der entlang dieser Linie herrschenden Helligkeit zu einem mit dem früheren gleichartigen Rechnungsgange, wenn man die Reihenfolge der Veränderungen umkehrt, nämlich zuerst nur ν sich ändern, also A auf SA hinlaufen lässt, dann A sich um S gedreht und endlich δ sich geändert denkt. Geht nun A nach A', während δ ungeändert bleibt, so geht der Kreis SPT in $S\,P'\,T'$ über, der grösste Kreis AP in $A'P'$, wobei das von δ abhängige $\gamma = SAP = S\,A'\,P'$ ungeändert bleibt; aber P und P' liegen nicht in demselben um S beschriebenen Kugelkreise. Gehen bei einer Drehung um MS die Punkte P, P' bezw. nach P'', P''', so ist wieder das Parallelogramm $PP'P'''P'' = b$ das Bereich des Punktes P, und die von ihm erzeugte Helligkeit entlang des Kreises PQ ist gleich der Lichtmenge des hellen Punktes P, getheilt durch b. Lässt man dann δ wechseln, d. i. den Krystall sich um seine Axe drehen, so bleiben P und P' an ihrer Stelle, verändern aber ihre Helligkeiten; sie beschreiben daher bei ihrer Drehung um MS dieselben Kreise mit Helligkeiten, die von den früheren verschieden sind; und diese müssen durch Summirung nach δ zusammengefügt werden.

Fig. 21.

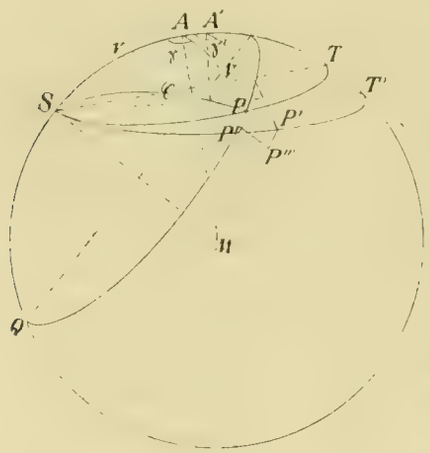


Fig.2 1.

Da die Krystallflächen sehr klein sind und die Sonne einen scheinbaren Durchmesser von 32′ besitzt, so kann eine solche Fläche nicht das ganze Sonnenbild zeigen. Aber es wirken alle parallelen Flächen verschiedener Krystalle zusammen, welche den ganzen Sehkegel nach dem zur Flächenstellung gehörigen Sonnenbilde ausfüllen. Würde die scheinbare Grösse der Sonne ohne Aenderung ihrer Lichtmenge abnehmen, so würde dies keinen Unterschied der in der fraglichen Richtung erzeugten Himmelshelligkeit hervorbringen, weil die Menge der wirkenden (parallelen) Krystallflächen im Verhältniss mit der Sonnenscheibe abnähme, die Helligkeit jedes hellen Punktes aber im umgekehrten Ver-

hältniss zunähme. Daher können wir auch ohne Fehler die Sonne als Punkt betrachten.

73. Die von den Sonnenbildchen hervorgebrachte Helligkeit.

Nun sind wir im Stande, die Formeln für die durch einen hellen Punkt hervorgebrachte Helligkeit h und für die Gesammthelligkeit H an einer Stelle des Himmels aufzustellen. Ist wieder L die Lichtmenge, welche die Sonne auf ein beim Eiskrystall liegendes Quadratmeter senkrecht aufstrahlt, so ist $Lf\cos\varepsilon$ die auf eine Krystallfläche f auftreffende, und (nach S. 132) $Lf\cos\varepsilon.q\eta$ die auf ein Sonnenbild P kommende Lichtmenge; daher ist die durch dieses Bild und durch sein in Bezug auf die Ebene MSA symmetrisches Bild entlang des Kreises PQ erzeugte Helligkeit[1])

$$\left.\begin{aligned} h &= Lf\cos\varepsilon.q\eta\,\frac{2}{b} = \frac{Lf}{\triangle\nu^2}\,l, \text{ wenn man setzt:}\\ l &= \cos\varepsilon.q\eta\,\frac{2\triangle\nu^2}{b} = s\,\frac{2\triangle\nu^2}{b}, \text{ worin wieder } s = \cos\varepsilon.q\eta. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Indem man den Faktor 2 zugefügt hat, darf man δ sich nur von 0 bis 90° und nicht von $-90°$ bis $+90°$ ändern lassen.

Die durch sämmtliche Krystalle des Kubikmeters bewirkte Helligkeit H an der Stelle P ist daher, wenn γ sich mit δ ändert, wenn also $d\gamma:d\delta$ nicht $=0$, die Summe der h nach ν, oder

$$H = \Sigma_\nu\, h, \quad (47)$$

genommen über das zwischen 0° und 90° gelegene Bereich von ν, innerhalb dessen die fragliche Art des Sonnenbildes erzeugt wird. Andererseits ist, wenn $d\gamma:d\delta=0$, H die Summe nach δ, oder

$$H = \Sigma_\delta\, h, \quad (48)$$

genommen über das zwischen 0° und 90° gelegene Bereich von δ, innerhalb dessen die fragliche Art des Bildes erzeugt wird.

Die für das Auge wirksame Helligkeit wird infolge des Abstandes des die Eiskrystalle enthaltenden Kubikmeters von dem Auge nur durch die zwischenliegende Luft geschwächt, was später noch berücksichtigt wird,

[1]) Die Bedeutung von b siehe S. 135.

nicht aber durch die Entfernung für sich, weil hier, wie stets bei der scheinbaren Helligkeit einer Fläche, sowohl die Grösse des Flächenbildes auf der Netzhaut, als auch die Menge des auf dieses Bild fallenden Lichtes im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Entfernung stehen, so dass die Helligkeit dieses Bildes, d. i. die Lichtmenge seiner Flächeneinheit, unabhängig von der Entfernung ist.

74. Wege der Sonnenstrahlen in den Eisprismen. Ehe wir nun zur Berechnung der letzten Formeln schreiten können, ist es erforderlich, Fig. 22. den Vorgang in einem Krystalle zu betrachten. Sei das regelmässige Sechseck mit den Seiten I, II . . . VI der Hauptschnitt des Eisprismas, M sein Mittelpunkt, und mag als Beispiel der Fall für $\nu = 50^0$, $\delta = 40^0$ eingezeichnet werden. I sei die betrachtete Fläche; die aus M auf sie gefällte Normale treffe den um das Sechseck beschriebenen Kreis in dem mit 0^0 bezeichneten Punkte. Die Projektion des einfallenden Strahles, durch M gegen die Lichtquelle hin gezogen, treffe jenen Kreis in einem Punkte, der wegen $\delta = 40^0$ mit 40^0 bezeichnet sei. Die beiden auf I fallenden Grenzstrahlen laufen parallel zu $M\,40^0$ und sind mit 0 bezeichnet.

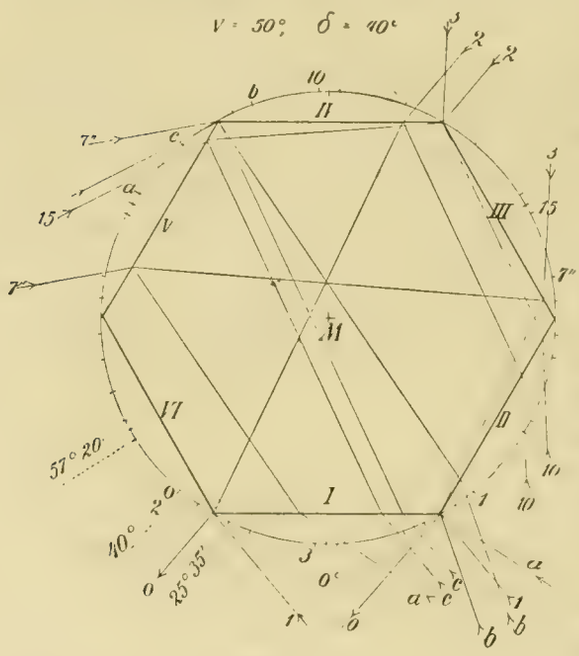


Fig. 22.

Das zurückgeworfene Lichtbüschel erzeuge auf der Himmelskugel den hellen Punkt P_1, es zeigt sich in der Figur als 1,1. Auf den Strahlen sind Pfeile angegeben, welche, der Richtung der Lichtfortpflanzung entgegen, nach den erzeugten Sonnenbildern hinweisen. Die Richtung dieser zurückgeworfenen Strahlen 1 ist durch den Punkt 1 auf jenem Kreise angegeben, wobei $M\,1$ parallel zu den Strahlen 1 u. im Sinne ihrer Pfeile gezogen ist.[1])

[1]) In Fig. 22 ist am Kreise die Ziffer 1 falsch eingeschrieben. Sie gehört an die diametral gegenüberliegende Stelle des Kreises. Die andern Zeichen folgen obiger Regel.

Die Richtung des durch I eindringenden Strahles finden wir aus $\sin \varepsilon' : \sin \beta' = n'$ (S. 127), wobei für $\nu = 50^0$ nach Tab. 28 (S. 131) $n' = 1{,}49$ ist; daher für $\varepsilon' = \delta = 40^0$, $\beta' = 25^0\ 35'$, wofür der entprechend bezeichnete Punkt auf dem Kreise eingetragen ist. Mit dessen Halbmesser parallel sind dann die eindringenden Grenzstrahlen gezeichnet.

Ein Theil dieses Büschels fällt auf IV, wodurch ein austretendes Büschel 2 (nach P_2) und parallel $M\,0$ oder $M\,40^0$ hervorgebracht wird. Ein anderer Theil jenes Büschels fällt auf III mit dem inneren Auffallwinkel $\beta'' = 60^0 - \beta' = 34^0\,25'$; daraus folgt der Austrittswinkel ε'' aus $\sin \varepsilon'' : \sin \beta'' = n'$, also $\varepsilon'' = 57^0\,20'$. Dementsprechend ist auf dem Kreise ein Punkt von diesem Abstande von 0^0 bezeichnet. Weil aber hier nicht I, sondern III die wirksame Fläche ist, und weil ebenso jede Fläche möglicher Weise in Wirkung tritt, sind aus den Schnittpunkten aller Flächennormalen mit dem Kreise nach beiden Seiten hin die Winkel 40^0, $25^0\ 35'$, $57^0\ 20'$ aufgetragen, vermittelst deren das aus III austretende Strahlenbüschel 3,3 gezeichnet werden konnte.

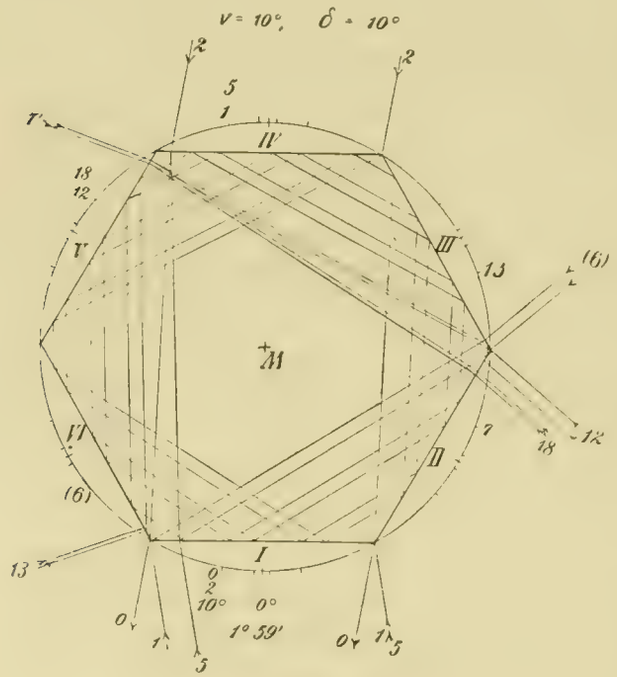
Von dem inneren auf IV auftreffenden Büschel tritt ein Theil als 2 aus, ein anderer Theil wird aber im Innern zurückgeworfen, trifft auf II auf, und tritt hier zum Theil als Büschel 10,10 aus, zum andern Theil wird es wieder ins Innere zurückgeworfen. Wir verfolgen aber dies letztere wegen der sehr geringen Lichtstärke, die sich alsbald ergeben wird, nicht. Wir fanden nämlich, dass ein Strahl, der 3- oder 4-mal an einer Fläche eine Theilung in gebrochenes und zurückgeworfenes Licht erfahren hat, nicht weiter verfolgt zu werden braucht. Durch totale Reflexion im Innern erfolgt dagegen keine Schwächung.

Das innere Büschel, welches von I auf III gelangt und zum Theil als 3 austritt, wird zum andern Theil auf V zurückgeworfen, tritt hier theilweise als 7'' aus, wird auf I und II zurückgeworfen, und tritt hier zum grösseren Theil als a und b aus. Ein anderer Theil des von I auf III gelangenden Büschels wird auf IV unter dem Winkel $60^0 + 25^0\,35'$ zurückgeworfen, erleidet dabei totale Reflexion, weil nach Tab. 28 der Winkel der totalen Reflexion $\tau = 42^0\,6'$ ist, fällt dann auf V, tritt hier zum Theil als 15 aus und wird zum anderen Theil auf I zurückgeworfen, wo es zum

grösseren Theil als c austritt. Letzteres Büschel hat daher Schwächungen an I, III, V, I und an IV eine totale Reflexion erfahren.

Es mag noch ein anderes Beispiel angeführt werden, das für $\nu = 10^0$, $\delta = 10^0$. Hier ist nach Tab. 28 $n' = 4{,}97$, $\tau = 11^0\,39'$; es kann also kein Strahl aus dem Innern austreten, der unter einem grösseren Winkel, als $11^0\,39'$ einfällt. Daher rühren die häufigen totalen Reflexionen dieses Falles. Aus $\delta = \varepsilon' = 10^0$ folgt $\beta' = 1^0\,59'$, daraus der Einfallswinkel an der Innenseite von III $\beta'' = 60^0 - 1^0\,59' = 58^0\,1'$, und hieraus ε'' imaginär. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Fall nur Strahlen austreten, welche im Innern den Winkel von $1^0\,59'$ und im Aeussern den Winkel von 10^0 mit der Normale bilden. Das schmale Büschel, welches von I auf III fällt, kann daher erst, nachdem es auf III, IV, V, VI, I, II, III, IV, V, VI, I, II, III, IV, V, VI, I total reflektirt wurde, aus III als Büschel (6) austreten, während ein kleiner Theil desselben an II und III total reflektirt wird und aus V als 7' zum Theil austritt; es musste über dreimal ringsum wandern. Der zum Theil als 7' austretende Büschel wird zum anderen Theil an V reflektirt und tritt aus II als Büschel 18 aus.

Fig. 23.



Jenem vielgewanderten Büschel entsprechend und symmetrisch in Bezug auf die mit I und IV parallele Durchmesserebene giebt es ein lichtschwächeres Büschel, welches von dem Büschel herrührt, das zum grösseren Theil durch I und IV hindurchtritt und zum kleineren Theil nach I und II zurückgeworfen wird. Wir brauchten es nicht zu verfolgen, sondern nur die zu 2 (6), 7' symmetrischen Büschel 5 (etwas schmäler als 2), 12, 13 zu zeichnen.

75. Die bei einem gegebenen Einfallswinkel möglichen Brechungs- und Austrittswinkel. Gehen wir nun zu den Untersuchungen im Einzelnen über und bestimmen zunächst einige Winkel für die Projektionen des Sonnenstrahls auf die Hauptschnittebene. Ist, wie schon theilweise angegeben, Fig. 24.

$\varepsilon' = \delta$ der Einfallswinkel an der Fläche I,

β' der Brechungswinkel,

β'' der Einfallswinkel des inneren Strahles auf III,

β''' desgleichen auf II,

ε'' der Austrittswinkel aus III, so ist

$$\left.\begin{aligned} &\beta'' = 60^0 - \beta', \quad \beta''' = 120^0 - \beta', \\ &\frac{\sin\varepsilon'}{\sin\beta'} = \frac{\sin\varepsilon''}{\sin\beta''} = n', \\ &\frac{\sin\delta}{\sin\beta'} = \frac{\sin\varepsilon''}{\sin(60^0-\beta')} = n'. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Geht der innere Strahl von I auf IV, so tritt hier ein Theil unter dem Winkel ε' aus. An III erleidet er totale Reflexion, sobald $\beta'' > \tau$ (s. Tab. 28). Auf II kann er nur auftreffen, wenn $\beta''' < 90^0$, also $\beta' > 30^0$. Da nun für jeden inneren Brechungswinkel β' gilt $\beta' \lessgtr \tau$, so muss sein $\tau > 30^0$ und nach Tab. 28 $\nu > 29^0$ (nahezu). Der unter dieser Bedingung auf II auffallende Strahl erleidet aber hier jedenfalls totale Reflexion, weil β''' nur $> \tau$ sein kann; denn wirklich, da jedenfalls $\tau \lessgtr 49^0\,46'$ (Tab. 28), und $\beta' \lessgtr \tau$, so ist $\beta''' = 120^0 - \beta' \gtrless 120^0 - 49^0\,46' \gtrless 70^0\,14'$, also $\beta''' > \tau$.

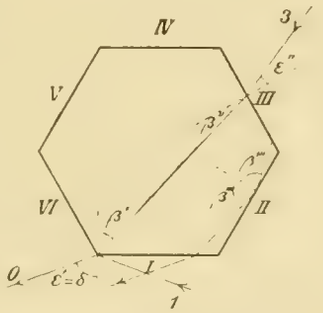


Fig. 24.

Andere innere Einfallswinkel als $\beta', \beta'', \beta''', (60^0 + \beta')$, und andere Austrittswinkel als $\varepsilon', \varepsilon''$ können nicht vorkommen. Denn aus β' an einer Fläche N entsteht an $(N+1)$ β''' und daraus an $(N+2)$ nach (49) $120^0 - (120^0 - \beta')$, also wieder β'; aus β' an $(N+2)$ oder an $(N+3)$ entsteht β'' oder β'. Aus β'' an N entsteht ferner an $(N+2)$ oder an $(N+3)$ β' oder β''; an $(N+1)$ entsteht nach (49) $120^0 - (60^0 - \beta') = (60^0 + \beta')$. Bei solchem Einfallswinkel muss aber nach obigem stets totale Reflexion eintreten. Aus $(60^0 + \beta')$ an

N entsteht aber an $(N+1)\ 120^0 - (60^0 + \beta') = 60^0 - \beta' = \beta''$; an eine weitere Fläche kann er nicht gelangen. Die einzigen Einfallswinkel, bei denen ein Austritt möglich ist, sind also β' und β'', die einzigen zugehörigen Austrittswinkel also ε' und ε''.

In der Projektion auf den Normalschnitt des Eisprismas ist die Ab-
Fig. 24. lenkung γ_n des austretenden Strahles n vom eintretenden 0 in Fig. 24 (oder $\gamma = SAP$ in Fig. 20), gezählt von 0 über die nach aussen gezogene Normale der Fläche I, sehr mannichfach zu berechnen; für $n = 1$ ist offenbar

$$\gamma_1 = 2\delta + 180^0; \tag{50'}$$

Fig. 22. für den aus IV in Fig. 22 austretenden Strahl 2 gilt

$$\gamma_2 = 0; \tag{50''}$$

für den Strahl 3 (Fig. 24 u. 22) offenbar

$$\gamma_3 = \delta + \varepsilon'' - 60^0. \tag{50'''}$$

76. Bestimmung des verhältnissmässigen Raumantheils q der Theillichtbüschel. Der verhältnissmässige Raumantheil q eines austretenden Lichtbüschels an dem ganzen auf I auftreffenden Büschel wird aus der Zeichnung entnommen. Tritt ein Büschel unter dem inneren
Fig. 22. Winkel β' und dem äusseren ε' durch eine Fläche, wie 2 an IV in Fig. 22, so wird die Breite des Büschels auf der Sechseckseite dieser Fläche (IV) gemessen und durch die Länge der Linie I getheilt; der Quotient ist q.

Tritt dagegen das Büschel unter den Winkeln β'', ε'' durch eine Fläche, so müssten die Grenzlinien des inneren Büschelbildes durch eine Sechseckseite, für welche der Einfallswinkel β' gilt, oder die Grenzlinien des äusseren Büschelbildes durch eine Sechseckseite, für welche der Einfallswinkel ε' gilt, geschnitten, und die Länge des Schnittes durch die Länge von I getheilt werden. Man kann auch das Büschel im Inneren bis zu einer Grenzlinie verfolgen, für welche β' gilt.

77. Bestimmung des Schwächungskoefficienten η. Sodann ist die Schwächung η der Lichtstärke eines Büschels infolge seines Durchgangs durch einen Krystall zu bestimmen. Sie muss für jede Krystallfläche ermittelt werden, an der eine Spaltung in zurückgeworfenes und gebrochenes Licht stattfindet; bei totaler Reflexion tritt, wie schon bemerkt, keine Schwächung ein.

Ist ε' oder ε'' der äussere Winkel in der Projektion auf die Hauptschnittebene, so ist vom wirklichen Strahl der äussere Einfallswinkel bezw. ε oder ε_1, gegeben durch Gl. (43) (S. 127)

$$\left.\begin{aligned} \cos\varepsilon &= \cos\varepsilon' \sin\nu = \cos\delta \sin\nu, \\ \cos\varepsilon_1 &= \cos\varepsilon'' \sin\nu. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

In der Tab. 27 sucht man dann die zu ε und ε_1 gehörigen verhältnissmässigen Lichtmengen α und α_1 des eindringenden, sowie $1-\alpha$ und $1-\alpha_1$ des gebrochenen Lichtes. Dann ist das Produkt der für das betrachtete Lichtbüschel an allen zerlegenden Flächen geltenden Schwächungskoefficienten der Gesammtlichtschwächungskoefficient η.

So gilt in Fig. 22 für das an I zurückgeworfene Büschel 1, $\eta_1 = \alpha$, Fig. 22. für das an IV austretende zweimal gleichartig gebrochene Büschel 2, $\eta_2 = (1-\alpha)^2$, für das an III austretende zweimal ungleichartig gebrochene 3, $\eta_3 = (1-\alpha)(1-\alpha_1)$, für das an I, III, IV, V auftreffende (dabei an IV total reflektirte) Büschel 7, $\eta_7 = (1-\alpha)\alpha_1(1-\alpha_1)$; für das sich an V von 7 trennende Büschel c, das bei I austritt, $\eta_c = (1-\alpha)\alpha_1^2(1-\alpha)$. Für dieses Büschel c treten vier Schwächungen ein, und es wird, zumal in diesem Falle wegen seines geringen räumlichen Inhalts, kaum mehr merklich sein. In der Regel gehen wir nicht weiter als bis zu Büscheln mit drei Schwächungen.

78. Bestimmung des Bereiches b der Lichtpunkte im Lichtpunktnetze. Wir kommen nun zur Bestimmung von φ und von dem Bereiche $b = P\,P'\,P'''\,P''$ eines Sonnenbildes P (Fig. 20 u. 21). Denkt Fig. 20 u. 21. man sich in dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke ASP aus A auf SP senkrecht einen Bogen gefällt, so erhält man aus dem halben Dreiecke

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\nu \sin\frac{\gamma}{2}. \tag{52}$$

Denkt man sodann den Eiskrystall um seine Axe um $\Delta\delta$ gedreht, so bleibt ν unverändert, wogegen sich γ im allgemeinen ändert. Die Aenderung $\Delta\gamma$ erhält man, da die Aenderungen wie unendlich kleine behandelt werden dürfen, durch Differentiation der Gleichungen (50). Gilt Gl. (50') (S. 142), so ist

$$\Delta\gamma_1 = 2\,\Delta\delta; \tag{53'}$$

gilt Gl. (50''), so ist

$$\Delta\gamma_2 = 0, \tag{53''}$$

gilt Gl. (50'''), so ist

$$\Delta\gamma_3 = \Delta\delta + \Delta\varepsilon''. \tag{53'''}$$

Im letzteren Falle erhält man aus Gl. (49) (S. 141) durch Differentiation, wobei wegen des unveränderlichen ν auch n' unveränderlich ist,

$$\cos\beta'\,\Delta\beta' = \frac{1}{n'}\cos\delta\,\Delta\delta,$$

$$\cos\varepsilon''\,\Delta\varepsilon'' = -n'\cos(60^0-\beta')\,\Delta\beta'$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen

$$\Delta\varepsilon'' = -\frac{\cos(60^0-\beta')\cos\delta}{\cos\beta'\quad\cos\varepsilon''}\,\Delta\delta.$$

Dies in den Ausdruck von $\Delta\gamma_3$ eingesetzt, liefert

$$\Delta\gamma_3 = \Delta\delta\left(1-\frac{\cos(60^0-\beta')\cos\delta}{\cos\beta'\cos\varepsilon''}\right). \tag{54}$$

In dem ersten und dritten Falle, in welchem $\Delta\gamma$ nicht Null, lassen wir nach S. 135 ν unverändert, und erhalten dann durch Differentiation von Gl. (52)

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\nu\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,\Delta\gamma \tag{55}$$

Fig. 21. Dreht man nun A um S als Pol, so dass A auf seinem Parallelkreise vom Halbmesser $\sin\nu$ einen Bogen $= \Delta\nu$ beschreibt, so beschreibt P auf seinem Parallelkreise, dessen Halbmesser $\sin\varphi$, den Bogen

$$P\,P'' = \Delta\nu\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}.$$

Es ist aber das Bereich

$$b = P\,P''\,.\,\Delta\varphi = \Delta\nu\,\Delta\varphi\,\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}. \tag{56}$$

Dies liefert mit Gl. (55) und dann mit (52)

$$b = \Delta\nu\,\Delta\gamma\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \Delta\nu\,\Delta\gamma\,\sin\nu\,\sin\gamma. \tag{56a}$$

Hieraus wird im ersten Falle mit Hilfe der Gl. (53′) und unter Beachtung, dass man (S. 134) $\triangle\delta = \triangle\nu$ gemacht hat, und dass das Vorzeichen von b in unserem Falle ohne Bedeutung ist,

$$b_1 = 2\,\triangle\nu^2\,\sin\nu\,\sin\gamma_1\ . \tag{57′}$$

Andererseits wird im dritten Falle mit Hilfe der Gleichung (54)

$$b_3 = \triangle\nu^2\,\sin\nu\,\sin\gamma_3\,\frac{\triangle\gamma_3}{\triangle\delta} = \triangle\nu^2\,\sin\nu\,\sin\gamma_3\left(1 - \frac{\cos(60^0 - \beta')\,\cos\delta}{\cos\beta'\,\cos\varepsilon''}\right). \tag{57‴}$$

Im zweiten Falle dagegen ist nach Gl. (53″) $\triangle\gamma = 0$; daher lassen wir ν sich ändern und erhalten dann durch Differentiation der Gl. (52) nach φ und ν

$$\triangle\varphi = 2\,\frac{\cos\nu\,\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,\triangle\nu.$$

Dies liefert mit Gl. (56)

$$b = 4\,\triangle\nu^2\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\cot\nu\,\sin\frac{\gamma}{2}\ ,$$

was mittelst Gl. (52) übergeht in

$$b_2 = 4\,\triangle\nu^2\,\cos\nu\,\sin^2\frac{\gamma_2}{2}\ . \tag{57″}$$

79. Bestimmung der Helligkeit H. Berechnet man mittelst der gezeichneten Figuren und der entwickelten Formeln die q, η, b, so kann man nach Gl. (46) l, h und mittelst (47) und (48) H berechnen. Dies habe ich nun ausgeführt in Zwischenräumen von 10^0 für die willkürlich Veränderlichen ν und δ. Zuerst wurden 72 Zeichnungen, wie die Figuren 22 und 23, ausgeführt mit $\nu = 10, 20, \ldots 90^0$, und in jedem Falle von $\delta = 10, 20, \ldots 80^0$, wobei $\nu = 0^0$ und $\delta = 90^0$ wegfiel, da hierfür Streiflicht stattfindet, welches unwirksam ist, und ebenso $\delta = 0^0$, da hierbei das Licht gerade auf die Flächen I und IV auffällt und daher keiner Verfolgung durch Zeichnung bedarf. In diesen Zeichnungen wurde die Sechseckseite $= 5$ cm angenommen.

Wir schreiten nun zur Behandlung der einzelnen Büschel. Dabei sollen stets, wie es bisher schon öfter geschehen ist, die allgemeinen Buch-

staben $\varphi, \eta, l, \ldots$ durch die beigesetzten Zahlen 1, 2, ... n als den Lichtbüscheln 1, 2, ... n zugehörig bezeichnet werden.

II. Die von den einzelnen Lichtbüscheln erzeugten Helligkeiten.

80. Das Lichtbüschel 1 der nur zurückgeworfenen Strahlen.

Es ist das unmittelbar von der Fläche I zurückgeworfene Büschel. Aus den angenommenen ν und δ bestimmt man ε nach Gl. (51) (S. 143) durch $\cos\varepsilon = \cos\delta \sin\nu$, daraus ergiebt sich (S. 130, Tab. 27) $\eta_1 = \alpha$, es ist $q_1 = 1$, sodann nach Gl. (50') (S. 142) $\gamma_1 = 2\,\delta + 180$, nach Gl. (57') $2 \triangle \nu^2 : b_1 = 1 : \sin\nu \sin\gamma_1$. Daher wird nach Gl. (46) (S. 137)

$$l_1 = \eta_1 \frac{\cos\varepsilon}{\sin\nu \sin\gamma_1}.$$

Daraus wird bei Benutzung der obigen Ausdrücke, unter Beachtung, dass $\sin\gamma_1 = -\sin 2\,\delta$, und dass das Vorzeichen bei Bestimmung des Bereiches b keine Bedeutung hat,

$$l_1 = \frac{\eta_1}{2\sin\delta}. \tag{58}$$

Tab. 29. Die Rechnung ist in der Tab. 29 für das Beispiel $\nu = 10^0$ gezeigt; dafür gilt (Tab. 28) $n' = 4{,}97$. In der ersten aufrechten Reihe stehen die $\delta\,(= \varepsilon')$, in der zweiten die β' ($\sin\beta' = \sin\delta : n'$), in der dritten die ε (Gl. (51) $\cos\varepsilon =$

Tabelle 29.

Berechnung der verhältnissmässigen Helligkeit l_1, hervorgebracht durch Eiskrystalle $\nu = 10^0$, $(q_1 = 1)$.

δ	β'	ε	γ_1	φ_1	η_1	$\sin\delta$	l_1
0^0	$0^0 00'$	$80^0 00'$	180^0	$20^0 00'$	0,340	0,000	∞
10	1.59	80.09	200	19.42	345	174	0,992
20	3.57	80.29	220	18.48	359	342	525
30	5.47	81.19	240	17.18	392	500	392
40	7.27	82.21	260	15.18	436	643	339
50	8.51	83.35	280	12.50	496	766	324
60	10.03	85.01	300	9.58	579	866	334
70	10.55	86.36	320	6.48	687	940	366
80	11.25	88.16	340	3.28	826	985	420
90	11.36	90.00	360	0.00	1,000	1,000	500
18.06				19.00	356	311	571

cos δ sin v). In der vierten Reihe stehen die γ_1, in der fünften die φ_1 (Gl. 52), in der sechsten die η_1, entnommen aus der Tab. 27, in der siebenten die sin δ, in der achten endlich nach Gl. (58) die l_1. Es sei besonders darauf aufmerksam gemacht, dass der Werth des l_1 für $\delta = 90^0$ unabhängig von v stets $= 0{,}5$ ist, weil hier stets $\eta_1 = 1$ (Gl. 58).

Mittelst dieser Tabelle ist die Kurve (φ_1, l_1) oder $S'U'T'$ der Fig. 25 Fig. 25. gezeichnet, deren Abscissen die φ_1 und deren Ordinaten die l_1 angeben.

81. Besondere Behandlung der Stelle, für welche die Formel eine unendlich grosse Helligkeit ergiebt. Die Tabelle und die Figur zeigen, dass für $\varphi_1 = 20^0$, d. i. für $\delta = 0$ oder den Punkt T der Fig. 20 $l_1 = \infty$ wird; die Ordinatenlinie TT' ist Asymptote der Kurve. Und wirklich, wenn man sich die Helligkeit entlang des Kreises SPT gleichförmig Fig. 20. vertheilt denkt, so erzeugt bei der Drehung dieses Kreises um MS der Punkt T einen Kreis, dessen Helligkeit unendlich mal so gross ist, als diejenige des von P erzeugten Kreises, weil bei T ein lineares Element des hellen Kreises SPT in die beschriebene Kreislinie hineinfällt, bei P dagegen nur ein Punkt.

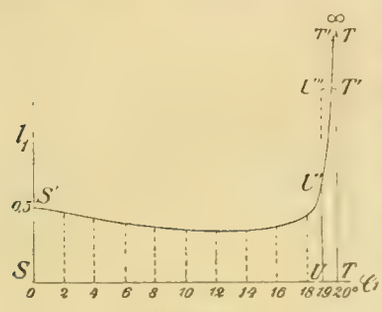


Fig. 25.

Da nun die Fläche $SS'U'T'TS$ der Kurve die von jenem Kreise Fig. 25. (ST der Fig. 20) hervorgebrachte Lichtmenge angiebt, bestimmen wir die Lichtmenge eines schmalen einerseits von der Asymptote begrenzten Flächenstreifens $UU'T'T$ und vertheilen diese nothwendig endliche Menge gleichförmig auf die Breite UT des Streifens.

Die Kurve in der Nähe der Asymptote kann als Stück einer Cosekantenlinie, und diese als ein Stück der algebraischen Kurve $y = c : \sqrt{x}$ angesehen und demnach quadrirt werden. Um dies einzusehen, betrachte man Fig. 20; dort ist für den Punkt T, $\varphi_1 = SAT = 2v$; man lasse nun φ um Fig. 20. das kleine TV abnehmen, lege durch V die zu MS senkrechte Parallelkreisebene und schneide sie mit der Ebene MST in VU ($\perp MS$), sowie mit der Ebene des hellen Kreises SPT in UU'' ($\perp ST$). Dieser Kreis SPT ist besonders in Fig. 26 mit dem Mittelpunkte C gezeichnet. Hier nehme man Fig. 26.

T als Ursprung der rechtwinkligen Koordinaten, den Halbmesser TUC als die Axe der x, TT' als die Axe der y und zugleich der l_1, und setze $TU = x$, $UU'' = y$, $UU' = l_1$ gleich der Helligkeit, welche in dem von V und U'' um S beschriebenen Parallelkreise (Fig. 20) herrscht, und setze dann für die benachbarten Punkte W und W''

$$UW = dx, \quad U''W'' = ds.$$

Fig. 20. Dann ist die Lichtmenge des Parallelkreisringes, dessen Grenzkreisebenen durch U und W (Fig. 20) gehen, direkt mit ds proportional, umgekehrt proportional aber mit der Breite $d\varphi$ des Ringes, weil l_1 nach (46) (S. 137) mit b und also auch nach (56) (S. 144) mit $d\varphi$ umgekehrt proportional ist, folglich im ganzen proportional mit $ds : d\varphi$ oder auch mit $ds : dx$, da $dx = UW$ mit $d\varphi$ (gemessen auf dem Bogen TA der Fig. 20) proportional ist. Da in diesem kleinen Bereiche alle anderen Grössen, welche Einfluss auf die Helligkeit l_1 haben (wie ε, η, vgl. Gl. 46) als unverändert angesehen werden dürfen, so hat man

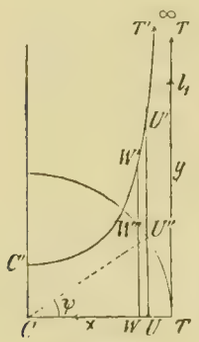


Fig. 26.

$$l_1 = a\frac{ds}{dx} = \frac{a}{\sin\psi} = a\,\operatorname{cosec}\,\psi,$$

wenn a eine Unveränderliche und ψ der Winkel TCU'' ($= 180^0 - \gamma_1$, Fig. 20).[1]) Diese Cosekantenlinie ist als $C'U'T'$ eingezeichnet. Für kleine x ist aber $y = \sqrt{2rx}$, wenn $r = CT$ und $\sin\psi = y : r = \sqrt{2x : r}$, daher, wenn c eine andere Konstante,

$$l_1 = \frac{c}{\sqrt{x}}.$$

Daraus ergiebt sich die Fläche f der Kurve l_1 für einen schmalen Streifen an der Asymptote

$$f = \int_0^x l_1\,dx = c\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\,c\,x^{\frac{1}{2}} = 2\,l_1\,x,$$

d. h. die in das Unendliche laufende Fläche $TUU'T'$ ist gleich dem doppelten Rechtecke, dessen Seiten $x = TU$ und $y = UU'$ sind.

Wenden wir dies Ergebniss auf unsere Helligkeitsbestimmung an, so ermitteln wir l_1 nach dem angegebenen Verfahren bis in die Nähe des

[1]) Die Beziehung $l_1 = \frac{a}{\sin\psi}$ ergiebt sich auch aus (58) (S. 146), da $\gamma_1 = 2\delta + 180^0$, also $\psi = -2\delta$, $\sin\psi = -2\sin\delta\cos\delta$, worin $\cos\delta = 1$ wird für $\delta = 0$. [D. Her.]

Punktes T oder von $\varphi_1 = 2\nu$, dem wir uns bis auf 1^0 nähern wollen. In unserm Falle ist $\nu = 10^0$, also $\varphi_1 = ST = 20^0$, so dass wir bis zu $SU = \varphi_1 = 19^0$ gehen. Nun ist nach Gl. (52) und (50′) Fig. 25.

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = \sin \nu \cos \delta,$$

woraus für $\varphi_1 = 19^0$, $\delta = 18^0\ 6'$ folgt, wie in Tab. 29 eingetragen. Hierfür ergiebt sich durch Einschaltung nach dieser Tabelle $\eta_1 = 0{,}356$, und damit aus Gl. (58) $l_1 = 0{,}571$. Folglich ist zwischen $\varphi_1 = 19$ und 20^0 das mittlere $l_1 = 2 \times 0{,}571 = 1{,}14$. Man kann also in Fig. 25 die Kurve der $l_1 = S'U'T'$ ohne Aenderung der Fläche ersetzen durch den theilweise geradlinigen Zug $S'U'U''T''$, worin $UU'' = 2\,UU'$. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Tab. 30 unter $\delta = 2\nu - 1^0$ eingetragen. Fig. 25. Tab. 30.

82. Die Helligkeit des Büschels 1 im Gegenpunkt der Sonne.

Das Verfahren wird aber unbrauchbar, wenn φ_1 nahezu $= 180^0$, weil dann (Fig. 20) VU einen sehr kleinen Winkel mit TS bildet, also TU nicht mehr sehr klein ist. Wir können aber die am Gegenpunkte der Sonne ($\varphi_1 = 180^0$) hervorgebrachte Helligkeit leicht unmittelbar bestimmen. Fig. 20.

In Fig. 20 wird dann $\nu = 90^0$, T wird jener Gegenpunkt, der Kreis SPT ein grösster Kreis, auf welchem der Abstand der Sonnenbildchen $= \triangle \varphi_1 = 2 \triangle \nu$; denn nach Gl. (52) ist für $\nu = 90^0$, $\varphi = \gamma$, $\triangle\varphi = \triangle\gamma = 2 \triangle\delta$ (Gl. 53′) $= 2 \triangle \nu$ (S. 134). Lässt man nun A sich auf SA um $\triangle\nu$ gegen S hin oder von S weg verschieben, so entfernt sich T jedesmal vom Gegenpunkte um $2 \triangle \nu$, und die Sonnenbildchen auf dem Kreise SPT erzeugen bei dem Gegenpunkte ein quadratisches Netz, worin die Quadratseiten $= 2 \triangle \nu$, das Bereich eines Bildchens daher $= 4 \triangle \nu^2$ ist. Lässt man nun alle die nach dem wechselnden Punkte A gerichteten Krystallaxen sich um die MS um einen halben Kreisumfang $= \pi$ drehen, so kehren diese Axen wieder in ihre Anfangslage zurück und haben die $(\pi : \triangle \nu)$ möglichen Lagen der Axen eingenommen, also auch jenes Netz von Sonnenbildchen $(\pi : \triangle \nu)$-mal so dicht gemacht, wodurch das Bereich eines Bildchens $= 4 \triangle \nu^2 : (\pi : \triangle \nu) = 4 \triangle \nu^3 : \pi$ wird. Die Lichtmenge eines Bildchens ist aber $= L f q_1 \eta_1$, daher die gesammte Helligkeit H_1 des ersten Lichtbüschels am

Gegenpunkte, oder für $\varphi_1 = 180^0$, da $q_1 = 1$, $\eta_1 = 0{,}018$ (Tab. 27 für $\varepsilon = 0$),

$$H_1 = L f q_1 \eta_1 \frac{\pi}{4} \frac{1}{\triangle \nu^3} = \frac{Lf}{\triangle \nu^3} 0{,}0141 .$$

83. Allgemeine Berechnung der Helligkeiten des Büschels 1.

Tab. 30. In der Tabelle 30 sind die allgemeinen Ergebnisse der Rechnungen eingetragen. Sie geben also für $\nu = 10, 20, \ldots 90^0$ und für $\delta = 90, 80, \ldots 10^0$ die Werthe von φ_1 und l_1, und dann, wie schon bemerkt, für $\varphi_1 = 2\nu - 1^0$ die Werthe von l_1 nach Tab. 29.

Tabelle 30.

Verhältnissmässige Helligkeit l_1 für verschiedene Werthe von ν und δ oder φ_1.

ν	10^0		20		30		40		50		60		70		80		90	
δ	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1	φ_1	l_1
90^0	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500	0°00′	0,500
80	3.28	420	6.48	351	9.58	292	12.48	253	15.18	222	17.18	200	18.50	183	19.40	175	20.00	173
70	6.48	366	13.28	260	19.40	184	25.30	136	30.20	108	34.24	088	37.30	076	39.20	070	40.00	069
60	9.58	334	19.40	200	29.00	125	37.30	085	45.00	057	51.20	044	56.00	037	59.00	033	60.00	031
50	12.50	324	25.10	166	37.30	094	48.48	055	58.58	037	67.40	026	74.20	022	78.30	021	80.00	020
40	15.18	339	30.20	158	45.00	072	58.56	044	71.44	029	83.00	022	92.00	018	97.40	016	100.00	017
30	17.18	392	34.24	166	51.14	076	67.32	043	82.56	029	97.00	023	108.40	020	116.40	018	120.00	019
20	18.48	525	37.30	208	56.00	090	74.18	051	92.00	034	109.00	029	124.00	027	135.20	027	140.00	027
10					59.00	164	78.28	091	97.46	065	116.40	051	135.20	053	151.00	051	160.00	053
2ν-1^0	19.00	571	39.00	306	59.00	164	79.00	105	99.00	091	119.00	089	139.00	112	159.00	160	179.00	405

Fig. 20. Solcher hellen Kreise SPT, deren wir 9 ($\nu = 10, 20 \ldots 90^0$) bestimmt haben, sind aber so viele vorhanden, als Lagen des T auf einem Halbkreise, oder des A auf einem Viertelskreise, also $\frac{1}{2}\pi : \triangle \nu$, und die Wirkung aller in jedem Parallelkreise QP, dessen φ_1 unveränderlich, muss durch Summirung der von den einzelnen erzeugten verhältnissmässigen Helligkeiten l_1 bestimmt werden. Wir wollen dies zunächst für jene Werthe von $\varphi_1 = 2\nu - 1^0$, also für $\varphi_1 = 19, 39 \ldots 179^0$ ausführen, weil die Reihen der Tab. 30 bis zu diesen reichen. Man muss daher zuerst für diese Werthe von φ_1 die Werthe von l_1 für unsere ν bestimmen. Dies geschieht durch

Einschaltung. Da aber zwischen den in der Tab. 30 gegebenen Werthen der φ_1 die l_1 sich nicht gleichmässig ändern, so ist es für die Genauigkeit erforderlich, die Kurve (φ_1, l_1) für die 9 gewählten Werthe der ν zu verzeichnen, wie es für $\nu = 10^0$ in Fig. 25 geschehen ist. Hat man so für $\varphi_1 = 19, 39, \ldots 179^0$ und zwar bei jedem für $\nu = 10, 20, \ldots 90^0$ die Werthe der l_1 in einer Tabelle zusammengestellt, so kann man bei jedem dieser Werthe von φ_1 für $\nu = 0$ bis 90^0 von Grad zu Grad die Werthe von l_1 durch Einschaltung derart bestimmen, dass sich die Unterschiede stetig ändern. Jeden für einen vollen Grad des ν bestimmten Werth von l_1 kann man für $^1/_2$ Grad nach beiden Seiten hin, also im Ganzen für 1^0 unverändert gelten lassen. Auf 1^0 des ν kommen aber $(\pi : 180) : \triangle \nu$ Lichtbogen $S\,T$, ebenso oft wird also die durch das fragliche ν erzeugte verhältnissmässige Helligkeit l_1 und ebenso oft (Gl. 46, S. 137) die Helligkeit $h_1 = (L\,f : \triangle \nu^2)\, l_1$ hervorgebracht, so dass, wenn man mit $\Sigma\, l_1$ die Summe jener l_1 bezeichnet, die bei demselben φ_1 für alle diejenigen ν zwischen 0 und 90^0 genommen sind, welche für dies φ_1 Werthe von l_1 liefern, nach Gl. (47) (S. 137) gilt

$$\left.\begin{aligned} H_1 = \Sigma_\nu\, h_1 = \frac{L\,f}{\triangle \nu^2}\,\frac{\pi}{180 \triangle \nu}\,\Sigma l_1 = \frac{L\,f}{\triangle \nu^3}\,L_1\,, \\ \text{wobei } L_1 = \frac{\pi}{180}\,\Sigma\, l_1 = 0{,}01745\;\Sigma\, l_1\,. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

So sind in der Tab. 31 für $\varphi = 19^0$ die ν von Grad zu Grad eingetragen, bei denen eine Lichtwirkung stattfindet. Diese Wirkung beginnt mit $\nu = \frac{1}{2}\,\varphi_1 = 9^1/_2{}^0$ und geht bei allen Werthen des φ_1 bis $\nu = 90^0$. Für Tab. 31.

Tabelle 31.

Bestimmung der Stärke des Lichtbüschels L_1 der Eiskryställchen im Sonnenabstande $\varphi_1 = 19^0$.

ν	10^0	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
l_1	0,571	480	400	335	295	270	252	237	225	215	207	204	202	200
ν	24^0	25	26	27	28	29	30	40	50	60	70	80	90	
l_1	0,198	196	194	193	192	190	189	188	187	186	185	184	183	

Fig. 25. $\nu = 10^0$ ist die Wirkung in Fig. 25 verzeichnet, und man bemerkt, dass bei $\varphi_1 = 19^0$ einerseits auf $^1/_2$ Streifbreite die Helligkeit $l_1 = UU'$, andererseits auf $^1/_2$ Streifbreite die Helligkeit $2l_1 = UU''$, also auf der ganzen Streifbreite ausgeglichen die Helligkeit $^3/_2\ l_1$ herrscht.

An der andern Grenze $\nu = 90^0$ dagegen darf man in Σl_1 nur $^1/_2$ der dort herrschenden Helligkeit oder $^1/_2\ l_1$ aufnehmen, weil die Summen sich im allgemeinen über den Winkelraum von 1^0 erstrecken, während hier nur der für $^1/_2{}^0$, nämlich von $89^1/_2$ bis 90^0 in Betracht kommt. Denn nach S. 137 ist die Summation nur bis 90^0 auszudehnen.

Das Endergebniss ist also, dass man zu der Σl_1 nach ν noch die Hälfte des zu $\nu = {}^1/_2\ (\varphi_1 + 1^0)$ gehörigen Gliedes zufügt, dagegen die Hälfte des zu $\nu = 90^0$ gehörigen abzählt. In unserem Falle ist jene Summe $= 16{,}599$, das halbe erste Glied 0,285, das halbe letzte 0,092, daher $\Sigma l_1 = 16{,}599 + 0{,}285 — 0{,}092 = 16{,}792$.

Tab. 32. Auf diese Weise ist die Tabelle 32 berechnet. Da, wie vorhin (S. 149) bemerkt, das Verfahren für $\varphi_1 = 179^0$ nicht mehr anwendbar, aber für $\varphi_1 = 180^0$ die Helligkeit auf eine andere Weise, nämlich

$$= H_1 = \frac{Lf}{\triangle \nu^3}\ 0{,}0141;\ L_1 = 0{,}0141$$

bestimmt wurde, so fügt man des Zusammenhanges wegen nach Gl. (59) den Werth $\Sigma l_1 = L_1 : 0{,}01745 = 0{,}810$ hinzu, und hat daraus auch in Tab. 30 für $\varphi_1 = 179^0$, $l_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}810 = 0{,}405$ eingetragen (Fig. 25, $UU' = \frac{1}{2} UU''$).

Tabelle 32.

Verhältnissmässige Helligkeit L_1 des ersten Lichtbüschels der Eiskryställchen in den Sonnenabständen φ_1.

φ_1	0^0	19	39	59	79	99	119	139	159	180
Σl_1	45,0	16,792	6,299	2,632	1,656	1,005	0,818	0,859	1,017	0,810
φ_1	0^0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Σl_1	45,00	27,00	15,90	9,80	6,00	3,80	2,51	2,02	1,62	1,28
L_1	0,788	472	277	171	105	066	044	035	028	022
φ_1	100^0	110	120	130	140	150	160	170	180	
Σl_1	0,99	0,85	0,82	0,84	0,87	0,93	1,01	0,91	0,81	
L_1	0,017	015	014	015	015	016	018	016	014	

Der Werth für $\varphi_1 = 0$ ist aus dem unveränderlichen $l_1 = 0{,}500$ bestimmt, indem von 0° bis 90°, 91 mal diese Grösse genommen, und von dem ersten und letzten Werthe die Hälfte des Werthes abgezogen werden muss, da hier jene Berührung und asymptotische Flächenberechnung nicht auftritt. Es ist also $\Sigma l_1 = 90 \,.\, 0{,}5 = 45{,}0$.

Aus diesen Werthen von Σl_1 berechnet man durch Einschaltung unter Beachtung der zu zeichnenden Form der Kurve $(\varphi_1, \Sigma l_1)$ die Werthe von Σl_1 für 10, 20, . . . 180° und daraus durch Vervielfachung mit $(\pi : 180)$ (Gl. 59) die Werthe von L_1. Sie sind in der Tabelle 32 eingetragen, und Tab. 32. die Kurve (φ_1, L_1) ist in Fig. 27 gezeichnet. Fig. 27.

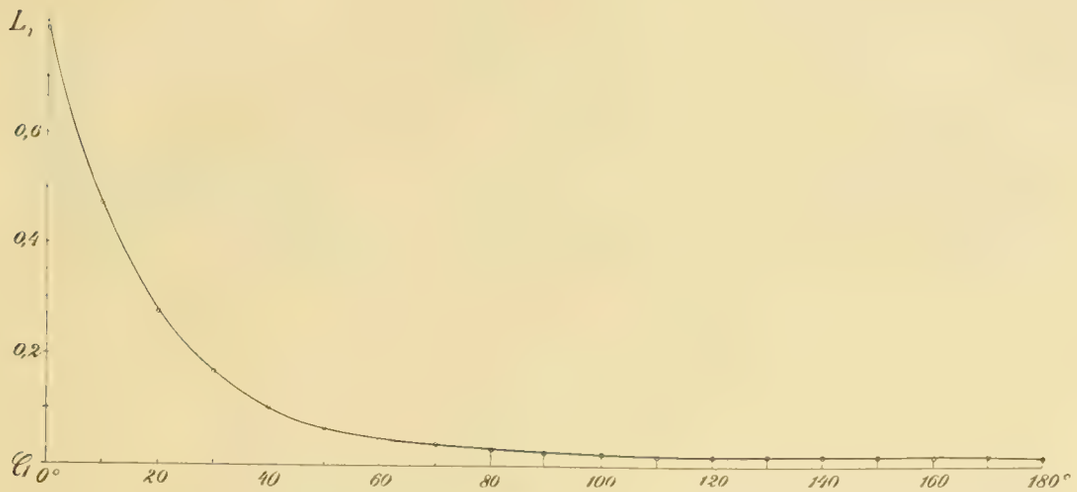


Fig. 27.

84. Das Lichtbüschel 2 der unabgelenkten Strahlen. Es ist das Büschel der in der Fläche I eintretenden und aus der gegenüberliegenden zu I parallelen Fläche IV wieder austretenden Strahlen (Fig. 22, 23), die deshalb zu den eintretenden Strahlen parallel sind; demnach ist die Ablenkung $\varphi_2 = 0$ (Fig. 20). Dieses und noch drei andere später zu berücksichtigende nicht abgelenkte schwache Büschel werden daher nur durch die zwischen der Sonne und dem Auge stehenden Krystalle hervorgebracht; und die Lichtschwächung der Sonne, welche sie bewirken, ist daher der Unterschied der auf sie fallenden Lichtmenge und der Lichtmenge des Büschels 2; dieser Unterschied bezeichnet das durch die Krystalle zerstreute

Licht. Wir haben es demnach hier nicht mit Bereichen b von hellen Punkten und mit Helligkeiten an wechselnden Stellen des Himmels zu thun, sondern nur mit durchgelassenen Lichtmengen.

Die Menge des durch die Fläche I $= f$ eintretenden und durch IV wieder austretenden Lichtes ist nach S. 137

$$= Lf \cos\varepsilon \,.\, q_2\, \eta_2 \;=\; Lf\, s_2.$$

Man berechnet ε aus $\cos\varepsilon = \cos\delta \sin\nu$ (Gl. 51), bestimmt $(1-\alpha)$ aus ε nach Tab. 27 und setzt dann $\eta_2 = (1-\alpha)^2$, da zweimal eine Lichtschwächung durch Brechung von 1 auf $(1-\alpha)$ eintritt, bestimmt q_2 aus den Zeichnungen (wie Fig. 22 und 23) und berechnet daraus die Werthe von $s_2 = \cos\varepsilon.\, q_2\, \eta_2$.

Tab. 33. Die Ergebnisse sind in Tab. 33 für die stufenweise von 10 zu 10° gewählten Werthe von ν und δ niedergelegt. Man bemerkt, dass diese Werthe für $\nu > 20^0$ nicht mehr für alle Werthe von δ bestehen, und es wurden die Grenzstellen der δ eingetragen; bei grösseren δ tritt dann kein durch I eingefallenes Licht mehr durch IV aus. Diese Grenzwinkel sind durch Einschaltung mit Hülfe der Zeichnungen ermittelt.[1])

Von diesen Lichtmengen bildet man nun die Summen zunächst bei

Tabelle 33.

Werthe von $s_2 = \cos\varepsilon.\, q_2\, \eta_2$ für das Lichtbüschel 2 der Eiskrystalle.

$\nu =$	10°	20	30	40	50	60	70	80	90
δ	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0°	076	260	447	606	732	836	909	950	966
10	069	226	370	482	574	640	693	712	719
20	060	186	287	358	403	442	473	479	477
30	045	136	201	231	239	246	247	240	230
40	033	095	123	113	091	068	043	019	015
50	021	057	063	033	48°	$44^1/_2{}^0$	$42^1/_2{}^0$	$41^1/_3{}^0$	41°
60	011	029	021	56°					
70	004	013	003						
80	001	002	78°						
90	000	000							

[1]) Man findet sie auch als die Werthe der Winkel, deren sinus gleich $^1/_2 n'$ (Tab. 28) ist. Sie sind also erst vorhanden für $n' \gtrless 2$, also nicht für 10° und 20°. [D. H.]

gleichbleibender Axenrichtung der Krystalle. Man lässt also bei unveränderlichem ν das δ die verschiedenen Werthe zwischen -90 bis $+90^0$ oder zweimal zwischen 0 und 90^0 annehmen in Stufen, die wir gleich 2^0 machen wollen. Wir berechnen daher aus denjenigen Werthen, die wir für Stufen von 10^0 erhalten, die Werthe in Stufen von 2^0 durch Einschaltung mit Hülfe der zu verzeichnenden Kurve. Jedem solchen Werthe kommt dann im allgemeinen eine Anzahl von $2 \times (\pi : 180) : \triangle \nu$ Krystallen zu, nur dem ersten und letzten eine halb so grosse. Die durch die Krystalle mit parallelen Axen hervorgebrachte Lichtmenge ist daher

$$2 Lf \frac{2}{r} \frac{\pi}{180} \Sigma s_2 \quad ,$$

wobei Σ die Summe des $s_2 = \cos \varepsilon . q_2 \eta_2$ von 2 zu 2^0, genommen von $\nu = 0$ bis $\nu = 90^0$ bezeichnet, der erste und letzte Werth nur halb genommen.

Lässt man die gewählte Axenrichtung sich um die nach der Sonne gehende Linie MS um 4 Rechte drehen, wobei also ν unverändert bleibt, so ergeben sich $2 \pi \sin \nu : \triangle \nu$ Stellungen, so dass die erzeugte Lichtmenge das ebenso Vielfache der eben erhaltenen Lichtmenge wird (vgl. Gl. (46), S. 137)

$$h_2 = \frac{Lf}{\triangle \nu^2} \frac{\pi}{180} 8 \pi \sin \nu \Sigma s_2 = \frac{Lf}{\triangle \nu^2} l_2 \ .$$

Tabelle 34.

Zur Berechnung der Menge des Sonnenlichtes, welches durch die ihr vorgelagerten Eiskrystalle ins Auge gelangt.

ν	Σ'	Σ''	Σ	l_2
0^0	0,000	0,000	0,000	0,000
10	1,306	0,085	1,391	0,106
20	4,367	0,339	4,706	0,707
30	6,456	0,152	6,608	1,456
40	7,554	0,081	7,635	2,161
50	8,316	0,050	8,366	2,810
60	8,952	0,050	9,002	3,440
70	9,514	0,010	9,524	3,923
80	9,575	0,020	9,595	4,140
90	9,558	0,020	9,578	4,190

Die drei anderen schon erwähnten nicht abgelenkten Lichtbüschel $2'$, $2''$, $2'''$ gehen nach öfteren Spaltungen, durch welche sie sehr geschwächt sind, aus der Fläche IV hinaus; für sie habe ich die Werthe von Σs_2 eben-
Tab. 34. falls berechnet. In Tabelle 34 sind die Werthe der ersten Summe als Σ', die für $2' + 2'' + 2'''$ als Σ'' (welche, weil zusammengesetzt, eine Stetigkeit nicht deutlich erkennen lässt) und $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$ angegeben, woraus die l_2 durch Multiplikation mit $(\pi : 180)\ 8\pi \sin \nu = 0{,}437 \sin \nu$ erhalten wurden.

Aus den h_2 oder den l_2 bilden wir nun nach Gl. (47) (S. 137) die Summe nach ν; und indem wir dabei Zwischenräume der ν von 10^0 vor uns haben, müssen wir mit der hierauf entfallenden Anzahl der Lagen der Krystallaxen, nämlich mit $10\ (\pi : 180) : \triangle\nu$ vervielfachen. Wir erhalten dann

$$H_2 = \Sigma_\nu h_2 = \frac{Lf}{\triangle\nu^2} \frac{10\pi}{180\triangle\nu} \Sigma l_2 = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} \frac{\pi}{18} \Sigma l_2 .$$

Weil aber die Zwischenräume von 10^0 in Bezug auf die Genauigkeit gross sind, so benutzen wir zu der durch die Summirung vorgenommenen Flächenbestimmung der Kurve (l_2, ν) die Simpson'sche Regel, indem wir von den l_2, von vorn und von hinten gerechnet, den ersten Werth einfach, den 2., 4., 6., ... vierfach, den 3., 5., ... zweifach nehmen und von der Summe den dritten Theil bestimmen. Dabei ist aber eine ungerade Anzahl von Werthen vorausgesetzt; wir benutzen daher die Regel nur von 0 bis 80^0, und fügen noch von den l_2 für 80 und 90^0 das Mittel hinzu. Wir erhalten dadurch $\Sigma l_2 = 18{,}727$ und

$$H_2 = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} 0{,}1745 \,.\, 18.727 = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} 3{,}27 .$$

Es ist dies diejenige Lichtmenge, welche ein Kubikmeter Eiskrystalle enthaltende Luft, das in der Sehrichtung 1 m tief ist, und hinter welchem die Sonnenfläche erscheint, von dem auf die Krystalle auftreffenden Sonnenlichte in das Auge gelangen lässt.

85. Verminderung des Sonnenlichtes durch die Eiskrystalle.

Die zwischen der Sonne und dem Auge liegenden Eiskrystalle empfangen eine Lichtmenge, von der sie nur den in der letzten Formel angegebenen Antheil in das Auge gelangen lassen, während sie den Rest zerstreuen. Um

die Lichtschwächung zu ermitteln, bestimmen wir zuerst die auf die Krystalle fallende Lichtmenge. Die auf eine Fläche f fallende Lichtmenge ist

$$Lf \cos\varepsilon = Lf \cos\delta \sin\nu .$$

Die auf alle Krystalle von parallelen Axen auffallende Lichtmenge ist daher

$$= \frac{Lf}{\triangle\delta} \sin\nu \sum \cos\delta \triangle\delta ;$$

darin bedeutet jene Summe eine Fläche, welche man durch ein Integral bestimmt, wenn man das kleine $\triangle\delta$ durch das unendlich kleine $d\delta$ ersetzt, und das Integral zwischen $\delta = -\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, oder zweimal zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nimmt. Auch ist $\triangle\delta = \triangle\nu$, daher jene Lichtmenge

$$= 2\frac{Lf}{\triangle\nu} \sin\nu \left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\frac{Lf}{\triangle\nu} \sin\nu .$$

Dreht man nun die Krystallaxe um MS, so tritt dieselbe Lichtmenge $(2\pi \sin\nu : \triangle\nu)$-mal auf und wird Fig. 20.

$$\frac{Lf}{\triangle\nu^2} 4\pi \sin^2\nu = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} 4\pi \sin^2\nu \triangle\nu .$$

Dies nach ν summirt oder integrirt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ giebt

$$\frac{Lf}{\triangle\nu^3} 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\nu \, d\nu = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\nu) \, d\nu = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} \pi^2 ,$$

und wenn wir von der auffallenden Lichtmenge die vorhin erhaltene durchgelassene Lichtmenge abziehen, erhalten wir die zerstreute Lichtmenge

$$= \frac{Lf}{\triangle\nu^3} (\pi^2 - 3{,}27) = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} 6{,}62 .$$

Wir haben aber später gefunden, dass wir nicht nöthig haben von diesem Ergebnisse für das zweite Lichtbüschel einen Gebrauch zu machen.

86. Das Lichtbüschel 3, welches auch den hellen Ring bei $\varphi_3 = 22^0$ erzeugt. Es ist durch die Strahlen gebildet, welche in der Fläche I eintreten und ohne innere Spiegelung aus der Fläche III austreten. Es spielt eine hervorragende Rolle wegen seiner überwiegenden Helligkeit und wegen des Ringes, den es in einem Abstande von 22^0 von der Sonne hervorbringt.

Für dieses Büschel ändert sich γ mit δ; daher gelten für es die Gleichungen (47, 46, 50‴, 54, 57‴). Danach gilt, wenn jedes h_3 und l_3 für ein unveränderliches ν bestimmt ist,

$$\left.\begin{aligned} &H_3 = \Sigma_\nu h_3, \quad h_3 = \frac{Lf}{\triangle \nu^2} l_3, \quad l_3 = s_3 \frac{2 \triangle \nu^2}{b_3}, \\ &s_3 = \cos \varepsilon \,.\, q_3 \eta_3, \quad \frac{b_3}{\triangle \nu^2} = \sin \nu \, \sin \gamma_3 \left(1 - \frac{\cos (60^0 - \beta') \cos \delta}{\cos \beta' \cos \varepsilon''}\right). \end{aligned}\right| \qquad (60)$$

Tabelle 35.

Berechnung der l_3 und φ_3 aus δ für $\nu = 70^0$.

δ	φ_3	$\cos \varepsilon$	q_3	η_3	s_3	$\frac{2 \triangle \nu^2}{b_3}$	l_3
0⁰		0,940	0,	0,	0,		
10		936					
20	31°35′	906	446	790	319	2,69	0,86
30	25.04	824	690	934	531	15,1	8,03
40	23.15	727	938	947	646	101,5	65,4
50	24.08	611	900	943	520	36,7	19,1
60	25.50	475	772	917	337	15,0	5,05
70	28.48	326	630	843	174	8,11	1,41
80	35.34	165	560	629	058	4,69	0,272
90	43.22	000		000			0,000
16.18	43.22		000				0,000
42.18	23.06						

Tab. 35. In Tabelle 35 ist für $\nu = 70^0$ die Berechnung der Werthe von l_3 und der zugehörigen Sonnenabstände φ_3 aus den wechselnden δ angegeben. Die Berechnung von β', ε'', ε, γ_3, φ_3 aus ν und δ ist nach den Gleichungen (49, 51, 50‴, 52), wie früher für die Tabelle 29, vorgenommen, q_3 ist aus den Zeichnungen entnommen, $\eta_3 = (1 - \alpha)\ (1 - \alpha_1)$ ist das Produkt der beiden Lichtschwächungen beim Eintritt und Austritt, und mittelst der Tab. 27 aus den wirklichen äusseren Auffallwinkeln ε, ε_1 (vgl. Gl. 51) bestimmt. Daraus ist zuerst $s_3 = \cos \varepsilon \,.\, q_3 \eta_3$ ermittelt, sodann $(2 \triangle \nu^2 : b_3)$ und endlich $l_3 = s_3 (2 \triangle \nu^2 : b_3)$.

87. Grenzen des Lichtbüschels. Man bemerkt in der Tabelle, dass l_3 bei $\delta = 0$ und 10^0 gar nicht auftritt. Die Figuren zeigen, dass für

kleine δ der innere Einfallwinkel β'' des Lichtes auf Fläche III so gross ist, dass totale Reflexion stattfindet. Die Grenze findet man für $\nu = 70^0$ bei $\beta'' = \tau = 47^0\,58'$ (Tab. 28), woraus $\beta' = 60^0 - \beta'' = 12^0\,02'$ und $\delta = 16^0\,18'$ folgt, indem $\sin\delta : \sin\beta' = n' = 1{,}346$ (Tab. 28), also $\sin\delta = 0{,}2806$. Da nun bei $\beta'' = \tau$, d. h. bei dem Winkel der totalen Reflexion $\varepsilon'' = 90^0$ ist, so ergiebt sich (Gl. 50''') $\gamma_3 = \delta - 60^0 + 90^0 = 46^0\,18'$, und hieraus nach Gl. (52) $\varphi_3 = 43^0\,22'$. Hierfür ist $l_3 = 0$, indem das austretende Lichtbüschel die Fläche III streift und daher einen Querschnitt $q_3 = 0$ besitzt. — Ebenso wird $l_3 = 0$ bei $\delta = 90^0$, indem hier der Querschnitt des einfallenden Büschels oder $\cos\varepsilon = 0$ wird. Die Ablenkung γ_3 des Büschels ist dann ebenso gross wie im andern Grenzfalle, oder es ist $\gamma_3 = 46^0\,18'$ und daher auch $\varphi_3 = 43^0\,22'$. Es werden dann nur δ und ε'', sowie β' und β'' mit einander vertauscht. Fig. 24. Fig. 24.

Dementsprechend zeigt die Tabelle 35, dass für $\delta = 16^0\,18'$ und für 90^0 die grössten und unter einander gleichen Sonnenabstände $\varphi_3 = 43^0\,22'$ erreicht werden mit der Grenzlichtstärke $l_3 = 0$, und dazwischen für $\delta = 40^0$ ein kleinster Sonnenabstand $\varphi_3 = 23^0\,15'$, wobei l_3 ein Maximum wird.

Wir werden hier eine Erscheinung ähnlich wie bei dem Regenbogen finden und erkennen, dass bei jenem kleinsten Sonnenabstande φ_3 die Formel eine unendlich grosse Lichtstärke l_3 liefert.

Wir wollen nun den Werth des kleinsten Sonnenabstandes φ_3 für ein unveränderliches ν bestimmen. Nach Gl. (52) muss dann auch γ_3 einen kleinsten Werth besitzen, und γ_3 ist die Ablenkung des Strahles in der Ebene des Normalschnittes beim Durchgang durch das von den beiden Ebenen I und III gebildete Prisma. Es ist aber (Gl. 50''') $\gamma_3 = \delta + \varepsilon'' - 60^0$, Fig. 24. oder gleich der Summe der beiden äusseren Einfallswinkel δ und ε'' weniger dem Winkel (60^0) des Prismas, und dieser ist bekanntlich am kleinsten, wenn δ und ε'' gleich sind, wodurch auch die beiden inneren Einfallswinkel β' und β'' gleich werden. Man kann sich aber davon leicht auch ohne Rechnung Rechenschaft geben. Die Ablenkung γ_3 ist nämlich gleich der Summe der Ablenkungen an I und III, oder $\gamma_3 = (\delta - \beta') + (\varepsilon'' - \beta'')$. Die Figur, in welcher man die Ablenkung konstruirt, lässt uns aber erkennen, dass die Ablenkung an einer Fläche fortwährend wächst, während der äussere Einfallswinkel von 0 zu 90^0 zunimmt, und zwar von 0 bis $90^0 - \tau$,

und andererseits ist $\beta' + \beta''$ gleich dem Prismenwinkel ($= 60^0$). Hat nun die gesammte Ablenkung γ_3 für $\beta' = \beta''$ einen gewissen Werth, und der eine dieser Winkel (β', β'') nimmt zu, so nimmt der andere um ebenso viel ab; dann ist aber die Zunahme der Ablenkung für den ersteren grösser als die Abnahme für den letzteren, oder γ_3 nimmt zu. Also ist γ_3 ein Kleinstes oder $d\gamma_3 = 0$ für $\beta' = \beta'' = {}^1/_2$ Prismenwinkel $= 30^0$; daher auch $\delta = \varepsilon''$, und es wird

$$\sin \delta = \sin \varepsilon'' = n' \sin 30^0 = {}^1/_2 n',$$
$$\gamma_3 = \delta + \varepsilon'' - 60^0 = 2\delta - 60^0,$$
$$d\gamma_3 = 0 = d\delta + d\varepsilon'', \; d\varepsilon'' = -d\delta,$$

woraus φ_3 nach Gl. (52) folgt.

Dann ist aber zugleich $l_3 = \infty$, weil sich in Gl. (60) $b_3 = 0$ ergiebt, da $\delta = \varepsilon''$, $60^0 - \beta' = \beta'$, also der Klammerausdruck $1 - 1 = 0$ wird. — In unserm Falle ist $\nu = 70^0$, $n' = 1{,}346$, $\delta = 42^0\,18'$, $\gamma_3 = 24^0\,36'$, $\varphi_3 = 23^0, 06'$.

Hieraus lässt sich auch der kleinste Werth von ν ermitteln, bei welchem l_3 auftritt. Es fallen hier die beiden Grenzen (0) und das Maximum (∞) von l_3 zusammen, oder es wird $\delta = \varepsilon'' = 90^0$ und $\beta' = \beta'' = 30^0$. Daher gilt $n' = \sin 90^0 : \sin 30^0 = 2$, $\sin^2 \nu = (n^2 - 1) : (n'^2 - 1)$, (Gl. 42), $\sin^2 \nu = (1{,}31^2 - 1) : 3 = 0{,}2387$, $\nu = 29^0\,13'$. Dabei wird $\gamma_3 = 120^0$, $\varphi_3 = 50^0\,2'$.

Tabelle 36.

Werthe der Sonnenabstände φ_3 der kleinsten und grössten Helligkeiten der Lichtbüschel l_3.

	ν	$29^0 13'$	30^0	40	50	60	70	80	90
$l_3 = 0$	φ_3	$50^0 02'$	47.02	43.11	43.04	43.10	43.20	43.24	43.26
$l_3 = \infty$	φ_3	50.02	44.45	32.26	27.38	24.47	23.03	22.06	21.50

Die Tabelle 36 giebt die Werthe der Sonnenabstände für die gewählten ν an, in welchen $l_3 = 0$ oder $= \infty$ ist. Fig. 28 zeigt die Kurve, deren Abscissen die ν und deren Ordinaten die zugehörigen kleinsten (zu $l = \infty$ gehörigen) Werthe der Sonnenabstände φ_3 bilden. Diese Tabelle und Figur ergeben, dass φ_3 mit zunehmendem ν abnimmt und seinen kleinsten Werth für $\nu = 90^0$ erreicht. Die Differentiation des Ausdruckes

Fig. 28.

jenes kleinsten Werthes von φ_3 nach ν allein führt zu demselben Ergebnisse, mag aber hier wegbleiben.

Für $\nu = 90^0$ ist $n' = n = 1{,}31$, $\sin\delta = {}^1/_2 n' = 0{,}655$. $\delta = 40^0\,55'$, $\varphi_3 = 21^0\,50'$. In diesem Sonnenabstande beginnt die Wirkung des Lichtbüschels 3 mit seiner stärksten Helligkeit, und verläuft bis $\varphi_3 = 50^0\,02'$, wo die Helligkeit Null wird. Das Büschel erzeugt den schon erwähnten Ring, der bei dem Vorhandensein dünner (von Eiskrystallen gebildeter) Cirruswolken in einem Sonnen- oder Mondabstande von etwa 22° deutlich beobachtet wird.

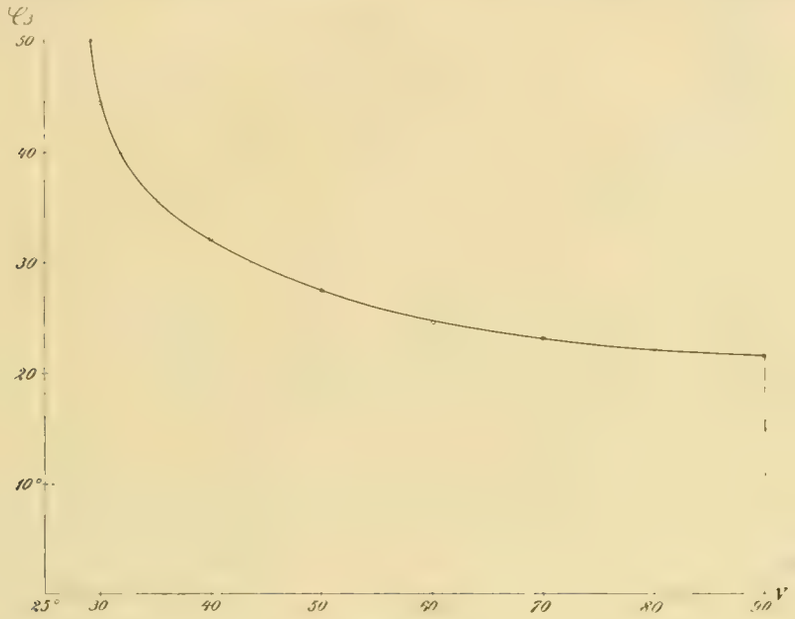


Fig. 28.

88. Das Integral zur Bestimmung der Helligkeiten H_3.

Zur Bestimmung der Helligkeiten H_3 haben wir für jedes ν von 10 zu 10° die l_3 berechnet und eine Tabelle wie Tabelle 35 für $\nu = 70^0$ gebildet; aus diesen Tabellen bilden wir die Kurven (φ_3, l_3) der Fig. 29. Dieselben Fig. 29.
haben jedesmal die Ordinatenlinie bei dem kleinsten φ_3 zur Asymptote ($l_3 = \infty$), und verlaufen dann in zwei Aesten nach den auf der Axe der φ_3 liegenden Punkten der grössten φ_3 ($l_3 = 0$), wo sie diese Axe berühren. Beide Aeste sind, wie noch einzelne eingehendere Zahlenrechnungen ergeben haben, wenig verschieden und wurden als zusammenfallend gezeichnet.

Aus dieser Figur wird nun eine andere hergestellt, um für einen bestimmten unveränderlichen Sonnenabstand φ_3 die Helligkeit $H_3 = \Sigma_\nu h_3$

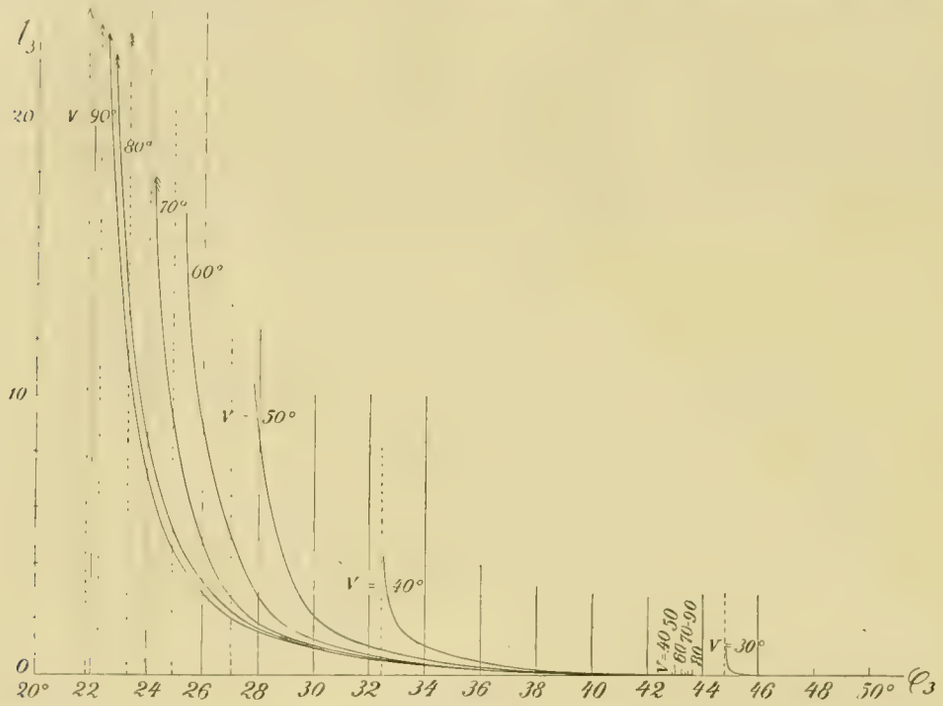


Fig. 29.

$= (Lf: \triangle\nu^2)\ \Sigma_\nu\ l_3$ zu ermitteln. Die ν bilden die Abscissen, die l_3 die Ordinaten Die angegebene Kurve ist für $\varphi_3 = 30°$ ausgeführt; die Ordinaten der Kurven für $\nu = 90$, 80, 70, 60, 50° sind aus Fig. 29 verdoppelt in die Fig. 30 übertragen, weil, wie bemerkt, in Fig. 29 zwei Aeste der Kurve als zusammenfallend gezeichnet sind. Das kleinste wirksame ν bei $\varphi_3 = 30°$ ist $\nu^0 = 44°\ 20'$ wie man durch Einschaltung in Tab. 36 (bei $l_3 = \infty$) und in der Kurve (ν, φ_3)

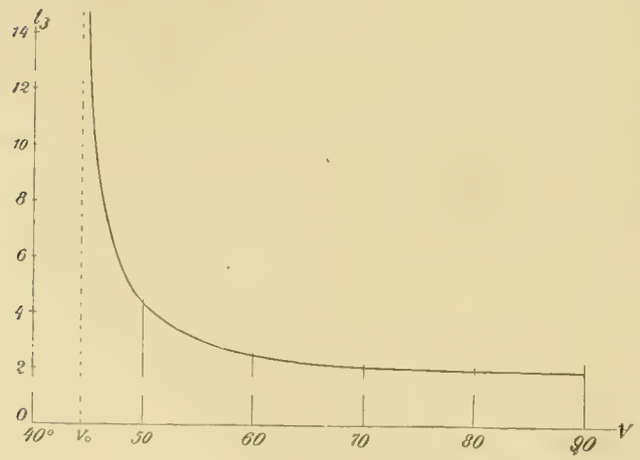


Fig. 30.

in Fig. 28 findet. In Fig. 30 bildet daher die Ordinatenlinie für ν_0 die Asymptote der Kurve.

Die Summe der l_3 nach ν würde man erhalten, wenn man auf der ν-Axe von ν_0 bis 90° Strecken $= \triangle\nu$ aneinandertragen, in den Grenzpunkten die Ordinaten der Kurve zeichnen und dieselben addiren würde. Man erhält dasselbe, wenn man die Fläche zwischen der Kurve, der Abscissenaxe und den Endordinaten bestimmt, wobei man die Abscissen ν als Bogenlängen zum Halbmesser 1 misst und diese Fläche durch den in gleicher Weise gemessenen Bogen $\triangle\nu$ theilt. Ist $d\nu$ das unendlich kleine Element der Abscissen, so ist daher nach Gl. (47) und (60)

$$\left.\begin{aligned} H_3 &= \frac{Lf}{\triangle\nu^2}\,\Sigma_\nu\, l_3 = \frac{Lf}{\triangle\nu^3}\int d\nu\, l_3 \\ &= \frac{Lf}{\triangle\nu^3}\int d\nu\,\cos\varepsilon\,.\,q_3\,\eta_3\,\frac{2\triangle\nu^2}{b_3} = \frac{Lf}{\triangle\nu^3}\int d\nu\, s_3\,\frac{2\triangle\nu^2}{b_3}, \end{aligned}\right| \qquad (61)$$

wobei das Integral jene Fläche ausdrückt.

Um dies Integral streng auszuführen, müsste man alle Veränderlichen, auch das bisher nur durch Zeichnung bestimmte q_3 durch ν ausdrücken, unter der Voraussetzung, dass φ_3 unveränderlich; dies würde aber zu einem unlösbaren Integrale führen. Wir können jedoch zunächst den Theil der Fläche mit endlichen Ordinaten l_3 leicht bestimmen und finden in unserem Beispiele für die theilweise krummlinigen Paralleltrapeze, welche von den Ordinatenlinien von 10 zu 10 Grad begrenzt sind, mit Beachtung jener Krümmung, als mittlere Ordinaten l_3 die Zahlen 3,3; 2,3; 1,85; 1,55, deren Summe 9,0 ist. Die Bogenlänge für 10° beträgt 10. $(\pi : 180) = 0{,}1745$; daher die Fläche $9{,}0\ .\ 0{,}1745 = 1{,}57$.

89. Besondere Behandlung der Stellen, an denen der Integrand ∞ wird. Eine besondere Behandlung erfordert der an der Asymptote liegende Flächentheil. Um an diesem das Integral für eine geringe Erstreckung des ν von der Asymptote an annäherungsweise auszuführen, machen wir die Asymptote, deren ν wir mit ν_0 bezeichnen, zur Ordinatenaxe, setzen die neuen Abscissen $= \nu'$, so dass $\nu = \nu_0 + \nu'$ und $d\nu = d\nu'$, und nehmen das Integral zwischen $\nu' = 0$ und $\nu' = \nu'$, wo ν' nur klein.

Der Faktor unter dem Integralzeichen, welcher allein unendlich wird, ist $\frac{2\triangle\nu^2}{b_3}$, indem $\frac{b_3}{\triangle\nu^2}=0$ wird; alle anderen bleiben endlich und können daher auf jener kurzen Strecke als unveränderlich mit den Werthen behaftet angesehen werden, welche zur Asymptote gehören. Nun gehören im Allgemeinen zu jedem Werthe von ν und φ_3 je zwei Werthe der übrigen Veränderlichen, wie dies die Tabelle 35 und der vorhin erwähnte, in Wahrheit doppelte Verlauf der Kurven (φ_3, l_3) in Fig. 29 zeigt. Nur an der Grenze, oder für $\nu=\nu_0$, d. h. an der Stelle der Asymptote, sind diese beiden Werthe einander gleich, dabei für l_3 unendlich, dagegen für s_3 endlich. Dieser Grenzwerth des s_3 muss daher doppelt genommen in die obige Gleichung eingesetzt werden. Da der zugehörige Werth des ν aber kein gewählter, insbesondere nicht einer jener Werthe 20, 30, . . . 90° ist, so ist der zugehörige Werth des s_3 nicht unmittelbar aus den berechneten Tabellen abzulesen. Ich habe zu seiner Ermittelung aus den Tabellen die Kurven (φ_3, s_3) für die verschiedenen ν (= 30, 40, . . . 90°) verzeichnet, aber hier nicht wiedergegeben; dieselben werden von den Ordinatenlinien berührt, welche die Asymptoten der Kurven (φ_3, l_3) in der Fig. 29 bilden; verbindet man diese Berührungspunkte durch eine Kurve, und zieht dann die Ordinate für das fragliche φ_3 (so $\varphi_3=30°$ zu Fig. 30), so liefert der Schnittpunkt mit jener Verbindungskurve eine Ordinate, die verdoppelt das s_3 unseres Integrales bildet.

Nun ist es unsere Aufgabe, jenen Faktor, der unendlich wird, als Funktion von $\nu'=\nu-\nu_0$ darzustellen.

Während vorhin bei Berechnung der l_3 nach Gl. (60) ν und daher auch n' unveränderlich und φ_3 veränderlich war, ist jetzt umgekehrt φ_3 unveränderlich, aber ν und n' sind veränderlich. Daher muss in dem Ausdrucke für b_3 (Gl. 57‴, S. 145) das $d\gamma_3 : d\delta$ durch einen neuen Werth ersetzt werden, den wir nun unter den neuen Voraussetzungen ermitteln wollen. Die Zeichen 3, die nur den Zweck haben, das dritte Lichtbüschel von den andern zu unterscheiden, wollen wir zunächst der Einfachheit halber weglassen.

Es folgt durch Differentiation aus Gl. (52) (S. 143) für φ unveränderlich und ν veränderlich

$$0 = \cos\nu\, d\nu \sin\frac{\gamma}{2} + \sin\nu \cos\frac{\gamma}{2}\frac{d\gamma}{2},$$

$$d\gamma = -2\cot\nu \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} d\nu,$$

ebenso aus Gl. (42) (S. 127)

$$(n'^2 - 1)\, 2\sin\nu\cos\nu\, d\nu + \sin^2\nu\, 2n'\, dn' = 0,$$

$$dn' = -\frac{n'^2-1}{n'}\cot\nu\, d\nu,$$

sodann aus den Gleichungen (49) (S. 141)

$$dn' \sin\beta' + n' \cos\beta'\, d\beta' = \cos\delta\, d\delta,$$
$$dn' \sin(60^0 - \beta') - n' \cos(60^0 - \beta')\, d\beta' = \cos\varepsilon''\, d\varepsilon''.$$

Theilt man die erste dieser Gleichungen durch $\cos\beta'$, die zweite durch $\cos(60^0 - \beta')$ und addirt, so erhält man

$$dn' \left(\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}(60^0 - \beta')\right) = d\delta \frac{\cos\delta}{\cos\beta'} + d\varepsilon'' \frac{\cos\varepsilon''}{\cos(60^0 - \beta')}.$$

Führt man hierin den oben erhaltenen Ausdruck für dn' ein und beachtet, dass (Gl. 53‴, S. 144) $d\varepsilon'' = d\gamma - d\delta$, so erhält man

$$-\frac{n'^2-1}{n'}\cot\nu\, d\nu \left(\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}(60^0 - \beta')\right) = d\delta \frac{\cos\delta}{\cos\beta'} + (d\gamma - d\delta)\frac{\cos\varepsilon''}{\cos(60^0 - \beta')}.$$

Ersetzt man hierin $d\nu$ durch $d\gamma$ mit Hilfe der obigen Gleichung zwischen beiden, theilt durch $d\delta$ und vereinfacht, so erhält man

$$\frac{d\gamma}{d\delta}\left(\frac{n'^2-1}{n'}\frac{\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}(60^0 - \beta')}{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} - \frac{\cos\varepsilon''}{\cos(60^0 - \beta')}\right) = \frac{\cos\delta}{\cos\beta'} - \frac{\cos\varepsilon''}{\cos(60^0 - \beta')}.$$

Multiplicirt man mit $\cos\beta' \cos(60^0 - \beta')$, so wird aus $\operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}(60^0 - \beta')$ entstehen $\sin\beta' \cos(60^0 - \beta') + \cos\beta' \sin(60^0 - \beta') = \sin 60^0 = {}^1/_2\sqrt{3}$, und man erhält

$$\frac{d\gamma}{d\delta} = \frac{\cos\delta \cos(60^0 - \beta') - \cos\varepsilon'' \cos\beta'}{\frac{n'^2-1}{4n'}\cot\frac{\gamma}{2}\sqrt{3} - \cos\varepsilon'' \cos\beta'}.$$

Führt man diesen Ausdruck in denjenigen von b (56ª. S. 144) ein, den so gewonnenen als b_3 in die Formel (61) von H_3, so ist das zu vollführende Integral angegeben. Wir haben schon darauf verzichtet, dasselbe allgemein zu lösen, haben auch nur nöthig, dies in der Nähe jener Asymp-

tote bei $\nu = \nu_0$ auszuführen, wo wir die Veränderlichen, welche einen endlichen Werth besitzen, als Beständige betrachten.

Es wird aber $l_3 = \infty$ für $\nu = \nu_0$, oder für $\nu' = \nu - \nu_0 = 0$ dadurch, dass hierfür $(d\gamma : d\delta)$ oder sein Zähler

$$Z = \cos\delta \cos(60^0 - \beta') - \cos\varepsilon'' \cos\beta'$$

Null, und dadurch auch $b_3 = 0$ wird.

Mit wachsendem ν' wächst auch Z. Um die Integration in der Nähe von $\nu' = 0$ ausführen zu können, müssen wir einen anderen für kleine ν' geltenden Ausdruck von Z suchen, welcher ν' als einzige Veränderliche enthält, und dies erreichen wir dadurch, dass wir die Abhängigkeit einer kleinen Zunahme des Z von einer kleinen Zunahme des ν suchen. Diese Zunahme von Z ist der Werth von Z selbst, weil $Z = 0$ der Ausgangswerth; als kleine Zunahmen lassen wir die unendlich kleinen gelten, setzen also $\nu' = d\nu$ und erhalten die gesuchte Beziehung durch Differentiation. Diese liefert:

$$dZ = -\sin\delta\, d\delta \cos(60^0 - \beta') + \cos\delta \sin(60^0 - \beta')\, d\beta'$$
$$+ \sin\varepsilon''\, d\varepsilon'' \cos\beta' + \cos\varepsilon'' \sin\beta'\, d\beta' .$$

Führt man hierin die für $\nu = \nu_0$ geltenden Werthe (S. 160) ein, nämlich $\beta' = 30^0$, $\sin\delta = n' \sin\beta' = {}^1/_2 n'$, $\varepsilon'' = \delta$, $d\varepsilon'' = -d\delta$, daher

$$d\beta' = \frac{1}{n'} \frac{\cos\delta}{\cos\beta'} d\delta = \frac{2\cos\delta}{n'\sqrt{3}}\, d\delta ,$$

so erhält man

$$dZ = -\sin\delta\, d\delta \sqrt{3} + \cos\delta\, d\beta'$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} n' + \frac{2}{n'\sqrt{3}} (1 - {}^1/_4 n'^2)\right) d\delta$$
$$= -\frac{d\delta}{n'} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} n'^2 - 1 + \frac{1}{4} n'^2\right) = -d\delta \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{n'^2 - 1}{n'} .$$

Dies ist, wie bemerkt, auch der Werth des Zählers Z des obigen Ausdruckes von $(d\gamma : d\delta)$; und setzt man auch in dessen Nenner

$$\varepsilon'' = \delta ,\ \cos\beta' = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} ,\ \text{so wird}$$

$$\frac{d\gamma}{d\delta} = -d\delta \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{n'^2 - 1}{n'}}{\frac{n'^2 - 1}{4n'} \cot\frac{\gamma}{2}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\delta}$$

$$= -d\delta \frac{4}{3} \frac{n'^2-1}{\frac{n'^2-1}{2} \cot\frac{\gamma}{2} - n' \cos\delta} = -d\delta \,.\, A\,,$$

wobei A eine Unveränderliche. Ausserdem ergiebt sich aus dem obigen (S. 165) durch Differentation der Gl. (52) (S. 143) bei unveränderlichem φ erhaltenen Ausdruck für $d\gamma$

$$\frac{d\gamma}{d\delta} = -\frac{dv}{d\delta} 2 \cot v \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

daher durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $(d\gamma : d\delta)$

$$d\delta^2 = dv \frac{2 \cot v \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{A}.$$

Zieht man hieraus die Wurzel und führt den erhaltenen Werth von $d\delta$ in den ersteren Ausdruck von $(d\gamma : d\delta)$ ein, so erhält man

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\sqrt{dv} \frac{\sqrt{2 \cot v \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{A}} A = -\sqrt{dv} \,.\, 2 \left| \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cot v \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}\cot\frac{\gamma}{2} - \frac{n'}{n'^2-1}\cos\delta}} \right|.$$

Ersetzen wir, wie bemerkt, in diesem Ausdrucke das unendlich kleine dv in Annäherung durch das kleine v', führen dann den Ausdruck in Gl. (57‴) für b_3 und diesen Ausdruck in den letzten für H_3 ein und beachten, dass wieder das Vorzeichen von b_3 ohne Belang ist, so erhalten wir

$$H_3 \quad \frac{Lf}{\triangle v^3} \int_0^{v'} \frac{dv'}{\sqrt{v'}} \frac{s}{\sin v \sin\gamma} \left| \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cot\frac{\gamma}{2} - \frac{n'}{n'^2-1}\cos\delta}{\frac{2}{3}\cot v \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}} \right|,$$

und da $\int_0^{v'} \frac{dv'}{\sqrt{v'}} = 2\sqrt{v'}$, so ist, wenn wir den Zeiger 3 wieder da einsetzen, wo die Verschiedenheit der Lichtbüschel zu bezeichnen ist,

$$H_3 = \frac{Lf}{\triangle v^3} \sqrt{v'} \frac{2\, s_3}{\sin v \sin\gamma_3} \left| \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cot\frac{\gamma_3}{2} - \frac{n'}{n'^2-1}\cos\delta}{\frac{2}{3}\cot v \operatorname{tg}\frac{\gamma_3}{2}}} \right|.$$

Mit dieser Formel wurden die im Sonnenabstande φ_3 hervorgebrachten Helligkeiten berechnet, welche aus der Fläche der Kurve φ_3 zwischen der Fig. 30.

Asymptote (bei v_0, hier $= 44^0\ 20'$) u. dem benachbarten bekannten Punkte (hier $v = 50^0$) hervorgehen. In unserem Beispiele ist daher $v' = (50 - 44{,}33)\ 0{,}01745 = 0{,}0988$; und die Formel liefert jenes Flächenstück $= 1{,}25$.

90. Die Helligkeitskurve für das Lichtbüschel 3. Vorhin erhielten wir für das andere Flächenstück (zwischen $v = 50$ und 90^0) 1,57, so dass wird

$$H_3 = \frac{Lf}{\triangle v^3}\,(1{,}57 + 1{,}25) = \frac{Lf}{\triangle v^3}\,2{,}82 = \frac{Lf}{\triangle v^3}\,L_3\,.$$

Tabelle 37.

Verhältnissmässige Helligkeit L_3 des dritten Lichtbüschels der Eiskryställchen in den Sonnenabständen φ_3.

φ_3	$21^0 50'$	22^0	23	25	30	40	$50^0 2'$
L_3	23,20	21,55	17,05	11,02	2,82	0,20	0,00

Tab. 37. Die Ergebnisse sind in Tab. 37 und Fig. 31 niedergelegt. Die zu-
Fig. 31. gehörige Kurve ist mit (L_3) bezeichnet. Bei $\varphi_3 = 21^0\ 50'$ ist die letzte

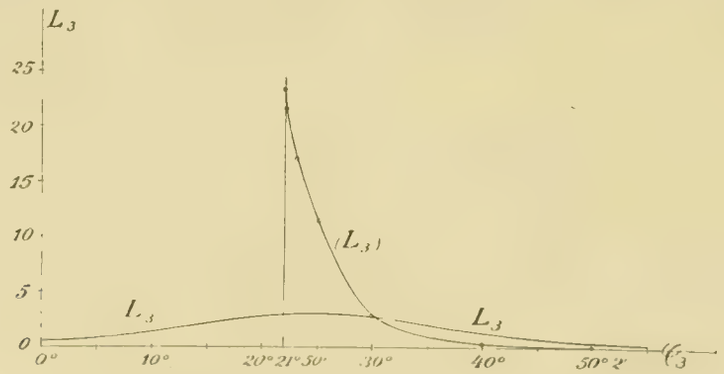


Fig. 31.

Formel für H_3 nicht mehr unmittelbar zu gebrauchen; denn dann ist $v_0 = 90^0$, $v' = 0$, indem die beiden Grenzen v_0 und 90^0 des Flächenstreifens der Fig. 30 zusammenfallen; daher wird $v' : \cot v = 0 : 0$ oder unbestimmt. Nimmt man aber v um dv kleiner als 90^0, so ist $\cot (90^0 - dv) = dv$, ausserdem $v' = dv$, daher $v' : \cot v = 1$. Mit diesem Werthe erhält man $L_3 = 23{,}2$, wie angegeben.

91. Einfluss der Grösse des Sonnendurchmessers. Die scharfe Lichtgrenze bei $\varphi_3 = 21^0\ 50'$ tritt aber nicht ein, weil die Sonne kein Lichtpunkt, sondern für uns eine scheinbare Lichtscheibe von 32′ Durchmesser ist. Bildet man demgemäss den allmählichen Lichtübergang, ähnlich wie für die Regenbogengrenze (S. 46 ff. Fig. 7), oder in einfacherer Weise, wodurch die Helligkeit an der Grenze von 23,2 auf 11,2, etwas weniger als die Hälfte vermindert wird, so erhält man annähernd die Zahlen der Tabelle 38, von Tab. 38
$\varphi_3 = 21^0\ 34'$ bis $22^0\ 15'$. Es sind dann noch die Werthe von L_3 von Grad zu Grad zugefügt.

Tabelle 38.

Helligkeitsübergang an der Grenze des durch den dritten Lichtbüschel hervorgebrachten Ringes.

φ_3	21^0 34′	38	42	46	50	54	58	22^0 2′	6	10	15
L_3	0,00	3,58	6,81	9,69	12,22	14,40	16,28	17,83	19,06	19,97	20,42
φ_3	22^0 30′	45′	23^0	24	25	26	27	28	29	30	31
L_3	19,30	18,17	17,05	14,40	11,02	8,60	6,54	4,93	3,72	2,82	2,12
φ_3	32^0	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
L_3	1,58	1,17	0,87	0,66	0,51	0,41	0,33	0,26	0,200	0,162	0,128
φ_3	43^0	44	45	46	47	48	49	$50^0 2'$			
L_3	0,098	0,072	0,050	0,032	0,018	0,008	0,002	0,000			

92. Der helle Ring und seine Verwaschung, wenn die Eiskrystalle klein sind. Diese starke Helligkeit im Abstande φ_3 etwa $= 22^0$ tritt bei dem Vorhandensein von leichten Cirruswolken deutlich hervor und erzeugt den häufig sichtbaren Ring von 22^0 um den Mond bei Nacht, aber auch oft den gleichen Ring um die Sonne im Winter und im Sommer.

Bei klarem Himmel bemerkt man aber Nichts von diesem Ringe, ebensowenig wie vom Regenbogen; der Ring wird wegen der Kleinheit der Eiskryställchen verwaschen, ebenso wie der Regenbogen wegen der Kleinheit der Tröpfchen. Der Grund ist der ganz übereinstimmende; er liegt in der Interferenz der aus einer Krystallfläche austretenden Lichtstrahlen, wodurch die bekannte Erscheinung der Beugung hervorgebracht wird. Es

entstehen dadurch abwechselnd helle und dunkle Streifen, deren Abstand vom ungebeugten Strahle mit der Breite der Krystallfläche umgekehrt proportional ist, so dass bei der Verschiedenheit dieser Breiten sich die Lichtstärken gegenseitig ausgleichen und eine allgemeine Verbreiterung und Abschwächung des Ringes oder ein Verwaschen desselben eintritt. Gehen wir näher auf diese Erscheinung ein.

93. Die verhältnissmässige Helligkeitskurve der Beugung durch ein Eiskrystall. Fig. 32. Stelle Fig. 32 einen Theil des senkrechten Schnittes eines Eiskrystalles dar, in dessen Ebene sich das Licht bewegt, das den hellen Ring von 22° Sonnenabstand erzeugt; es trete aus der Seitenfläche AB der Lichtstrahl BC unter dem Winkel ε aus, so ist $AC \perp BC$ die Wellenoberfläche mit übereinstimmender Schwingungsphase, und es ist, wenn $AB = r$, $AC = a = r \cos \varepsilon$.

Ein entfernter Punkt P wird nun von den verschiedenen Punkten der Wellenoberfläche in verschiedener Weise zur Schwingung angeregt. Ein solches Element bei M, wofür $AM = x$ sei, hat eine mit dx proportionale Grösse. Die durch das Element bei A auf P übertragene Schwingungsgeschwindigkeit sei, abgesehen von einer Konstanten, $dx \sin 2\pi \frac{t}{T}$, wobei T die Schwingungsdauer und t die von einem bestimmten bis zu dem betrachteten Zeitpunkt verflossene Zeit, so ist die von dem Elemente bei M nach P übertragene Schwingungsgeschwindigkeit

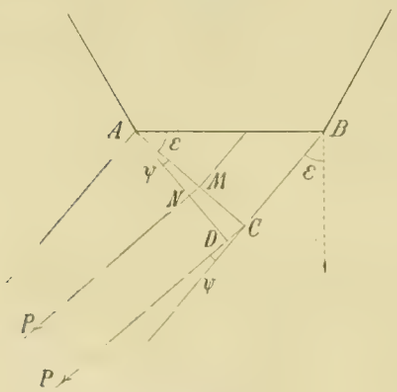


Fig. 32.

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \psi}{\lambda} \right) dx,$$

wenn ψ der Winkel, welchen die Richtung CP nach P mit der Normalen BC zur Wellenoberfläche AC bildet, und wenn λ die Wellenlänge des Lichtes bedeutet. Dann drückt nämlich $MN : \lambda = x \sin \psi : \lambda$ den Phasenunterschied der von A und der von M nach P übertragenen Schwingungen aus.

Die Gesammtgeschwindigkeit, welche von der ganzen Welle in der Breite a nach P übertragen wird, ist daher

$$\int_0^a \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \psi}{\lambda}\right) dx$$

$$= \sin 2\pi \frac{t}{T} \int_0^a \cos 2\pi \frac{x \sin \psi}{\lambda}\, dx \; - \cos 2\pi \frac{t}{T} \int_0^a \sin 2\pi \frac{x \sin \psi}{\lambda} dx .$$

Daraus ergiebt sich aber die Intensität der Schwingung oder die Lichtstärke J, wenn man einen konstanten Faktor weglässt (vgl. S. 53—55 insbes. Gl. (19))

$$J = \left(\int_0^a \cos 2\pi \frac{x \sin \psi}{\lambda}\, dx\right)^2 - \left(\int_0^a \sin 2\pi \frac{x \sin \psi}{\lambda}\, dx\right)^2$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \psi} \sin 2\pi \frac{a \sin \psi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \psi}\left[\cos 2\pi \frac{a \sin \psi}{\lambda} - 1\right]\right)^2$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi \sin \psi}\right)^2 \left(2 - 2 \cos 2\pi \frac{a \sin \psi}{\lambda}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\pi \sin \psi}\right)^2 \sin^2 \pi \frac{a \sin \psi}{\lambda} = a^2 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2},$$

wenn man setzt

$$\pi \frac{a \sin \psi}{\lambda} = \xi.$$

Da $\sin \xi : \xi$ für $\xi = 0$ zu 1 wird, sonst aber < 1 ist, so hat J seinen grössten Werth a^2 für $\xi = 0$. Die kleinsten Werthe von J sind $= 0$ und treten ein für $\xi = n\pi$, wobei n eine ganze Zahl, verschieden von Null ist, also für $a \sin \psi = n\lambda$, oder, da $a \sin \psi = CD$ ist, wenn CD ein Vielfaches von λ. Es ist dies verständlich, da dann alle Schwingungsphasen auf der Länge AD n-mal vorkommen, sich also gegenseitig in ihrer Wirkung auf das von allen Punkten des AD gleichweit entfernte P gegenseitig aufheben. Die übrigen Maxima von J erhält man, wenn man den Differentialquotienten von $\sin \xi : \xi = 0$ setzt, also für

$$\frac{\cos \xi}{\xi} - \frac{\sin \xi}{\xi^2} = 0, \text{ oder } \xi = tg\, \xi,$$

welche Gleichung durch $\xi = 1{,}43\,\pi$; $2{,}46\,\pi$; $3{,}47\,\pi$ u. s. w. erfüllt wird. Die Werthe der Maxima von $\sin^2 \xi : \xi^2 = J : a^2$ für $\xi = 0$ und für die eben bezeichneten Werthe von ξ findet man aber der Reihe nach gleich

1; 0,0472; 0,0164; 0,00837;

Fig. 33. sie nehmen also sehr rasch ab. In Fig. 33 ist die Kurve mit den Koordinaten ξ und J für $a^2 = 1$ einseitig aufgezeichnet; sie erstreckt sich symmetrisch auf positive und negative ξ.

Für das erste Minimum $J = 0$ gilt $\xi = \pi$, wofür nach den obigen Formeln

$$\sin \psi = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{r \cos \varepsilon}$$

ist. Dabei haben wir ε für den hellen Ring auf S. 161 gleich $\delta = 40^0\ 55'$ gefunden.

94. Die Ausgleichung der Wellenzüge der Beugungs-Helligkeitskurve, wenn Eiskrystalle verschiedenen Durchmessers zugleich wirken. Die eben angeschriebene Gleichung zeigt, dass $\sin \psi$ (und ξ), und bei kleinen ψ auch diese Winkelablenkung ψ selbst umgekehrt proportional mit r ist. Da nun die Krystalldurchmesser ($= 2r$) jedenfalls wechseln, so werden sich die von den verschiedenen Krystallen hervorgebrachten hellen und dunklen Ringe gegenseitig ausgleichen. Man kann eine Ausgleichung auch bewirkt denken durch nur zweierlei Krystalle, indem man für die kleineren das erste Minimum ungefähr an die Stelle des zweiten Maximums für die grösseren Krystalle, d. i. in die Mitte zwischen das erste und zweite Minimum der grösseren Krystalle setzt, oder indem man für die kleineren $\xi' = \frac{3}{2}\xi$ macht.

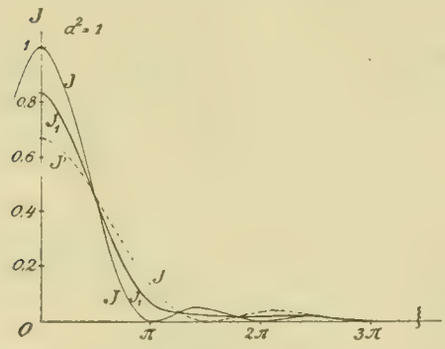


Fig. 33.

Lassen wir zunächst einmal für die grösseren Krystalle das erste Minimum (bei $\xi = \pi$) in die Sonne fallen, so müsste der Strahl eine Ab-
Tab. 38. lenkung $\psi = 22^0\ 15'$ erfahren. Denn Tab. 38 zeigt, dass bei dieser Ablenkung $\varphi_3 = 22^0\ 15'$ von der Sonne, wenn man die Grösse ihres scheinbaren Durchmessers berücksichtigt, das Maximum der Lichtstärke L_3 stattfindet, sodass von hier aus wieder rückwärts bis zur Sonne die Ablenkung $\psi = 22^0\ 15'$ sein muss. Daraus folgt nach der obigen Gleichung

$$r = \frac{\lambda}{\sin\psi\cos\varepsilon} = \frac{\lambda}{0{,}379\,.\,0{,}756} = 3{,}5\,\lambda\ .$$

Für die kleineren Krystalle wäre dann $\psi = \frac{3}{2} \times 22^0\ 15' = 33^0\ 23'$, daher $r = 2{,}4\,\lambda$.

Es hätten also Krystalle mit Durchmessern von etwa 7 und 5 Wellenlängen λ die Wirkung, das erste Minimum der grösseren Krystalle in der Sonne erscheinen zu lassen, und die Maxima und Minima beider Arten gegenseitig auszugleichen. Diese Maasse stimmen ungefähr mit den Maassen der Wassertröpfchen überein, auf welche wir bei der Zerstreuung des Regenbogens gekommen waren; wir wollen sie daher vorerst zu Grunde legen, indem wir die endgiltige Bestimmung später auf Grundlage der Helligkeitsbeobachtungen am Himmel vornehmen werden.

Die Kurve $J'\xi'$ für die kleineren Krystalle erhalten wir aus der Kurve $J\xi$ der Fig. 33, indem wir deren Abscissen mit $\frac{3}{2}$ multipliciren; Fig. 33.
und indem wir ausserdem voraussetzen wollen, dass beiderlei Krystalle dieselbe Lichtwirkung hervorbringen, dass also die Flächen beider Kurven gleich sind, müssen wir zugleich die Ordinaten der Kurve $J\xi$ mit $\frac{2}{3}$ vervielfachen. Wir erhalten dadurch die Kurve J', und indem wir die mittleren Werthe der zu denselben ξ gehörigen Ordinaten von J und J' nehmen, die Kurve J_1 der verwaschenen Ringe. Die Werthe dieser Ordinaten von $\xi = 0$ bis $\xi = 3\pi$, von wo an wir die weiteren geringen Wirkungen nicht mehr zu beachten brauchen, sind dann folgende:

$\frac{\xi}{\pi}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
J_1	0,833	750	540	320	155	064	030	024
$\frac{\xi}{\pi}$	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
J_1	0,019	016	014	011	008	005	002	000.

Legt man durch ein Kryställchen und die Sonne einen grössten Kreis der Himmelskugel, so schneidet dieser den unzerstreuten hellen Ring in zwei Punkten, die von der Sonne die Abstände von $22^0\ 15'$ haben, und von jedem dieser Punkte geht eine Lichtzerstreuung aus, die sich nach der Seite der Sonne hin über diese hinaus erstreckt. Jenem Abstande von

$22^0\ 15'$ haben wir die Grösse $\xi : \pi = 1$ zugeschrieben, und die an der Sonne sich ergebende Helligkeit, die aber von beiden Seiten her erzeugt wird, ist nach der letzten Tabelle = 0,064. Wir wollen nun die ξ von einem Ring gegen die Sonne hin positiv, von ihr weg negativ rechnen, und sie als ξ_0 von der Sonne an zählen, sodass $(\xi_0 : \pi) = 1 - (\xi : \pi)$. Nun addiren sich an jeder Stelle die von beiden Seiten herrührenden Helligkeiten $J_1 = 0{,}833$ und $J_1{}^* = 0{,}014$ zu $J_0 = 0{,}847$, so dass man erhält

$\frac{\xi_0}{\pi}$	0	1	2	3	4
J_1	0,064	833	064	014	000
$J_1{}^*$	0,064	014	000		
J_0	0,128	847	064	014	000,

und so wird die ganze Reihe:

$\frac{\xi_0}{\pi}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
J_0	0,128	185	344	559	766	847	761
$\frac{\xi_0}{\pi}$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
J_0	0,568	325	157	064	030	024	020
$\frac{\xi_0}{\pi}$	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
J_0	0,017	014	011	008	005	002	000

95. Zurückführung der Helligkeiten auf die früher benutzten Einheiten. Hierdurch sind aber nur verhältnissmässige Helligkeiten angegeben; um dieselben auf die bisher angenommenen Einheiten zurückzuführen, müssen wir beachten, dass die Lichtmengen sich durch die Zerstreuung nicht ändern. Es wird aber jeder Theil des in Fig. 31 dargestellten unzerstreuten Lichtbüschels L_3, welches in der Figur mit (L_3) bezeichnet ist, auf dieselbe Weise zerstreut werden, wobei jedoch die vorhin bestimmten Durchmesser der Eiskryställchen für Theile des Lichtbüschels, welche grössere Abstände φ_3 als 22^0 von der Sonne haben, etwas andere sind. Theilen wir das Büschel L_3 in 3 Theile, nämlich für φ_3 von $21^0\ 34'$ bis 23^0, dann von 23 bis 27^0 und endlich von 27 bis 49^0. Die Lichtmenge, die am Himmel im Sonnenabstand φ_3 in dem Ringe von der Breite $d\varphi_3$ bei

der Helligkeit l_3 erzeugt wird, ist $l_3\, 2\,\pi \sin\varphi_3\, d\varphi_3$, also die gesammte hervorgebrachte Lichtmenge in dem Ringe von φ'_3 bis φ''_3

$$= \int_{\varphi'_3}^{\varphi''_3} l_3 \,.\, 2\,\pi \sin\varphi_3 \,.\, d\varphi_3 = 2\,\pi\, \Sigma\, l_3 \sin\varphi_3 \,\triangle\varphi_3 ,$$

letzterer Ausdruck gilt für endliche Intervalle und wird, wenn wir $\triangle\varphi_3 = 1^0$ oder $= \pi : 180$ annehmen,

$$= \frac{\pi^2}{90}\, \Sigma\, l_3 \sin\varphi_3 \,.$$

Berechnen wir zuerst die Lichtmengen, welche durch die bezeichneten 3 Theile des Büschels L_3 ohne Beugung am Himmel erscheinen würden. Die Werthe von L_3 sind in der Tabelle 37 ohne Berücksichtigung der Tab. 37. Grösse des Sonnendurchmessers, in Tabelle 38 mit dieser Berücksich- Tab. 38. tigung angegeben und in der letzteren Tabelle aus der ersteren durch zeichnerische Einschaltung vervollständigt. In gleicher Weise erhält man für den ersten Theil von $\varphi_3 = 21^0\ 34'$ bis 23^0 noch

φ_3	$22^0\ 15'$	22.30	22.45	23.00
l_3	20,42	19,30	18,17	17,05.

Berechnet man durch Addition, oder besser nach der Simpson'schen Regel die Fläche dieser Kurve mit $d\varphi_3 = 1^0 = \pi : 180$, so erhält man sie gleich

$$F_3 = \frac{\pi}{180} \,.\, 22{,}43 .$$

Wegen der geringen Ausdehnung nach φ_3 kann man den mittleren Werth desselben als gleichförmig geltend annehmen; derselbe ist $22{,}3^0$, woraus die auf dem Himmelsringe erscheinende Lichtmenge ist:

$$L'_3 = 2\,\pi \,.\, \sin 22{,}3^0 \,.\, \frac{\pi}{180} \,.\, 22{,}43 = \frac{\pi^2}{90} \,.\, 8{,}51 \,.$$

Für die Ringe des zweiten Theiles dürfen wir keine mittleren Sonnenabstände φ_3 mehr annehmen. Wir erhalten zur Berechnung der obigen Formel

φ_3	23^0	24	25	26	27
l_3	17,05	14,40	11,02	8,60	6,54
$l_3 \sin\varphi_3$	6,67	5,88	4,66	3,76	2,97.

Nimmt man die erste und letzte Zahl halb und addirt, so ist

$$L''_3 = \frac{\pi^2}{90} \Sigma l_3 \sin \varphi_3 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 19{,}12 \ .$$

Entsprechend erhält man für den dritten Theil

$$L'''_3 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 11{,}90 \ .$$

Diesen Lichtmengen müssen diejenigen gleichgesetzt werden, welche in den durch Beugung zerstreuten Lichtbüscheln enthalten sind. Wir haben vorhin die Intensitäten J_0 verzeichnet, welche in den Abständen ξ von dem ungebeugten Lichtstrahle herrschen. Wir haben ferner die Grösse der grösseren von den verschiedenen Eiskryställchen so angenommen ($r = 3{,}5\,\lambda$), dass zu $\xi = \pi$ der Winkelabstand $\psi = 22^0\ 15' = 22{,}3^0$ gehört, so dass also diese Stelle von dem hellen Ringe aus gerade in die Sonne verschoben wird; und diesen Abstand können wir als den Schwerpunktsabstand des ersten Theiles unseres Büschels (φ von $21^0\ 34'$ bis 23^0) annehmen. Dann wird für irgend einen andern Werth von ξ der Winkelabstand ψ bestimmt durch die vorhin erhaltene Formel

$$\sin \psi = \frac{\lambda}{a} \frac{\xi}{\pi} = \frac{\lambda}{r \cos \varepsilon} \frac{\xi}{\pi} = \frac{1}{3{,}5 \ . \ 0{,}756} \frac{\xi}{\pi} = 0{,}379 \frac{\xi}{\pi},$$

was für $\xi = \pi$, $\psi = 22{,}3^0$ liefert. Danach sind die zu der obigen Tabelle (ξ_0, J_0) gehörigen Werthe von ψ berechnet, wobei $\xi = \pi - \xi_0$. Daraus ergeben sich aber die Sonnenabstände $\varphi_3 = 22{,}3^0 - \psi$, wenn man die Abstände ψ vom hellen Ringe gegen die Sonne hin positiv, von der Sonne weg negativ zählt. So erhält man z. B. die zusammengehörigen Werthe, wenn man bei diesem ersten Theil die φ_3 mit φ_3' bezeichnet,

φ'_3	0^0	9,2	22,3	31,0	44,6	71,6	112,3
J_0	0,128	344	847	568	064	014	004.

Die Grenze ergiebt sich aus $\sin \psi = -1$, daher $\xi : \pi = -2{,}64$, $\psi = -90^0$, $\varphi = 22{,}3^0 + 90^0 = 112{,}3^0$. Berechnet man hiernach für ξ in Intervallen von 0,1 die Werthe $J_0 \sin \varphi_3 \ . \ \triangle \varphi_3$, wo $\triangle \varphi_3$ um $\frac{1}{10} \ . \ 22{,}3^0 = 2{,}23 \frac{\pi}{180}$ schwankt, so erhält man

$$2\pi \Sigma J_0 \sin \varphi_3 \triangle \varphi_3 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 8{,}30 \ .$$

Die Werthe J_0 sind dabei aber auf eine ganz beliebige Einheit bezogen; die Werthe nach den Einheiten der l_3 erhält man durch Multiplikation mit einer Verhältnisszahl v', und diese Zahl durch Gleichsetzung der beiden Lichtmengen

$$L'_3 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 8{,}51 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 8{,}30\, v',$$

woraus $v' = 1{,}023$.

Für den zweiten Theil von $\varphi_3 = 23$ bis 27^0, dessen mittlerer Punkt bei $\varphi_3 = 25^0$ wegen der geringen Breite auch als Schwerpunkt angenommen werden kann, wollen wir der Einfachheit der Rechnung wegen das zu $\xi = \pi$ gehörige $\psi = 25^0$ annehmen, also die früheren $22{,}3^0$ durch 25^0 ersetzen. Wir erhalten dann

$$\sin\psi = \sin 25^0 \cdot \frac{\xi}{\pi} = 0{,}423\, \frac{\xi}{\pi},$$

und die obige Tabelle wird

φ''_3	0^0	10,3	25,0	34,7	50,0	83,4	115,0
J_0	0,128	344	847	568	064	014	007.

Die Grenze für $\sin\psi = -1$, $\psi = -90^0$ ist bei $\xi : \pi = -2{,}36$, also $\xi_0 : \pi = +3{,}36$, $J_0 = 0{,}008$. Aus der vollständigen Tabelle folgt wie vorher $\Sigma J_0 \sin\varphi_3 \triangle\varphi_3 = 10{,}2$, und hieraus mit Hilfe der früheren Zahlen

$$L''_3 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 19{,}12 = \frac{\pi^2}{90}\, 10{,}2\, v'', \qquad v'' = 1{,}88.$$

Für den dritten Theil endlich von $\varphi_3 = 27$ bis 49^0 ist der Schwerpunkt der Fläche der J_0 etwa bei $\varphi_3 = 29{,}2^0$, sodass $\sin\psi = \sin 29{,}2^0\,(\xi : \pi) = 0{,}488\,(\xi : \pi)$ wird. Die Grenze ist bei $\varphi_3 = 119{,}2^0$ mit $\xi : \pi = -2{,}05$, $J_0 = 0{,}011$. Die Rechnung ergiebt hier

$$L'''_3 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 11{,}9 = \frac{\pi^2}{90} \cdot 13{,}42\, v''', \qquad v''' = 0{,}88.$$

96. Die normale Helligkeitskurve für das Lichtbüschel 3, wenn die Eiskrystalle kleine von einander verschiedene Durchmesser haben. Mit den oben erhaltenen zu $\xi : \pi = 1$ gehörigen Werthen von ψ ($\psi' = 22{,}3^0$, $\psi'' = 25{,}0^0$, $\psi''' = 29{,}2^0$), den Werthen von v ($v' = 1{,}023$, $v'' = 1{,}88$, $v''' = 0{,}88$) und mit $\xi : \pi = 1 - (\xi_0 : \pi)$ erhält man aus der Tabelle

der Seite 174 eine neue Tabelle, von der wir im Folgenden einen kleinen Theil wiedergeben.

$\frac{\xi}{\pi}$ +	1,0	0,9	0,8 . . . 0 . . .	—1,0 . . .	—2,0		
φ'_3	0°	2,3	4,7	22,3	44,6	71,6	112,3 (2,64)
l'_3	0,131	141	190	867	065	014	004
φ''_3	0°	2,8	5,5	25,0	50,0	83,4	115,0 (2,36)
l''_3	0,241	258	348	1,592	120	026	016
φ'''_3	0°	3,2	6,2	29,2	58,4	106,6	119,2 (2,05)
l'''_3	0,113	121	163	744	057	012	011.

Die Reihe von $\xi : \pi = 0{,}8$ z. B. erhält man so: $\varphi'_3 = 22{,}3^0 - \arcsin(0{,}8 \sin 22{,}3^0) = 4{,}7^0$, $\varphi''_3 = 25^0 - \arcsin(0{,}8 \sin 25^0) = 5{,}5^0$, $\varphi'''_3 = 29{,}2^0 - \arcsin(0{,}8 \sin 29{,}2^0) = 6{,}2^0$, $\xi_0 : \pi = 1 - (\xi : \pi) = 0{,}2$, dazu nach der Tabelle der Seite 174 $J_0 = 0{,}185$, was mit den v', v'', v''' multiplicirt, $l'_3 = 0{,}190$; $l''_3 = 0{,}348$; $l'''_3 = 0{,}163$ liefert.

Sucht man hieraus durch Einschaltung die Werthe von l'_3, l''_3, l'''_3 für φ_3 von Grad zu Grad, so erhält man eine Tabelle von folgender Gestalt, aus welcher man durch Addition die Werthe von $L_3 = l'_3 + l''_3 + l'''_3$ bestimmt.

φ_3	0°	1	2	3 . . .	10 . . .	20 . . .	25 . . .	50 . . .	100
l'_3	0,131	132	136	151	388	840	829	030	005
l''_3	0,242	244	251	262	627	1430	1596	121	018
l'''_3	0,112	113	115	118	241	565	703	180	013
L_3	0,485	489	502	531	1256	2835	3128	331	036.

Die Werthe von l'_3, l''_3, l'''_3 enden bei $\varphi_3 = 112{,}3$; 115,0; 119,2° schroff mit 0,004; 0,016; 0,011. Weil aber in Wahrheit das ganze nicht zerstreute Büschel nicht in 3 auf ihre mittlere Stellen vereinigte Theile zerfällt, sondern bis zu $\varphi_3 = 50{,}2^0$ allmählich verläuft, dabei aber schon bei 40° fast unmerklich wird, so verläuft das zerstreute Büschel merklich bis $\varphi_3 = 40^0 + 90^0 = 130^0$, und es sind daher die obigen Zahlen von $\varphi_3 = 112$ bis 130° ohne Vermehrung der Lichtmenge ausgedehnt. Auf diese Weise sind die in Tabelle 58 eingetragenen Werthe von L_3 gewonnen.

97. Das Lichtbüschel 4. Es tritt parallel mit dem Büschel 1 aus, das unmittelbar an I zurückgeworfen wird, entsteht aber auf andere

Weise. Das auffallende Büschel 0 dringt durch I ins Innere, wird an den Flächen III, IV, V, in einigen Fällen ausserdem noch an anderen Flächen total reflektirt und tritt dann durch I wieder aus. Fig. 34 zeigt diesen Vorgang bei $\nu = 40°$, $\delta = 20°$. Das Büschel durchsetzt daher zweimal die Fläche I mit demselben äusseren Einfallwinkel ε, erleidet also die aus der Tab. 27 zu entnehmende Lichtschwächung $\eta_4 = (1 - \alpha)^2$. q_4 kann unmittelbar auf I gemessen werden. Ausser in den Werthen von η und q stimmt das Büschel 4 mit dem Büschel 1 überein, so dass wie dort (S. 146) gerechnet wird. Die Formel 58 wird daher ersetzt durch

Fig. 34.

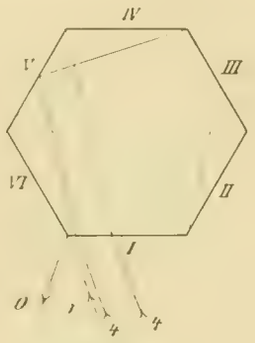


Fig. 34

$$l_4 = \frac{\eta_4 q_4}{2 \sin \delta}.$$

Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Fig. 35 in der Reihe *a* niedergelegt. Für jedes ν ist eine besondere Kurve (φ_4, l_4) mit den Abscissen φ_4 und den Ordinaten l_4 gezeichnet; diejenigen für $\nu = 10°$ und $\nu = 20°$

Fig. 35.

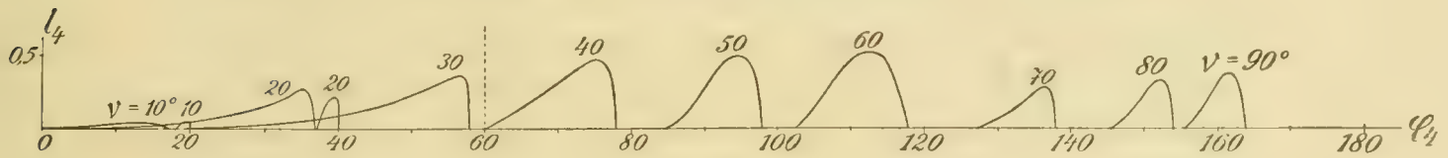


Fig. 35a.

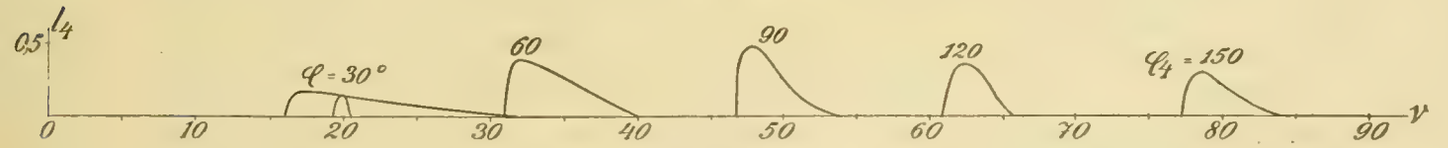


Fig. 35b.

Fig. 35c.

zerfallen in zwei getrennte Stücke, weil ein Wechsel in dem Verhalten der Büschel im Innern des Eiskrystalls eintritt. Die Punkte der Endigungen der Kurven auf der Axe der φ_4 sind durch Einschaltung auf den Zeichnungen der Krystallquerschnitte annähernd bestimmt.

Aus diesen Figuren erhält man für einen unveränderlichen Sonnenabstand φ_4 die Helligkeit aus den Gleichungen (46) und (47) (S. 137)

$$H_4 = \frac{Lf}{\triangle v^2} \Sigma_v l_4 .$$

Um diese Summirung auszuführen, denkt man sich in der Reihe a die Kurven (φ_4, l_4) für alle v von Grad zu Grad eingeschaltet. Für ein bestimmtes φ_4, z. B. von 60°, schneidet man nun die Ordinatenlinie $\varphi_4 = 60^0$ mit allen jenen Kurven, trägt die Ordinate l_4 jeder v-Kurve mit diesem v als Abscisse in der Reihe b auf und erhält so eine Kurve (v, l_4) für jedes gewählte φ_4. Dies wurde für $\varphi_4 = 30, 60, 90, 120, 150^0$ in dem etwa dreifachen Maassstabe der gegebenen Figur ausgeführt. Es wurden dabei natürlich nicht alle jene bezeichneten Kurven v der Reihe a wirklich gezeichnet; es wurden nur die wichtigen Punkte derselben, nämlich die Anfangs- und Scheitelpunkte durch Einschaltung bestimmt und daraus der Zug der Kurve, wesentlich ihr Schnittpunkt mit dem angenommenen φ_4 (im Beispiele 60°), schätzungsweise ermittelt. Die Kurve für $\varphi_4 = 30^0$ zerfiel in zwei Theile.

Nun bestimmt man die Inhalte F der von den Kurven und der v-Axe eingeschlossenen Flächen, wobei man die v nach Graden misst; diese Bestimmung geschah bei der angenähert dreieckigen Gestalt der Flächen durch schätzungsweise Verwandlung in Dreiecke. Vervielfacht man die Flächen mit der in 1° enthaltenen Anzahl der $\triangle v$, d. i. mit $(\pi : 180) : \triangle v = 0{,}01745\ \triangle v$, so erhält man

$$H_4 = \frac{Lf}{\triangle v^3}\ 0{,}01745\ F = \frac{Lf}{\triangle v^3} L_4 .$$

Tab. 39. Fig. 35. So wurde die durch Einschaltungen erweiterte Tabelle 39 der L_4 und die Kurve (φ_4, L_4) in der Reihe c der Fig. 35 ermittelt.

Tabelle 39.

Verhältnissmässige Helligkeit L_4 $(4 + 4' + 4'')$ des vierten Lichtbüschels der Eiskryställchen in den Sonnenabständen φ_4.

φ_4	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	162
L_4	0,000	007	017	028	035	041	043	041	038	032	026	020	017	016	017	019	004	000

Es erstreckt sich L_1 von $\varphi_1 = 0$ bis 162°. Indem das Büschel 4 als grösserer Theil eines inneren Büschels aus I austritt, wird ein kleinerer Theil ins Innere zurückgeworfen. Dieses gelangt in manchen Fällen auf IV, wird hier zum Theil zurückgeworfen und tritt aus I aus, indem es als 4' zwischen $\varphi_4 = 0$ und 60° eine geringe Helligkeit erzeugt; in anderen Fällen wird es auf III, IV, V total reflektirt, um aus I zum Theil auszutreten und als 4'' eine schwache Helligkeit zwischen $\varphi_4 = 16°\ 40'$ und $23°\ 27'$ zu erzeugen. Die Wirkung dieser beiden Büschel, welche nicht mehr als 0,001 beträgt, ist in Tab. 39 berücksichtigt.

98. Das Lichtbüschel 5. Es tritt aus I parallel mit den Büscheln 1 und 4 aus, indem das Büschel, welches durch I ins Innere gelangt, an der gegenüberliegenden Fläche IV zum Theil zurückgeworfen wird und dann durch I zum Theil austritt. Seine Schwächung bei IV ist daher α, bei I zweimal $1 - \alpha$, wobei jedesmal ε der äussere Einfallwinkel ist; daraus folgt $\eta_5 = \alpha\ (1 - \alpha)^2$. q_5 wird unmittelbar auf I gemessen. Die Rechnung stimmt mit derjenigen bei Büschel 1 und 4 überein, so dass Fig. 36.

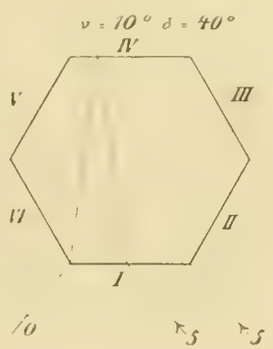


Fig. 36.

$$l_5 = \frac{\eta_5\, q_5}{2 \sin \delta}.$$

Die hier bestimmten Kurven (φ_5, l_5) für unveränderliche ν sind in Fig. 37 Reihe a abgebildet. Jede Kurve hat die Ordinatenlinie $\varphi_5 = 2\nu$ zur Asymptote und endigt auf der φ_5-Axe bei einem um 11 bis höchstens 40° kleineren φ_5. Es rührt dies daher, dass durch die Krystalle mit parallelen Axen (also auch unveränderlichem ν) jener Kreis SPT (Fig. 20) nur theilweise mit hellen Punkten besetzt ist, nämlich stets von $\varphi_5 = 2\nu$ ausgehend, aber nur wenig weit gegen $\varphi_5 = 0$ hin reichend. Beim Drehen eines solchen Kreises um den nach der Sonne gerichteten Erdhalbmesser MS wird dann eine helle Zone erzeugt, an deren äusseren Grenze ($\varphi_5 = 2\nu$) wieder aus denselben Gründen wie beim Büschel 1 eine, geometrisch gesprochen, unendliche Helligkeit erzeugt wird; und daher rührt jener asymptotische Verlauf der Kurve (φ_5, l_5). An der anderen Grenze endigt die Kurve auf der φ_5-Axe. Fig. 37.

Um aus diesen Kurven der Reihe a die

$$H_5 = \frac{Lf}{\triangle r^2} \Sigma_\nu l_5$$

zu bilden, stellt man aus ihnen wieder wie beim Büschel 4 die Kurven (ν, l_5) für unveränderliche φ_5 in der Reihe b her. Bei der vorliegenden

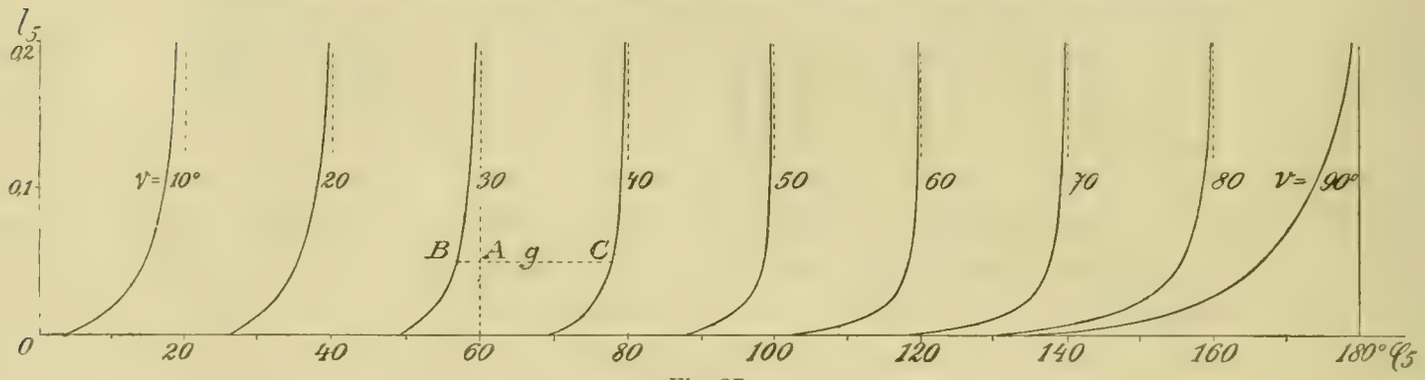


Fig. 37a.

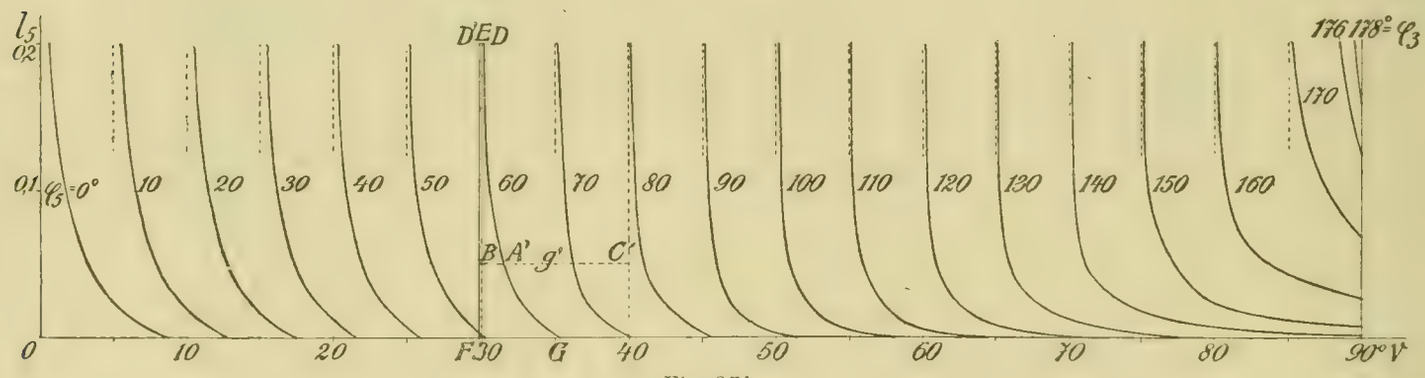


Fig. 37b.

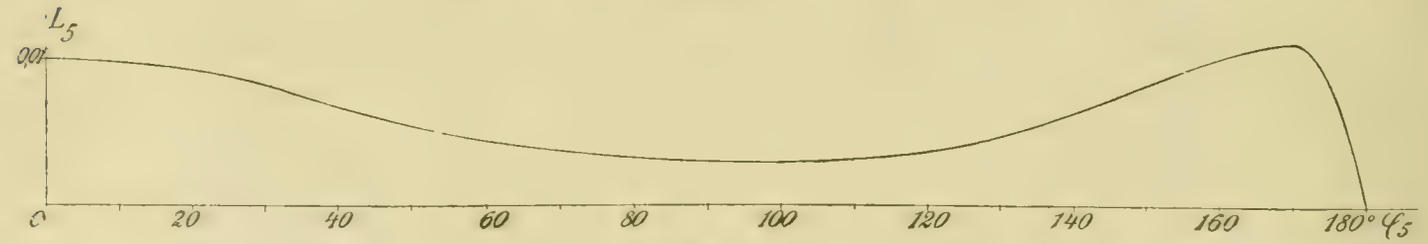


Fig. 37c.

Gestalt der Kurven geschieht dies zweckmässig so, dass man in a und b entsprechende Gerade g, g' parallel zur Abscissenaxe zieht, d. h. solche, welche gleiche Ordinaten l_5, hier $= 0{,}05$, besitzen. Um auf g' in b einen

Punkt A' einer bestimmten Kurve, z. B. derjenigen für $\varphi_5 = 60^0$ zu erhalten, schneidet man g in Fig. a mit der Ordinate $\varphi_5 = 60^0$ in A, und mit den beiden benachbarten Kurven $v = 30$ und 40^0 in B und C, bezeichnet die Schnittpunkte der g' mit der Kurve $\varphi_5 = 60^0$ und den Ordinatenlinien in $v = 30$ und 40^0 mit A', B', C' und bestimmt nun A' durch das Verhältniss

$$B'A' : B'C' = BA : BC.$$

denn das v des Punktes A' muss gleich dem v der durch A gehenden Kurve sein, und dies ist durch verhältnissmässige Einschaltung erreicht.

Die obige Summirung wird durch Bestimmung der Flächen der Kurven φ_5 der Reihe b ausgeführt. Der unendlich lange Flächenstreif bei der Asymptote wird aber, wie früher, dadurch bestimmt, dass man (siehe Fig. 37b) $D'E = ED$ macht; dann ist die Fläche der Kurve $\varphi_5 = 60^0 = FGA'DD'F$. Dieses Verfahren wurde bei dem Büschel 1 S. 147 für die Kurven (φ, l) mit unveränderlichem v begründet aus dem Umstande, dass der helle Kreis SPT (Fig. 20) den von T durch Drehung um MS beschriebenen Kreis berührt. Daher gilt es auch hier für die Kurven (φ_5, l_5) der Reihe a; dann aber auch für die Kurven (v, l_5) der Reihe b. Denn beide Kurven sind in ihrem Verlaufe nahe an den Asymptoten affin (in unseren Figuren sogar kongruent), weil in obiger Proportion für grosse l_5 die BC unveränderlich, daher auch $B'A' : BA$ unveränderlich wird. — Die bezeichneten Flächen F der Kurven in Reihe b wurden mittelst des Amslerschen Planimeters ermittelt.

Dann ergiebt sich wie vorhin

$$H_5 = \frac{Lf}{\triangle v^3} \frac{\pi}{180} F = \frac{Lf}{\triangle v^3} L_5.$$

Die L_5 sind in der Reihe c der Fig. 37 und in Tab. 40 niedergelegt. Fig. 37. In der späteren ausgedehnten Tabelle sind die Zahlen nach der stetigen Kurve der Figur ausgeglichen. Tab. 40.

Tabelle 40.

Verhältnissmässige Helligkeit L_5 des 5. Lichtbüschels der Eiskryställchen in den Sonnenabständen φ_5 (unausgeglichen).

φ_5	0⁰	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	176	178	180
L_5	0,010	010	010	008	007	005	004	004	004	004	003	002	004	005	006	008	010	011	007	005	000

Fig. 38. **99. Das Lichtbüschel 6.** Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I ins Innere treten, von III, IV, V, VI und I total reflektirt werden und dann aus III austreten. Dabei besitzt es bei I und III denselben äusseren Einfallwinkel ε, so dass die Lichtschwächung

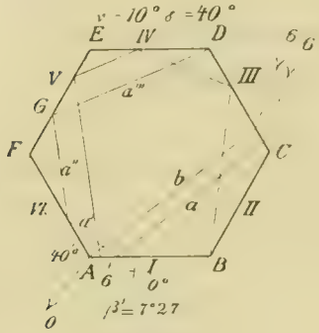


Fig. 38.

$$\eta_6 = (1 - \alpha)^2$$

ist und aus Tab. 27 entnommen werden kann.

Es wird hier, wie sonst immer, aus dem gegebenen und wechselnden ν und δ zuerst u' nach Gl. (42) (S. 127), dann ε durch $\cos\varepsilon = \cos\delta \sin\nu$ (Gl. 51), ferner η_6 nach der soeben angeschriebenen Gleichung, dann β' aus Gl. (49) (wobei $\varepsilon' = \delta$) berechnet, es wird die Zeichnung wie Fig. 38 ausgeführt, aus der sich ergiebt, dass in der Ebene des Normalschnittes das Büschel 6 aus III unter dem ersten Einfallwinkel δ austritt, und dass die Ablenkung ist

$$\gamma_6 = 2\delta - 60^0.$$

Daher kann man auch q_6 unmittelbar auf III messen. φ_6 wird nach Gl. (52) berechnet. Da nun hier $\triangle\gamma_6 = 2\triangle\delta$, wie in Gl. (53') bei Büschel 1, so gilt wie dort nach den Gl. (46, 47, 57'),

$$l_6 = s_6 \frac{2\triangle\nu^2}{b_6}, \quad s_6 = \cos\varepsilon \cdot q_6\,\eta_6, \quad \frac{2\triangle\nu^2}{b_6} = \frac{1}{\sin\nu \sin\gamma_6},$$

$$h_6 = \frac{Lf}{\triangle\nu^2} l_6, \quad H_6 = \Sigma_\nu h_6.$$

Hieraus ergiebt sich mit Hilfe der obigen Gleichungen

$$l_6 = \frac{\cos\varepsilon\, q_6\, \eta_6}{\sin\nu \sin\gamma_6} = \frac{\cos\delta\, q_6\, \eta_6}{\sin(2\delta - 60^0)}.$$

Tab. 41. Danach sind für unveränderliche ν und wechselnde δ die Werthe von φ_6 und l_6 berechnet (für einige Werthe von ν eingetragen in Tab. 41), und Fig. 39. danach sind die Kurven (φ_6, l_6) oder die ν in Fig. 39*a* eingezeichnet. Die Grenzen der Kurven auf der φ_6-Axe sind durch Einschaltung auf den Normalschnittsfiguren der Eisprismen für verschwindende q_6 ermittelt; für eine Kurve ist häufig nur ein Zwischenpunkt aus den Tabellen bekannt, mit

dem man sich aber begnügen kann, nachdem man die Gestalt der Kurven kennen gelernt hat. Diese Gestalt ist für die Kurven $\nu = 90^0$ bis gegen $\nu = 20^0$ eine einfache parabelähnliche, welche in zwei Punkten auf der φ_6-Axe aufsteht. Für kleinere Werthe von ν aber, von der Stelle an, wo der eine Aufstehpunkt in $\varphi_6 = 0$ rückt, wird sie verwickelter. Verschaffen wir uns zuerst eine Uebersicht über die Gestaltsänderung.

Tabelle 41.

Berechnung des l_6 für das 6. Lichtbüschel.

ν	δ	γ_6	φ_6	cos ε	q_6	η_6	s_6	$1 : \sin\nu \cdot \sin\gamma_6$	l_6
				0,	0,	0,	0,		0,
10^0	23^0	-14^0	$2^0\ 15'$		000		000		000
									0,077
	30	0	0.00	151	175	369	010	∞	$\triangle\nu$
	40	20	3.28	133	160	318	007	16,8	118
	50	40	6.48	112	092	254	003	8,95	027
	60	60	9.58	087	025	178	000	6,65	000
	62	64	11.15		000		000		000
20^0	18	336	11.26						000
	20	340	6.48	326	152	738	032	8,54	274
	30	0	0.00	297	000	696	000	∞	840
$8^0\ 6'$	30	0	0.00	122	000	288	000	∞	109
			10.00						000
$3^0\ 11'$			5.30		000		000		000

100. Die Gestalt der Kurven (φ_6, l_6) in der Nähe von $\varphi_6 = 0$.

Der Bogen heller Punkte auf dem Kreise $S\ P\ T$ (Fig. 20) erstreckt sich (s. Fig. 39a) bei $\nu = 90^0$ von dem Punkte bei $\varphi_6 = 34^0\ 36'$, den wir den vorderen nennen wollen, bis zu dem hinteren bei $\varphi_6 = 60^0$. Bei abnehmendem ν nähern sich beide Grenzpunkte dem Sonnenpunkt S ($\varphi_6 = 0$); und es erreicht, wie wir sehen werden, der vordere Punkt den Punkt S bei $\nu = 20^0\ 13'$. Dann schiebt sich der helle Bogen über S hinaus, und etwa bei $\nu = 14^0$ sind die vor und hinter S liegenden Bogen gleich geworden. Hierauf erreicht bei $\nu = 8^0\ 6'$ der hintere Grenzpunkt den Punkt S, sodann liegt der helle Bogen ganz jenseits S, wird kleiner und verschwindet endlich bei $\nu = 3^0\ 11'$ und $\varphi_6 = 5^0\ 30'$. Fig. 39.

Liefern wir zuerst den Nachweis der hier angegebenen Zahlen. Wenn $\varphi_6 = 0$ werden soll, dann ist, so lange ν nicht Null, nach Gl. (52) $\gamma_6 = 0$, und dann nach obiger Gl. (S. 184) $\delta = 30^0$. Bei $\delta = 30^0$ kann also das Büschel 6, welches durch die beiden inneren Strahlen a und b (Fig. 38) begrenzt ist, bei veränderlichem ν zwischen gewissen Grenzwerthen von ν auftreten. Bei abnehmendem ν bewegen sich die Schnittpunkte von a und b mit I von dem Eckpunkte A ausgehend gegen den Eckpunkt B. Der erste Grenzpunkt des Büschels 6 für $\delta = 30^0$ wird erreicht, wenn a und b beide von A ausgehen, also noch zusammenfallen. Dann muss der innere Strahl a' verschwinden, also a'' ebenfalls nach A laufen; und da die Strahlen a'' und a''' gleiche Winkel mit V bilden und a''' von D ausgeht, müssen (Fig. 40) die Dreiecke AFG und DEG kongruent, folglich G der Mittelpunkt von V sein.

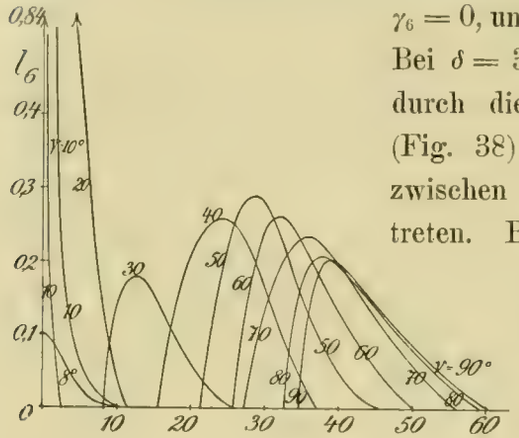


Fig. 39a.

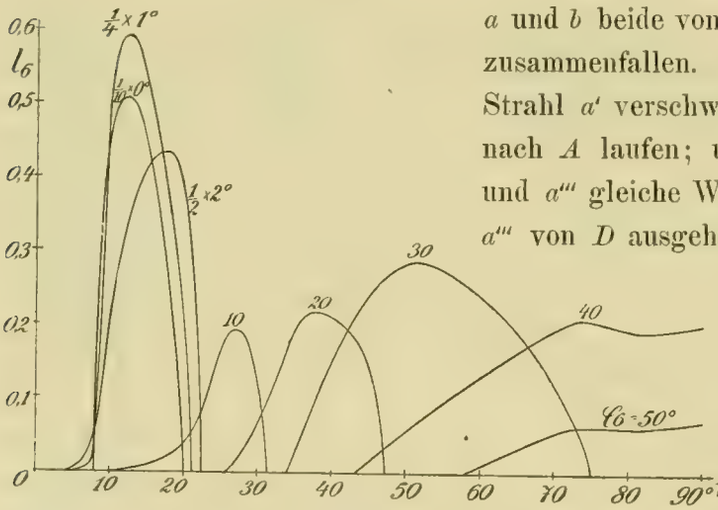


Fig. 39b.

Der andere Grenzpunkt wird erreicht, wenn der innere Strahl b durch C geht und bei weiterer Verschiebung die III nicht mehr trifft (Fig. 41). Es ist dies der Strahl, welcher als b^{V} von B ausläuft und durch b^{IV}, b''', b'', b' in b übergeht, denn jeder dieser Strahlen bildet mit den zwei Sechseckseiten, in denen er endet, ein Dreieck, und alle diese Dreiecke sind ähnlich; denn sie

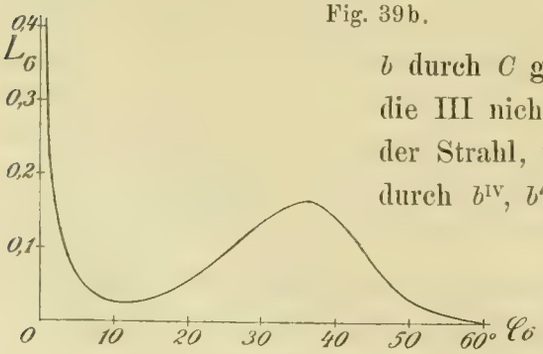


Fig. 39c.

besitzen alle einen Winkel von 120° und je zwei in einer Ecke zusammenstossenden haben nach dem Reflexionsgesetze an dieser Ecke gleiche Winkel. Daher sind in jenen Dreiecken die Winkel der Seiten b^{V}II, b^{IV}IV, b'''IV, b''VI, b'VI, bII einander gleich; also liegen die von b^{V} und b gebildeten

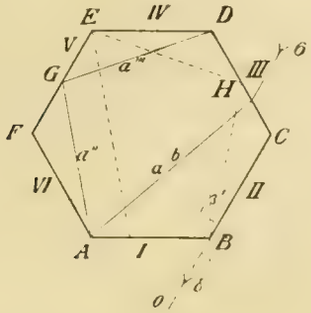


Fig. 40.

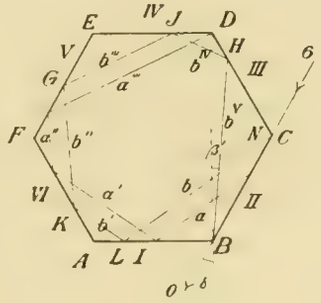


Fig. 41

(kongruenten) Dreiecke, daher auch b^{V} und b selbst, symmetrisch gegen den auf II senkrechten Durchmesser des Sechsecks; dasselbe gilt dann auch von b^{IV} und b', sowie von b''' und b'', oder deren Schnittpunkt G liegt in der Mitte von V.

Bestimmen wir nun für beide Fälle n' und v. In beiden Figuren ist in dem $\triangle BCH$ Fig. 40 u. 41.

$$\sphericalangle C = 120^0,\ \sphericalangle B = 30^0 - \beta',\ \text{also}\ \sphericalangle H = 30^0 + \beta',$$

daher, wenn $BC = 1$,

$$CH = m = \frac{\sin(30^0 - \beta')}{\sin(30^0 + \beta')}.$$

Daraus folgt durch Entwicklung der Sinus

$$m\left(\frac{1}{2}\cos\beta' + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta'\right) = \frac{1}{2}\cos\beta' - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta',$$

oder nach Theilung durch $\cos\beta'$

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{1-m}{(1+m)\sqrt{3}}.$$

Im ersten Falle (Fig. 40) liegt aber H in der Mitte von III, weil BHE ein Strahlenzug, oder es ist $m = \frac{1}{2}$; daher ist $\operatorname{tg}\beta' = 1 : 3\sqrt{3}$, $\beta' = 10^0\,54'$. Daraus folgt

$$n' = \sin\delta : \sin\beta' = \sin 30^0 : \sin\beta' = 2{,}646$$

und daraus nach Gl. 42 $v = 20^0\,13'$.

Im zweiten Falle (Fig. 41) ist $EG = \frac{1}{2}$ und $CH = m$, daher $HD = 1-m$, und dann wegen der bezeichneten Aehnlichkeit jener Dreiecke,

$$DJ = \frac{HD}{m} = \frac{1-m}{m},$$

$$JE = 1 - DJ = \frac{2m-1}{m},$$

$$EG = m \,.\, JE = 2m-1 = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{3}{4}.$$

Fährt man, wegen einer später zu machenden Folgerung, mit diesen Bestimmungen noch fort, so erhält man

$$GF = 1-(2m-1) = 2-2m,$$

$$FK = \frac{1}{m}(2-2m); \qquad KA = 1-FK = \frac{3m-2}{m},$$

$$AL = m \,.\, KA = 3m-2, \qquad LB = 1-AL = 3-3m,$$

und wenn N der Schnittpunkt von b mit II

$$BN = \frac{1}{m} LB = \frac{3-3m}{m}.$$

Da nun N in C fallen, d. i. $BN = 1$ sein soll, so ergiebt sich

$$\frac{3-3m}{m} = 1, \; m = \frac{3}{4},$$

wie vorhin.

Daraus folgt, entsprechend wie oben,

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{1}{7\sqrt{3}}, \qquad \beta' = 4^0\ 43',$$

$$n' = 6{,}083, \qquad \nu = 8^0\ 6'.$$

Zwischen diesen beiden Werthen von ν ($20^0\ 13'$ und $8^0\ 6'$), nahe bei ihrem mittleren Werthe $\nu = 14^0$, mag S in der Mitte des hellen Bogens liegen.

Um noch den kleinsten Werth von ν zu bestimmen, für welchen noch das Büschel 6 auftritt, beachten wir, dass der eben gefundene Grenzwerth $\beta' = 4^0\ 43'$ unabhängig von δ, n' und ν ist, und immer stattfindet, wenn der Strahl b durch C geht (Fig. 41) und dass dadurch die eine Grenze des Büschels 6 bestimmt ist, wenn der helle Bogen des Kreises TPS ganz auf der hinteren Seite liegt. Dieser Bogen und das Büschel 6 verschwindet für den kleinsten Werth von ν, bei welchem noch $\beta' = 4^0\ 43'$ ist, und dazu gehört ein grösster Werth von n'. Es ist aber $n' = \sin \delta : \sin \beta'$. Dieser Werth hat bei jenem unveränderlichen Werthe von β' den grössten Werth

für den grössten Werth von $\sin \delta$, d. i. für $\delta = 90^0$. Dafür erhalten wir $n' = 15{,}316$ und dafür $\nu = 3^0\ 11'$, und dann nach Gl. (52) $\varphi_6 = 5^0\ 30'$ wie oben angegeben wurde.

101. Die Kurven (φ_6, l_6) für $\nu = 20^0\ 13'$ und $\nu = 8^0\ 6'$. Unter- Fig. 39a. suchen wir nun zunächst die Kurven (φ_6, l_6) für die Werthe des ν von $20^0\ 13'$ und $8^0\ 6'$. Dieselben enthalten Punkte der l_6-Axe; und gerade diese Punkte, welche Schwierigkeiten bereiten, wollen wir zuerst bestimmen. Die Grenze $\nu = 20^0\ 13'$ dürfen wir entsprechend dem Grade der hier herrschenden Genauigkeit auch durch $\nu = 20^0$ ersetzen, wenn wir dadurch unsere Tabelle 41 benutzen können. In der Formel

$$l_6 = \frac{s_6}{\sin \nu \sin \gamma_6} = \frac{\cos \varepsilon \,.\, q_6 \eta_6}{\sin \nu \sin \gamma_6}$$

wird nun für $\varphi_6 = 0$ auch $\gamma_6 = 0$, daher der Nenner von l_6 zu Null. Bei jenem Grenzwerthe von ν ist aber zugleich $q_6 = 0$, daher wird auch der Zähler von $l_6 = 0$ und l_6 wird $0 : 0$ oder unbestimmt. Es rührt dies daher, dass der helle Bogen auf dem Kreise $S\,P\,T$ (Fig. 20) bis S reicht, daher wird mit φ_6 auch γ_6 und das Bereich b der Punkte Null; die Helligkeit l_6 würde dann nach der obigen Formel $= \infty$ sein, wenn nicht zugleich die Lichtmenge der Punkte mit q_6 Null würde. Dieselbe Erscheinung ist früher bei dem Büschel 1 vorgekommen, wofür wir dann den bestimmten Werth $l_1 = 0{,}5$ ableiteten.

In unserem Falle ist der bestimmte Werth

$$l_6 = \frac{d\, s_6}{d\,(\sin \nu \sin \gamma_6)} = \frac{d\,(\cos \,.\, \varepsilon\, q_6 \eta_6)}{d\,(\sin \nu \sin \gamma_6)},$$

wobei wir alle Grössen, welche nicht Null werden, also alle ausser q_6 und γ_6, innerhalb des kleinen zu betrachtenden Bereiches als beständig annehmen dürfen. Wir erhalten aber, da $\gamma_6 = 0$, $\nu = 20^0$,

$$d\,(\sin \nu \sin \gamma_6) = \sin \nu \cos \gamma_6\, d\gamma_6 = \sin \nu\, d\,\gamma_6 = 0{,}342\, d\,\gamma_6.$$

Andrerseits ist $d\,s = \cos \varepsilon \,.\, \eta\, dq$, wenn wir bei dieser Rechnung die Zeiger 6 weglassen. Zu einer Aenderung des γ um $d\gamma$ gehört eine Aenderung des δ um $d\delta$, des β' um $d\beta'$, des m um dm, des BN (Fig. 41) um dBN, und des q um dq. Wir bestimmen dieselben durch Differentiation der obigen Ausdrücke von γ_6 (für δ), von β' (für δ), von m (für β'), von BN, und erhalten

$$d\delta = \frac{1}{2}\, d\gamma, \qquad d\beta' = \frac{1}{n'}\,\frac{\cos\delta}{\cos\beta'}\, d\delta,$$

$$dm = d\beta'\,\frac{\sin(30^0+\beta')\cos(30^0-\beta') - \sin(30^0-\beta')\cos(30^0+\beta')}{\sin^2(30^0+\beta')}$$

$$= -d\beta'\,\frac{\sin 60^0}{\sin^2(30^0+\beta')},$$

$$d\,BN = dm\,\frac{-3\,m-(3-3\,m)}{m^2} = -\frac{3}{m^2}\,dm\ .$$

Endlich folgt aus dem Dreiecke (Fig. 41), welches II, III und eine parallel zu b nahe an C vorbei geführte Gerade bilden, und in welchem die Winkel, die diesen Seiten gegenüberliegen $(90^0+\beta')$, $(30^0-\beta')$, 60^0 und die Seiten auf II und III bezw. $d\,B\,N$, $d\,q$ sind (letzteres, weil b mit III denselben Winkel wie b^V mit I bildet, so dass man q oder $d\,q$ unmittelbar auf III messen kann),

$$dq = d\,BN\,\frac{\sin(30^0-\beta')}{\sin(90^0+\beta')} = d\,BN\,\frac{\sin(30^0-\beta')}{\cos\beta'}.$$

Führt man in diesen Gleichungen zunächst diejenigen Werthe ein, welche zu $\nu = 20^0\ 13'$ gehören, nämlich

$$\delta = 30^0,\ \beta' = 10^0\ 54',\ n' = 2{,}646,\ m = 0{,}5,\ \cos\varepsilon = 0{,}297,\ \eta = 0{,}696,$$

letztere beide nach Tab. 41 für $\nu = 20^0$, so erhält man

$$d\beta' = \frac{1}{2{,}646}\ \frac{0{,}866}{0{,}982}\ \frac{1}{2}\, d\gamma = 0{,}167\ d\gamma,$$

$$dm = -0{,}167\ d\gamma\ \frac{0{,}866}{0{,}655^2} = -0{,}348\ d\gamma,$$

$$d\,BN = -12\ dm = 4{,}18\ d\gamma,$$

$$dq = 4{,}18\ d\gamma\ \frac{0{,}3272}{0{,}982} = 1{,}394\ d\gamma,$$

$$ds_6 = 0{,}297\ .\ 0{,}696\ .\ 1{,}394\ d\gamma_6 = 0{,}2878\ d\gamma_6.$$

Dadurch wird

$$l_6 = \frac{0{,}2878}{0{,}342} = 0{,}840.$$

Hiernach ist die Kurve $\nu = 20^0$ in Fig. 39a eingezeichnet. Die von einer parabelartigen Kurve und der φ_6-Axe begrenzte Fläche der Kurve $\nu = 30^0$ ist hier in ein Dreieck übergegangen, das von der φ_6-Axe, der l_6-Axe und der Kurve $\nu = 20^0$ begrenzt wird. Indem ν von 30^0 an weiter abnimmt, nähert sich der eine Fusspunkt der Kurve (auf der φ_6-Axe) dem Ursprungspunkte; der von hier ausgehende Kurvenzweig wird immer steiler, bis er bei $\nu = 20^0\ 13'$ die l_6-Axe überschreitet. Die Kurve nimmt dann

ein Stück dieser Axe in sich auf, verlässt sie bei $l_6 = 0{,}840$, um dann bei $\varphi_6 = 11^0\ 26'$ (s. in Tab. 41 bei $\nu = 20^0$) auf der φ_6-Axe zu endigen.

Sodann muss man in obigen Formeln die Werthe einführen, welche zu $\nu = 8^0\ 6'$ gehören. Von diesen sind ausser $\delta = 30^0$ schon bestimmt $\beta' = 4^0\ 43'$, $n' = 6{,}083$ und $m = 0{,}75$. Ferner ist nach Gl. 51

$$\cos\varepsilon = \cos\delta \sin\nu = 0{,}866 \,.\, 0{,}1409 = 0{,}1223,\ \varepsilon = 82^0\ 58',\ \eta = (1-\alpha)^2,$$

und mit Hilfe der Tab. 27, $\eta = 0{,}537^2 = 0{,}288$. Damit erhält man in obiger Weise

$$d(\sin\nu \sin\gamma) = 0{,}1409\, d\gamma,\ ds = 0{,}01544\, d\gamma,$$

$$l_6 = \frac{0{,}01544}{0{,}1409} = 0{,}1094.$$

Die Kurve $\nu = 8^0\ 6'$ schliesst wieder einen Theil der l_6-Axe in sich, verlässt dieselbe bei $l_6 = 0{,}1094$ und dürfte nach einer schätzungsweisen Einschaltung etwa bei $\varphi_6 = 10^0$ die φ_6-Axe treffen. Bei einer Abnahme der ν unter $8^0\ 6'$ nähern sich die beiden Fusspunkte der Kurve; diese schrumpft zusammen und wird zu einem Punkte auf der φ_6-Axe bei $\varphi_6 = 5^0\ 30'$, wie wir gesehen haben.

102. Die Kurven (φ_6, l_6) für $\nu = 10^0$. Verfolgen wir nun den Verlauf der Kurve (φ_6, l_6), den wir vorhin übergangen haben, zwischen den Grenzen $\nu = 20^0\ 13'$ und $\nu = 8^0\ 6'$, und fassen die Kurve für $\nu = 10^0$ ins Auge. Für sie sind in der Tab. 41 die Werthe von

$$\delta,\ \gamma_6,\ \varphi_6,\ \cos\varepsilon,\ q_6,\ \eta_6,\ s_6,\ 1 : \sin\nu \sin\gamma_6,\ l_6$$

niedergelegt, zu deren Bestimmung die für dieses Büschel angegebenen Formeln benutzt wurden. Zwischen den aus den Zeichnungen ermittelten Grenzwerthen des δ von 23 und 62°, bei welchen das Büschel noch auftritt, liegt der Werth $\delta = 30^0$, für welchen $\gamma_6 = 0$ (und $\varphi_6 = 0$), daher nach der Formel $l_6 = \infty$ wird. Die hiernach gebildete Kurve $\nu = 10^0$ besteht Fig. 39a. aus zwei Zweigen, die auf der φ_6-Axe bei den zu jenen Grenzwerthen von δ gehörigen Werthen von φ_6, nämlich bei $2^0\ 15'$ und $11^0\ 15'$ aufstehen und sich der Formel nach der φ_6-Axe asymptotisch anschmiegen würden. In Wahrheit kann aber eine hierdurch angezeigte unendlich grosse Helligkeit nicht eintreten und wir wollen die wahre Helligkeit bestimmen.

Betrachten wir zu dem Ende ein kleines Bereich bei dem Sonnenpunkte S, so ist hier $\varphi_6 = 0$, $\gamma_6 = 0$, $\delta = 30^0$; s_6 und die Lichtmenge eines

hellen Punktes eines Sonnenbildchens in diesem Bereiche hat einen endlichen Werth und ist als unveränderlich anzusehen. Diese Lichtmenge beträgt

$$Lf\, s_6 = Lf \cos\varepsilon \,.\, q_6\, \eta_6 \,.$$

Fig. 20. Für den Abstand solcher benachbarten auf dem Kreise $S\,P\,T$ liegenden Punkte gilt daher nach der Gleichung für γ_6, $\triangle \gamma_6 = 2 \triangle \delta = 2 \triangle \nu$; ferner ist nach Gl. 55, da $\varphi_6 = \gamma_6 = 0$,

$$\triangle \varphi_6 = \sin \nu \triangle \gamma_6 = 2 \sin \nu \triangle \nu.$$

Reiht man nun auf dem Kreise $S\,P\,T$ die hellen Punkte beiderseits von S in den Abständen $\triangle \varphi_6$ derart aneinander, dass ihre Abstände von S für die beiderseits nächsten Punkte $= \frac{1}{2} \triangle \varphi_6$, für die folgenden $= \frac{3}{2} \triangle \varphi_6$, dann $\frac{5}{2} \triangle \varphi_6, \ldots \frac{m}{2} \triangle \varphi_6$ sind, so befinden sich auf dem von zwei gegenüberstehenden Punkten um S beschriebenen Parallelkreise $(2\pi \sin \nu : \triangle \nu)$-mal zwei Punkte, deren Lichtmenge daher $2\, Lf\, s_6 \,.\, 2\pi \sin \nu : \triangle \nu$ beträgt. Das Bereich oder die Fläche eines um S gezogenen Ringes, dessen mittlerer Kreis jener Parallelkreis vom Halbmesser $\frac{m}{2} \triangle \varphi_6$ und dessen Breite $\triangle \varphi_6$ ist, wobei der kleinste Ring einen Vollkreis bildet, ist aber

$$= \triangle \varphi_6\, 2\pi \frac{m}{2} \triangle \varphi_6 = \pi\, m \triangle \varphi_6{}^2 = \pi\, m\, 4 \sin^2 \nu \triangle \nu^2,$$

und daraus ergiebt sich die Helligkeit eines Ringes

$$h_6 = 2\, Lf\, s_6 \frac{2\pi \sin \nu}{\triangle \nu} : \pi\, m\, 4 \sin^2 \nu \triangle \nu^2$$

$$= \frac{Lf}{\triangle \nu^3} \frac{s_6}{\sin \nu} \frac{1}{m},$$

und

$$l_6 = h_6 : \frac{Lf}{\triangle \nu^2} = \frac{s_6}{\sin \nu} \frac{1}{m \triangle \nu}.$$

Die Helligkeit ist also umgekehrt proportional mit dem Abstande $m \triangle \nu$ von S. Die Werthe von m sind der Reihe nach 1, 3, 5 . . . ., und diese durch sie bezeichneten Punkte der Kurve (φ_6, l_6) liegen nach der letzten Gleichung in der Nähe der l_6-Axe, soweit man s_6 und $\sin \nu$ als beständig ansehen darf, auf einer Hyperbel. Nach unserer Annahme der Ringe würde an der Grenze zweier benachbarten Ringe die Helligkeit sich sprungweise ändern; dies ist offenbar in Wirklichkeit nicht der Fall, sondern es kann die berechnete Helligkeit nur als in der Mitte der Ringe, also in den durch $m = 1$, $m = 3$, . . . bezeichneten Kreisen geltend angesehen werden.

Den stetigen Uebergang und Abschluss der Kurve gegen die l_6-Axe stellen wir wohl am sachgemässesten durch die gerade Linie her, welche die Punkte derselben für $m = 1$ und $m = 3$ verbindet, und daher die l_6-Axe im Punkte schneidet

$$l_6 = \frac{4}{3} \frac{s_6}{\sin v} \frac{1}{\triangle v} = \frac{4}{3} a .$$

Denn für $m = 1$ ist $l_6 = s_6 : \sin v \triangle v = a$, für $m = 3$, $l_6 = \frac{1}{3} a$, woraus für $\varphi_6 = 0$ (dem $m = 0$ entsprechen würde) $l_6 = \frac{4}{3} a$ folgt. In unserem Falle ist $v = 10°$, $s_6 = 0{,}010$ (Tab. 41), daher $a = 0{,}0577 : \triangle v$, und für $\varphi_6 = 0$, $l_6 = 0{,}077 : \triangle v$. Wir werden später erst für $\triangle v$ Zahlen gewinnen; setzen wir beispielsweise, um einen Anhalt für unsere Figur zu erhalten, $\triangle v = 1° = 0{,}01745$, so wird $l_6 = 4{,}42$.

Die Helligkeiten l_6 für $\varphi_6 = 0$ sind bei kleinem $\triangle v$ offenbar sehr gross im Vergleich zu denen bei anderen Büscheln, weil l_6 im Nenner ein $\triangle v$ hat. Von diesem Büschel wird das Glitzern des klaren Nachthimmels neben dem Monde herrühren.

103. Die Helligkeitskurve für das Lichtbüschel 6. Aus den Kurven (φ_6, l_6) mit unveränderlichem v in a) können wir nun die Kurven (v, l_6) mit unveränderlichem φ_6 in b) wie früher bilden, indem wir aus a) für ein unveränderliches φ_6 die l_6 der verschiedenen v in b) übertragen. Dabei wurden die l_6 für $\varphi_6 = 2°$ in $^1/_2$, die für $\varphi_6 = 1°$ in $^1/_4$ ihrer berechneten Zahlenwerthe übertragen. Auch für $\varphi_6 = 0$ wurden in b, die l_6 eingetragen, und zwar in $^1/_{10}$ Maassstab, wobei für $\varphi_6 = 20°\ 13'$, $l_6 = 0{,}840$, für $\varphi_6 = 8°\ 6'$, $l_6 = 0{,}1094$, und für $\varphi_6 = 10°$, unter Annahme des $\triangle v = 1° = 0{,}01745$, $l_6 = 4{,}42$. Aus den Kurven φ_6 in b) bildet man Fig. 39.

$$H_6 = \frac{Lf}{\triangle v^2} \Sigma_v l_6 ,$$

indem man die Flächen F der Kurven bestimmt, wobei man die φ_6 nach Graden zählt, und beachtet, dass $0{,}01745 : \triangle v$ Theile auf $1°$ gehen.

Es ist dann

$$H_6 = \frac{Lf}{\triangle v^2} \frac{F \cdot 0{,}01745}{\triangle v} = \frac{Lf}{\triangle v^3} L_6 .$$

Fig. 39c Tab. 42. Die Werthe von L_6 sind in Fig. 39c und in Tab. 42 eingetragen.

Tabelle 42.

Verhältnissmässige Helligkeit L_6 des 6. Lichtbüschels der Eiskryställchen im Sonnenabstande φ_6.

φ_6	0^0	1^0	2	10	20	30	40	50	60
L_6	$\frac{0{,}0148}{\triangle \nu}$ (= 0,807)	0,395	164	029	052	137	144	029	000

Fig. 42. **104. Das Lichtbüschel 7.** Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III reflektirt werden und aus V austreten. Diese Strahlen unterscheiden sich als 7' und 7''; 7' sollen sie heissen, wenn an III eine totale Reflexion eintritt, 7'', wenn bei III ein Theil der Strahlen als das früher betrachtete Büschel 3 austritt, wenn also hier eine Lichtschwächung stattfindet. Wegen der Symmetrie gegen die Einfallsnormale auf III sind die Einfallswinkel $\varepsilon' = \delta$, β' bei I und bei V die gleichen, so dass q_7 an V gemessen werden kann; bei III sind die Einfallswinkel β'', ε''. Es

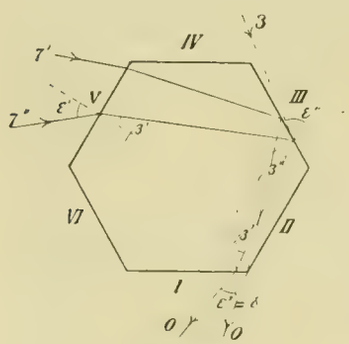


Fig. 42.

ist aber

$$\sin \beta' = \frac{1}{n} \sin \varepsilon', \qquad \beta'' = 60^0 - \beta', \qquad \sin \varepsilon'' = n \sin \beta'' .$$

Daraus ergiebt sich die Lichtschwächung für 7' und 7''

$$\eta_{7'} = (1-\alpha)^2, \qquad \eta_{7''} = (1-\alpha)^2 \, \alpha_1 ,$$

wobei α und α_1 aus Tab. 27 entnommen werden als zugehörig zu denjenigen äusseren Einfallswinkeln ε, welche nach Gl. 51 aus ε' (= δ) und ε'' berechnet werden, vermittelst

$$\cos \varepsilon = \cos \varepsilon' \sin \nu, \qquad \text{bezw. } = \cos \varepsilon'' \sin \nu .$$

Es ist sodann die Ablenkung von 7 gegen 0

$$\gamma_7 = 60^0 + 2\,\delta,$$

woraus

$$\triangle \gamma_7 = 2 \triangle \delta.$$

Es tritt daher der Fall der Gl. (53') ein und es wird b_7 nach Gl. (57') und dann l_7 nach (46), φ_7 aber, wie immer, nach (52) berechnet.

Die Ergebnisse dieser Rechnung für $\nu = 40^0$ sind in Tab. 43 niedergelegt. Es beginnt hier das Büschel 7' bei $\delta = 18^0\ 00'$; denn da nach der Zeichnung $q_7 = 0{,}052$, bezw. 0,335 für $\delta = 20^0$, bezw. 30^0, so wird bei pro- Tab. 43.

Tabelle 43.

Berechnung des l_7 für das 7. Lichtbüschel.

ν	δ	γ_7	φ_7	$\cos\varepsilon$	q_7	η_7	s_7	$1:\sin\nu \cdot \sin\gamma_7$	l_7
				0,	0,	0,	0,		0,
40°	18°00	96°00	57°12'		000				000
	20	100	58.56	611	052	930	030	1,58	047
	30	120	67.32	557	335	920	171	1,80	308
	38°35'	137.11	73.48						
	40	140	74.18	492	614	553	168	2,42	405
	50	160	78.28	415	862	130	466	4,55	212
	60	180	80.00	321	882	078	021	∞	∞
	70	200	78.28	219	666	036	005	4,55	024
	80	220	74.18	112	570	015	001	2,42	002
	90	240	67.32	000					000

portionaler Aenderung $q_7 = 0$ für $\delta = 18^0\ 00'$. Die Grenze zwischen 7' und 7'' findet man in ähnlicher Weise bei $\delta = 38^0\ 35'$, wozu $\varphi_7 = 73^0\ 48'$ gehört. Es gehen aber hier beide Büschel stetig in einander über. Das Büschel 7'' schliesst bei $\delta = 90^0$, indem dann der Einfallswinkel $\varepsilon = 90^0$, daher $\cos\varepsilon = 0$ wird. Dazwischen erhält man die Lichtstärke $l_7 = \infty$ für $\sin\gamma_7 = 0$, was für $\gamma_7 = 180^0$ eintritt, wobei nach der obigen Formel

$$\delta = \frac{1}{2}(\gamma_7 - 60) = 60^0.$$

Nach Tab. 43 ist die Kurve (l_7, φ_7) für $\nu = 40^0$ in die Figur 43a) eingezeichnet. Sie besteht aus zwei Aesten, welche die Ordinatenlinie bei $\varphi_7 = 80^0$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, und wovon die eine bei $\varphi_7 = 57^0\ 12'$ auf der φ_7-Axe beginnt, die andere bei $\varphi_7 = 67^0\ 32'$ auf derselben endet. Der Kurvenast, welcher die Grenze der Büschel 7' und 7'' Tab. 43. Fig. 43 a.

enthält, ist der ausgedehntere. Nahe bei der Grenze ($\varphi_7 = 73^0\ 48'$) findet ein rasches Abfallen des Kurventheiles l''_7 statt.

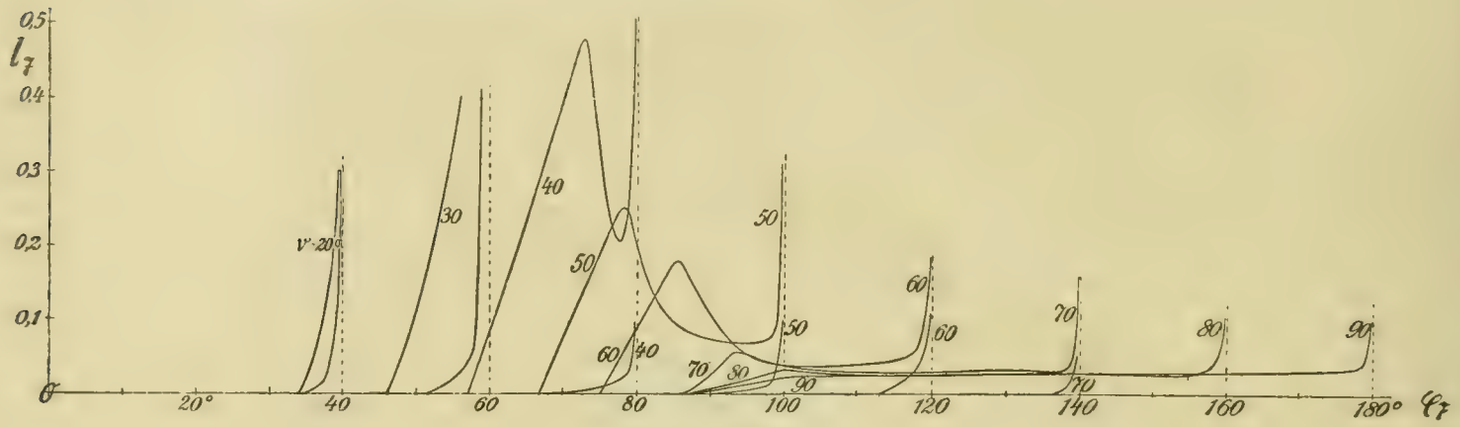


Fig. 43a.

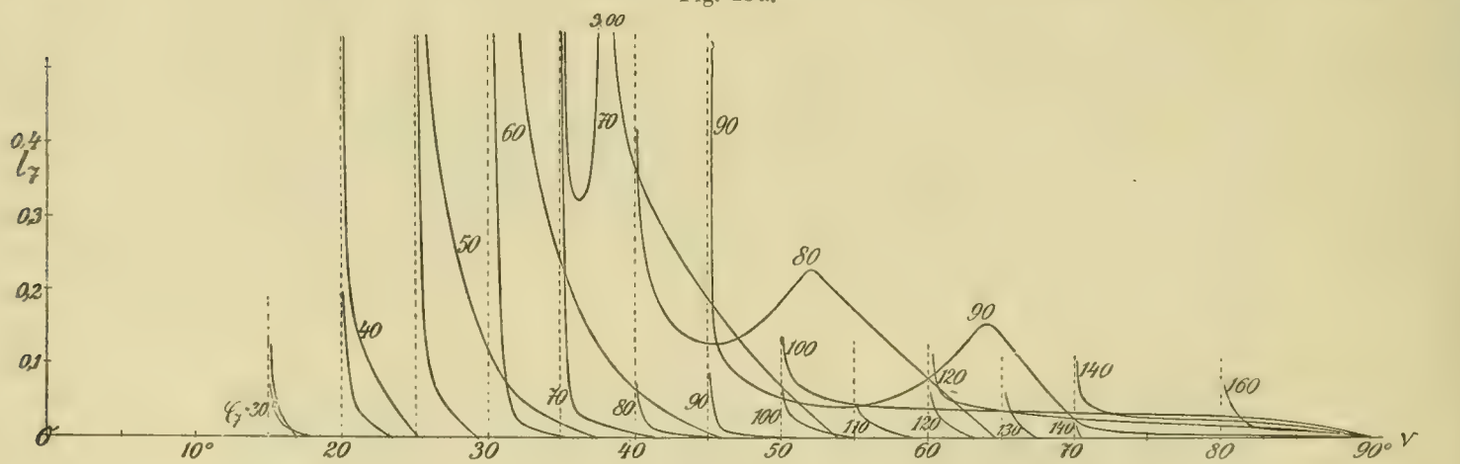


Fig. 43b.

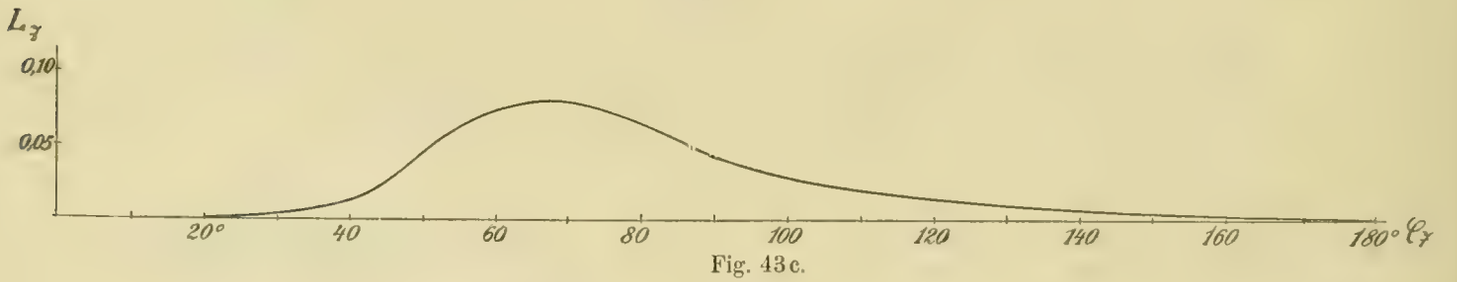


Fig. 43c.

Fig. 43 Aus Figur *a*) der Kurven (l_7, φ_7) mit beständigem v ist die Fig. *b*) der Kurven (l_7, v) mit beständigem φ_7 in derselben Weise, wie bei Büschel 5 (S. 182, Fig. 37) konstruirt. Von diesen Kurven wurden die Flächen F,

wie bei Büschel 5 durch das Amsler'sche Planimeter bestimmt, und die Streifen bei der Asymptote wie bei den Büscheln 1 und 5 behandelt. Hieraus erhielt man L_7 nach Gl. (59) in Stufen des φ_7 von 10 zu 10°, und hieraus nach derselben Gl.

$$H_7 = \frac{Lf}{\triangle \nu^3} L_7 .$$

Die Werthe von L_7 sind in Fig. 43c) und in Tab. 44 eingetragen. Fig. 43 c. Tab. 44.

Tabelle 44.

L_7 für das Lichtbüschel 7 der Eiskryställchen.

φ_7	20°	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	160	180
L_7	0,0000	0021	0115	0467	0777	0817	0651	0430	0278	0202	0157	0125	0094	0032	0000

105. Das Lichtbüschel 8. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I ins Innere treten, an II total reflektirt werden und durch III wieder austreten. Die äusseren Ein- und Ausfallswinkel bei I und III sind untereinander gleich ($\varepsilon' = \delta$), daher ist die Lichtschwächung Fig. 44.

$$\eta_8 = (1-\alpha)^2,$$

wobei α als zu $\varepsilon' = \delta$ gehörig aus Tab. 27 entnommen wird. Die Ablenkung ist

$$\gamma_8 = 2\,\delta - 60^0,$$

woraus

$$\triangle \gamma_8 = 2 \triangle \delta .$$

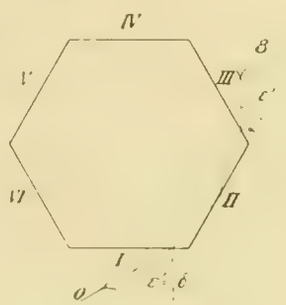


Fig. 44.

Es tritt daher auch hier der Fall der Gl. (53') ein und die Berechnung erfolgt wie bei dem vorhergehenden Büschel. In Fig. 45 sind in *a*) die Kurven ν oder (l_8, φ_8), in *b*) die φ_8 oder (l_8, ν) eingetragen, aus welchen durch Flächenbestimmung die Werthe von L_8 von 10 zu 10° der φ_8 bestimmt und in Tab. 45 (S. 199) eingetragen sowie zur Verzeichnung der Kurve *c*) benutzt wurden. Die vorhandenen Unstetigkeiten im Uebergang der Kurven *a*) hätten ausgeglichen werden können, wurden aber als Mass der Ungenauigkeit stehen gelassen. Sie entspringen wohl hauptsächlich aus der Beschränkung der Rechnung auf drei Werthstellen. Erst bei der Kurve *c*) ist eine Ausgleichung, wenn nothwendig, gerechtfertigt. Es folgt aus L_8 Fig. 45. Tab. 45.

$$H_8 = \frac{Lf}{\triangle \nu^3} L_8 .$$

106. Berücksichtigung der Beugung bei diesem Büschel.

Nicht nur das dritte Lichtbüschel, welches bei grösseren Eiskrystallen im Sonnenabstand von 22° den hellen Ring erzeugt, wird durch kleine Kryställchen zerstreut und verwaschen, sondern alle. Wir haben dies aber bei den anderen nicht durchgeführt, weil sie geringe Lichtmengen enthalten

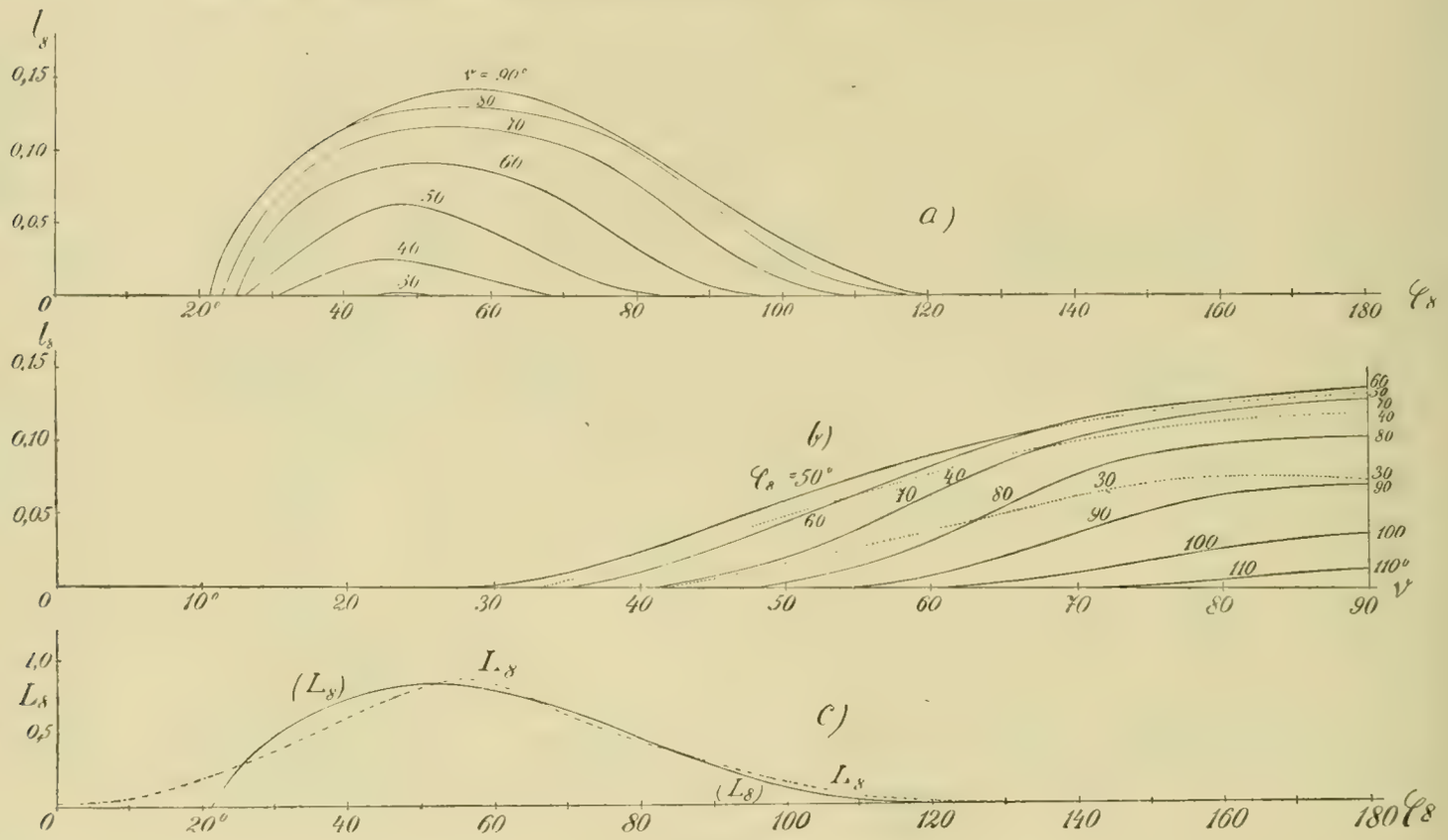


Fig. 45. [1])

und weil sie schon ohne die Beugung allmählich abnehmen und zu Null werden. Das jetzt betrachtete achte Lichtbüschel ist aber stark und fällt nach der Sonnenseite rasch ab, so dass seine Veränderung durch Beugung

[1]) In dieser wie in einigen folgenden Figuren sind bei a) die Kurven der ν in Ebenen gedacht, die in gleichen Abständen hinter einander liegen, so dass sie eine räumliche Fläche vorstellen. Dieselbe Fläche ist dann unter b) in einer zur vorigen senkrechten Richtung betrachtet. Kurventheile, die dabei durch andere zugedeckt werden, sind punktirt gezeichnet. [Die Herausgeber.]

Tabelle 45.

L_S für das Lichtbüschel 8 der Eiskryställchen.

φ_S	21°13′	22°	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
L_S	0,000	060	135	210	273	330	377	420	460	497	530	561	590	618	645	670	694
φ_S	38°	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
L_S	0,718	741	759	778	797	812	825	836	842	847	852	855	858	859	860	859	858
φ_S	55°	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
L_S	0,855	848	839	829	818	806	794	781	768	755	741	727	712	697	681	664	647
φ_S	72°	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
L_S	0,629	611	593	574	555	535	515	495	474	452	430	408	386	364	342	321	300
φ_S	89°	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
L_S	0,279	258	238	218	199	181	164	148	134	121	109	098	087	077	067	058	050
φ_S	106°	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120		
L_S	0,043	037	031	026	021	016	912	009	007	005	004	003	002	001	000		

eine sehr merkliche ist. Wir wollen daher diese in der Weise wie bei dem dritten aber in abgekürzter Form bestimmen.

Zu dem Ende wurde die hervorgebrachte Helligkeit in drei Theile zerlegt, nämlich von $\varphi_S = 21° 13'$ bis 43°, von 43° bis 70° und von 70° bis 120°, und auf Grund der Tab. 45 für jeden Theil $\Sigma L_S \sin \varphi_S$ bestimmt und gefunden $\Sigma' = 6{,}392$, $\Sigma'' = 17{,}857$, $\Sigma''' = 11{,}405$. Die Schwerpunkte dieser Theile liegen etwa bei 35°, 57° und 80°, und in diesen wurde die Lichtmenge jeden Theiles vereinigt gedacht. Der Abstand jedes dieser Punkte von der Sonne ist so gross, dass die Wirkung der Zerstreuung über die Sonne hinaus als unerheblich unberücksichtigt bleiben kann. Es wurde zunächst, wie bei dem zweiten Theil des dritten Lichtbüschels, eine Ablenkung $\psi = 25°$ für $\xi = \pi$ angenommen, und die Zerstreuung bis $\xi = 1{,}4\pi$, $\psi = 36{,}4°$ beachtet. Dadurch ergab sich eine Tabelle der Lichtstärken J des gebeugten Lichtes, von welcher nur einige Zahlen angegeben werden mögen (vgl. S. 173):

$\frac{\xi}{\pi}$	0	0,5	1,0	1,4
ψ	0°	12,2	25,0	36,4
J	0,833	0,429	0,064	0,024.

Diese Tabelle wurde von Grad zu Grad gebildet, wobei sich auch die folgenden Werthe ergeben:

ψ	0^0	1	2	10	20	25	37
J	0,833	827	815	528	148	064	024.

Diese Tabelle wurde mit ihrem Anfangspunkte in jene Schwerpunkte $\varphi_8 = 35^0, 57^0, 80^0$ nach beiden Seiten hin übertragen und dann die $\Sigma J \sin \varphi_8$ gebildet. Sie ergab sich für den ersten, zweiten und dritten Theil = 12,638; 18,481; 21,711, und hieraus folgten die Verhältnisszahlen, womit die Werthe J in jedem Theile multiplicirt werden mussten, um die zu den φ_8 gehörigen von diesem Theile erzeugten Helligkeiten l'_8, l''_8, l'''_8 zu erhalten:

$$\begin{aligned} \nu' &= 6{,}392 : 12{,}638 = 0{,}504, \\ \nu'' &= 17{,}857 : 18{,}481 = 0{,}965, \\ \nu''' &= 11{,}405 : 21{,}711 = 0{,}524. \end{aligned}$$

Da aber in Wahrheit jede Zerstreuung durch Beugung bis zur Ablenkung von 90^0 von dem äussersten Ende des zerstreuten Lichtbüschels reicht, wurden die Büschel einerseits bis $\varphi_8 = 0$, andererseits etwa bis $133^0 = 43^0 + 90^0$; $160^0 = 70^0 + 90^0$; 180^0 innerhalb $120^0 + 90^0$ ausgedehnt, indem die vorher erhaltenen etwa 10 letzten Zahlen, die jedoch nicht gross waren, ohne Veränderung von $\Sigma l_8 \sin \varphi_8$ soweit ausgebreitet wurden. Doch wurde bei der Geringfügigkeit dieser Aenderung das $\sin \varphi_8$ nur schätzungsweise beachtet. Durch Addition der zu demselben φ_8 gehörigen Werthe der l_8 erhielt man L_8 wie folgt:

φ_8	0^0	30	60	90	120	180
l'_8	0,012	374	030	004	000	
l''_8	0,002	038	775	008	003	
l'''_8	0,001	003	078	277	004	001
L_8	0,015	415	883	289	007	001.

Die so erhaltenen Zahlen liessen aber an Stetigkeit zu wünschen, was dadurch erklärlich, dass Lichtmengen, die nach φ_8 ziemlich ausgedehnt sind, auf ein φ_8 vereinigt wurden. Deswegen theilte ich jeden der drei Theile nochmals in zwei gleiche Theile mit den Schwerpunkten bei $\varphi_8 = 30^0, 39^0$; $53^0, 60^0$; $75^0, 90^0$ und erhielt so die Zahlen

φ_8	0	30	60	90	120	180
L_8	0,015	412	847	311	013	001.

Diese trug ich in die Tabelle 58 ein. In Fig. 45c ist die Kurve des nicht zerstreuten Büschels als (L_8), die des zerstreuten als L_8 eingezeichnet.

107. Das Lichtbüschel 9. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I ins Innere treten, auf III, IV, V, VI, I, II, III total reflektirt werden und dann durch V austreten. Da die inneren Reflexionswinkel bei III, V, I, III gleich sind, so sind es auch die äusseren Einfallswinkel bei I und V ($\varepsilon' = \delta$). Daher sind Lichtschwächung η und Ablenkung gleich denen bei Fig. 46.

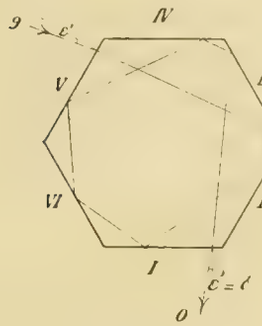


Fig. 46.

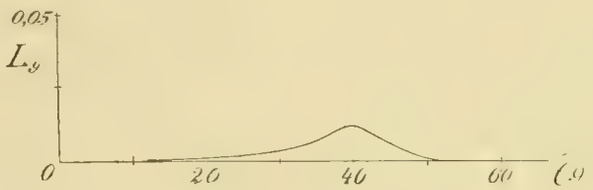


Fig. 47

Lichtbüschel 7′ (Fig. 42) und die Berechnung stimmt mit der dortigen überein. Wir begnügen uns daher damit, die Endergebnisse in Tab. 46 und Fig. 47 mitzutheilen. H_9 folgt aus L_9 wie bisher. Tab. 46. Fig. 47.

Tabelle 46.

L_9 für das Lichtbüschel 9 der Eiskryställchen.

φ_9	0°	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	52
L_9	0,000	000	000	001	001	002	003	007	012	006	001	000

108. Das Lichtbüschel 10. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an IV theilweise zurückgeworfen werden und aus II wieder austreten. Es ist dann (s. Fig.)

$$\varepsilon' = \delta, \qquad \sin\beta' = \frac{1}{n'}\sin\delta,$$

$$\beta'' = 60^0 - \beta', \qquad \sin\varepsilon'' = n'\sin\beta'',$$

$$\eta_{10} = (1-\alpha)\,\alpha\,(1-\alpha_1),$$

wobei α und α_1 zu δ bezw. ε'' gehören und aus der Tab. 27 zu entnehmen sind. Die Ablenkung ist, da

Fig. 48.

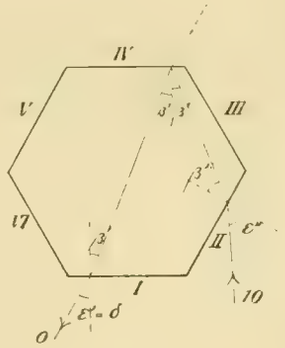


Fig. 48.

die erste und letzte Flächennormale einen Winkel von 240° bilden,

$$\gamma_{10} = 240^0 + \delta - \varepsilon'',$$

woraus

$$\triangle \gamma_{10} = \triangle \delta - \triangle \varepsilon''.$$

Es folgt aber aus den obigen Gleichungen

$$d\beta' = \frac{1}{n'} \frac{\cos\delta}{\cos\beta'} d\delta, \qquad d\beta'' = -d\beta',$$

$$d\varepsilon'' = n' \frac{\cos\beta''}{\cos\varepsilon''} d\beta'' = -\frac{\cos(60^0-\beta')\cos\delta}{\cos\varepsilon''\cos\beta'} d\delta;$$

daher

$$\triangle \gamma_{10} = \triangle \delta \left(1 + \frac{\cos\delta\cos(60^0-\beta')}{\cos\beta'\cos\varepsilon''}\right).$$

Nun erhält man nach Gl. (56a), wenn man wie immer $\triangle\delta = \triangle\nu$ setzt,

$$b_{10} = \triangle\nu\,\triangle\gamma\sin\nu\sin\gamma = \triangle\nu^2\sin\nu\sin\gamma\left(1 + \frac{\cos\delta\cos(60^0-\beta')}{\cos\beta'\cos\varepsilon''}\right).$$

Es ergiebt sich dann aus den Gl. (59) und (46)

$$H_{10} = \frac{Lf}{\triangle\nu^3} L_{10}, \qquad L_{10} = \frac{\pi}{180}\Sigma l_{10},$$

$$l_{10} = s_{10}\frac{2\triangle\nu^2}{b_{10}}, \qquad s_{10} = \cos\varepsilon \cdot q_{10}\,\eta_{10},$$

$$\frac{2\triangle\nu^2}{b_{10}} = \frac{2}{\sin\nu\sin\gamma_{10}\left(1+\frac{\cos\delta\cos(60^0-\beta')}{\cos\beta'\cos\varepsilon''}\right)}.$$

Dabei muss q_{10} auf I oder IV, und nicht auf II gemessen werden, weil der Strahl 10 mit II einen anderen Winkel wie 0 mit I bildet. Man bemerkt, dass sich die Formel von b_{10} von derjenigen von b_3 (Gl. 60) nur im Vorzeichen unterscheidet. Hiernach sind die Rechnungen ausgeführt; die Ergebnisse der L_{10} sind in Tab. 47 und in Fig. 49 niedergelegt.

Tab. 47. Fig. 49.

Tabelle 47.

φ_{10}	70°	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
L_{10}	0,000	001	001	001	001	001	001	002	003	004	003	000.

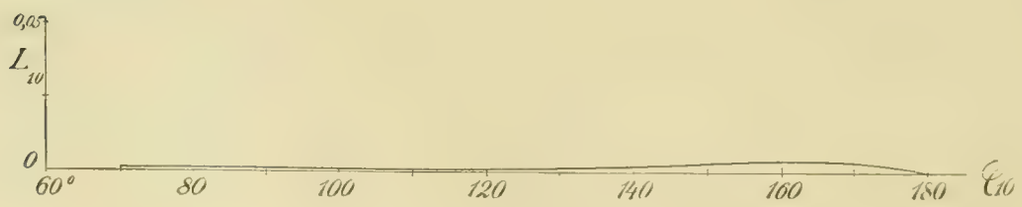


Fig. 49.

109. Das Lichtbüschel 11. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III theilweise zurückgeworfen werden und durch VI wieder austreten. Es ist dann (s. Figur) Fig. 50.

$$\varepsilon' = \delta, \qquad \sin\beta' = \frac{1}{n'}\sin\delta,$$
$$\beta'' = 60^0 - \beta', \quad \sin\varepsilon'' = n'\sin\beta'',$$
$$\eta_{11} = (1-\alpha)\,\alpha_1\,(1-\alpha_1),$$

wobei α und α_1 zu δ bezw. ε'' gehören und aus der Tab. 27 zu entnehmen sind. Diese Gleichungen unterscheiden sich von denen des vorhergehenden Büschels nur durch den mittleren Faktor α_1 gegen α. Die Ablenkung ist, da die erste und letzte Flächennormale einen Winkel von 120° bilden,

$$\gamma_{11} = 120^0 + \delta - \varepsilon'',$$

woraus $\qquad \triangle\gamma_{11} = \triangle\delta - \triangle\varepsilon''.$

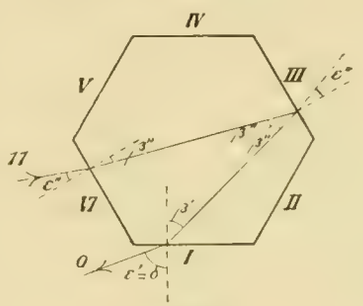


Fig. 50.

Die weiteren Formeln stimmen daher ganz mit denen des vorhergehenden Büschels überein. q_{11} muss auf I gemessen werden. Bei grösseren Werthen von ν kommt es vor, dass $\gamma_{11} = 180^0$ werden kann; dann wird

$$1 : b_{11} = \infty, \qquad l_{11} = \infty \text{ und } \varphi_{11} = 2\nu \text{ (Gl. 52).}$$

Die Kurven (l_{11}, φ_{11}) haben an diesen Stellen die Ordinatenlinien zu Asymptoten; ebenso besitzen die (l_{11}, ν) derartige Asymptoten, so dass die Flächenbestimmung wie bei den Büscheln 1, 5, 7 vorgenommen wird. Die Endergebnisse sind in Tab. 48 und Fig. 51 niedergelegt. Tab. 48. Fig. 51.

Tabelle 48.

φ_{11}	40°	60	80	100	120	140	160	180
L_{11}	0,000	000	001	001	002	004	006	000

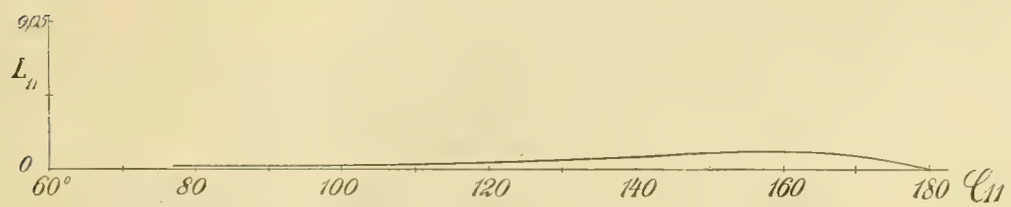


Fig. 51.

110. Das Lichtbüschel 12. Es wird durch die Strahlen gebildet, Fig. 52. welche durch I in's Innere treten, an IV theilweise, dann an II, I, VI, V, IV total reflektirt werden und aus II wieder austreten. Der Winkel des theilweisen Austrittes durch IV ist offenbar $= \varepsilon' = \delta$, und der Austrittswinkel ε'' durch II ist ebenfalls $= \varepsilon' = \delta$. Denn die Winkel der totalen Reflexion auf II, VI, IV sind einander gleich, folglich bildet der Strahl b mit IV denselben Winkel wie a mit II (s. Figur), folglich auch b mit II denselben, wie a mit IV, woraus $\varepsilon'' = \varepsilon'$ folgt. Da nun die Normalen von I und II einen Winkel von 240° bilden, so erhält man auch die Ablenkung

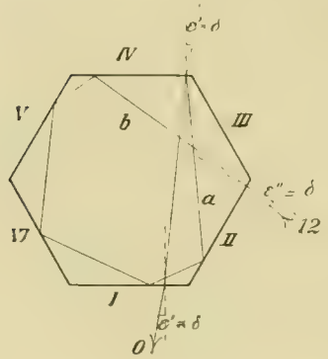


Fig. 52.

$$\gamma_{12} = 240^0,$$

also unveränderlich. Daraus folgt nach Gl. (52) bei unveränderlichem ν auch ein unveränderliches φ_{12}. Andererseits ist

$$\eta_{12} = (1-\alpha)^2\,\alpha,$$

wobei α aus Tab. 27 zu $\varepsilon' = \delta$ gehörig zu entnehmen ist. q_{12} kann auf I, IV oder II abgemessen werden. Aus $\gamma_{12} = 240^0$ folgt $\triangle\gamma_{12} = 0$; daher gelten hier die Formeln 53″, 57″, 46, 48, 59. Man hat dann nach (46) und (57″)

$$l_{12} = s_{12}\,\frac{2\triangle\nu^2}{b_{12}}, \qquad s_{12} = \cos\varepsilon\,.\,q_{12}\,\eta_{12},$$

$$b_{12} = 4\triangle\nu^2\cos\nu\,\sin^2\frac{\gamma_{12}}{2},$$

daher

$$l_{12} = s_{12}\;\frac{1}{2\cos\nu\,\sin^2\dfrac{\gamma_{12}}{2}},$$

so dass b_{12} für dasselbe ν unveränderlich. Danach sind die Werthe l_{12} be- Tab. 49. rechnet, wovon Tab. 49 ein Beispiel giebt. Danach sind die Kurven (l_{12}, φ_{12}) Fig. 53a. für unveränderliche ν in Fig. 53a) eingezeichnet.

Daraus erhält man nach (48) und (46)

$$H_{12} = \Sigma_\delta\, h_{12} = \frac{Lf}{\triangle\nu^3}\;\frac{\pi}{180}\;\Sigma\, l_{12},$$

$$L_{12} = \frac{\pi}{180}\;\Sigma\, l_{12} = 0{,}01745\;\Sigma\, l_{12} = 0{,}01745\,F.$$

Dabei bedeutet wieder, wie beim Büschel 4 und den folgenden $\Sigma\, l_{12} = F$ die Fläche der Kurve (l_{12}, δ_{12}), deren δ_{12} mit einem Grad als Einheit ge-

Tabelle 49.

Berechnung der l_{12} für das Lichtbüschel 12.

v	δ	γ_{12}	φ_{12}	$\cos\varepsilon$	q_{12}	η_{12}	s_{12}	$\frac{2\triangle v^2}{b_{12}}$	l_{12}
				0,	0,	0,	0,	0,	0,
10^0	$23^0 14'$	240^0	$17^0 18'$		000			679	0000
	30^0	„	„	151	175	145	0038	„	0026
	40	„	„	133	160	139	0030	„	0020
	50	„	„	112	092	126	0013	„	0009
	60	„	„	087	025	103	0002	„	0001
	62	„	„		000			„	0000

messen werden. Die so erhaltenen Werthe von L_{12} mit den zugehörigen Werthen von φ_{12} sind in der Tab. 50 eingetragen und zur Verzeichnung der Kurve (L, φ) in Fig. 53b) benutzt; und aus dieser Zeichnung sind dann die Werthe der L_{12} von Grad zu Grad entnommen und in der Haupt-Tabelle eingetragen. Tab. 50. Fig. 53 b.

Tabelle 50.

v	0^0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
φ		$17^0.18'$	34.24	51.14	67.32	82.56	97.00	108.40	116.40	120.00
L_{12}		0, 00094	00182	00026	00062	00058	00036	00078	00152	$\frac{00042}{\triangle v}$

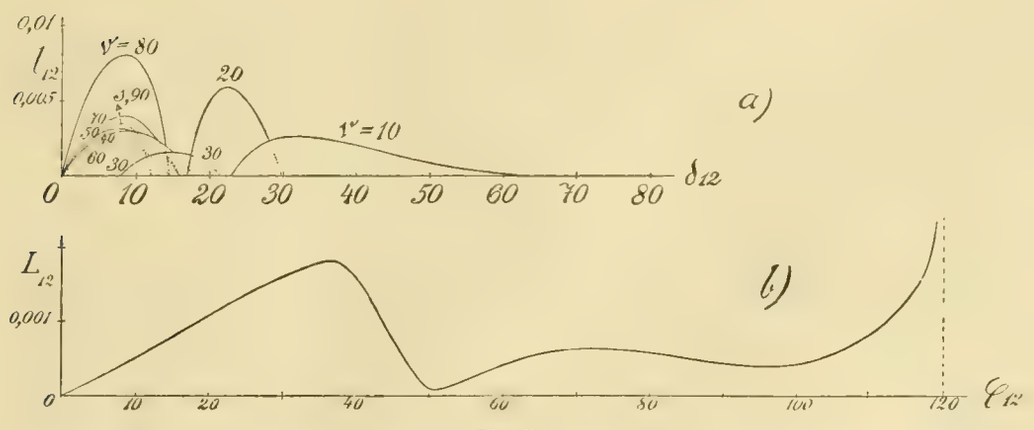


Fig. 53.

111. Die helle Stelle bei $\varphi_{12} = 120^0$. Dabei ist der Fall $\nu = 90^0$, wozu $\varphi_{12} = 120^0$ gehört, besonders zu beachten. Hierfür wird nämlich b_{12} durch den Faktor $\cos \nu$ zu Null und daher $l_{12} = \infty$, wie auch die Fig. 53b) erkennen lässt. Es kann dies natürlich wieder nur scheinbar sein. Die ursprüngliche Formel für b ist die Formel (56)

$$b = \triangle \nu \, \triangle \varphi \, \frac{\sin \varphi}{\sin \nu}.$$

Darin wird $\triangle \varphi$ eingeführt, was aus Gl. (52)

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \nu \, \sin \frac{\gamma}{2}$$

gewonnen wird, und da in unserem Falle γ unveränderlich $= 240^0$ ist für alle Werthe von ν und γ, so wird die Differentiation nur nach ν und φ ausgeführt; man erhält dann für $\triangle \varphi$ den Ausdruck 57″ (S. 145), welcher $\cos \nu$ zum Faktor hat, also für $\nu = 90^0$ zu Null wird. Nun ist aber $\triangle \nu$ oder $\triangle \varphi$ nicht unendlich klein, sondern nur klein, aber endlich, und wir werden finden, dass wenn $\triangle \nu$ klein von der ersten Ordnung, dann $\triangle \varphi$ klein von der zweiten Ordnung ist; und dies wollen wir bestimmen. Lassen wir ν um $\triangle \nu$ und φ um $\triangle \varphi$ wachsen, so wird die obige Gleichung

$$\sin \frac{\varphi + \triangle \varphi}{2} = \sin (\nu + \triangle \nu) \, \sin \frac{\gamma}{2},$$

woraus, da

$$\cos \triangle \nu = 1 - \frac{1}{2} \triangle \nu^2,$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\triangle \varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\triangle \varphi}{2}$$

$$= \sin \frac{\gamma}{2} \left(\sin \nu \left(1 - \frac{1}{2} \triangle \nu^2 \right) + \cos \nu \, \triangle \nu \right).$$

Auf der linken Seite können wir

$$\cos \frac{\triangle \varphi}{2} = 1, \quad \sin \frac{\triangle \varphi}{2} = \frac{\triangle \varphi}{2}$$

setzen, da die höheren Potenzen gegen die stehen bleibende erste Potenz wegfallen. Dann hebt sich auch $\sin \frac{\varphi}{2}$ gegen $\sin \frac{\gamma}{2} \sin \nu$ auf. Auf der rechten Seite wird $\cos \nu = \cos 90^0 = 0$, daher bleibt nur das Glied mit $\triangle \nu^2$ stehen, und es wird, da es auf das Vorzeichen von b und somit von $\triangle \varphi$ nicht ankommt:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\,.\,\frac{\triangle\varphi}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\,\sin\nu\,.\,\frac{1}{2}\,\triangle\nu^2,$$

$$\triangle\varphi = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\,\sin\nu}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,\triangle\nu^2,$$

und wenn man $\nu = 90^0$, $\gamma = 240^0$, $\varphi = 120^0$ einführt,

$$\triangle\varphi = \left(\sqrt{\frac{3}{4}} : \frac{1}{2}\right)\triangle\nu^2 = \sqrt{3}\triangle\,\nu^2.$$

Daraus wird nach den obigen Gleichungen

$$b_{12} = \triangle\nu\,\sqrt{3}\,\triangle\nu^2\,\frac{\sin 120^0}{\sin 90^0} = \frac{3}{2}\,\triangle\nu^3,$$

und

$$l_{12} = s_{12}\,\frac{4}{3}\,\frac{1}{\triangle\nu}.$$

Es ist also, ebenso wie bei dem Lichtbüschel 6 für $\varphi_6 = 0$, die verhältnissmässige Lichtstärke l_{12} umgekehrt proportional mit $\triangle\nu$. Ferner wird

$$H_{12} = \frac{Lf}{\triangle\nu^2}\,\Sigma_\delta\,l_{12} = \frac{Lf}{\triangle\nu^2}\,\frac{1}{\triangle\nu}\,\Sigma_\delta\,\frac{4}{3}\,s_{12}\,.$$

Zur Bestimmung dieser Summe wurde in Figur 53a) die Kurve $\nu = 90^0$ durch die Werthe von $\frac{4}{3}\,s_{12}$ (statt sonst der l_{12}) hergestellt; dabei besitzt man nur die Werthe für $\delta = 10^0$, also

$$\frac{4}{3}\,s_{12} = \frac{4}{3}\,\cos\varepsilon\,.\,q_{12}\,\eta_{12} = \frac{4}{3}\,.\,0{,}985\,.\,0{,}135\,.\,0{,}017 = 0{,}0031;$$

und die Grenzpunkte $\delta = 0^0$, $s_{12} = 0$; $\delta = 12^0$, $s_{12} = 0$. Diese genügen im Anschluss an die Gestalten der anderen Kurven zur Verzeichnung der Kurve $\left(\frac{4}{3}\,s_{12},\,\delta\right)$ für $\nu = 90^0$. Nennen wir die von dieser Kurve und der δ-Axe eingeschlossene Fläche F, wenn das Axenstück mit 1^0 als Einheit gemessen wird, so erhalten wir, wie bei Büschel 4 und anderen,

$$H_{12} = \frac{Lf}{\triangle\nu^2}\,\frac{\pi}{180\,.\,\triangle\nu}\,\frac{F}{\triangle\nu} = \frac{Lf}{\triangle\nu^3}\,L_{12},$$

$$L_{12} = \frac{1}{\triangle\nu}\,.\,0{,}01745\,F,$$

und da sich aus der Zeichnung $F = 0{,}024$ ergiebt, so wird

$$L_{12} = \frac{1}{\triangle\nu}\,.\,0{,}00042,$$

was für $\triangle\nu = 1^0 = 0{,}01745$, $L_{12} = 0{,}024$ geben würde.

Wegen der Ausdehnung der Sonne wird sich diese hellere Stelle

verbreitern und um 16', gleich dem halben scheinbaren Durchmesser der Sonne, über 120° Sonnenabstand hinausreichen.

Da jene Lichtstärke $L_{12} = 0{,}024$ an der fraglichen Himmelsstelle stärker ist als die anderen dort durch Eiskryställchen hervorgebrachten Helligkeiten und da sie bei kleinerem v noch beträchtlich zunehmen kann, so dürfte sie vielleicht in nördlichen Gegenden, wenn nur Eiskryställchen in der Luft vorhanden sind, unter günstigen Umständen in einem Sonnenabstande von 120° bemerkbar sein.

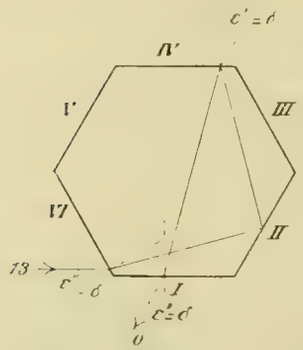


Fig. 54.

112. Das Lichtbüschel 13. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an IV theilweise, dann an II total reflektirt werden und aus VI austreten. Der äussere Einfalls-
Fig. 54. winkel bei IV ist gleich dem bei I $= \varepsilon' = \delta$, und mit dem bei IV ist der bei VI gleich, also ebenfalls $= \varepsilon' = \delta$, wegen der gleichartigen Lage gegen II. Daher bildet der Strahl 13 mit demjenigen 0 denselben Winkel, wie

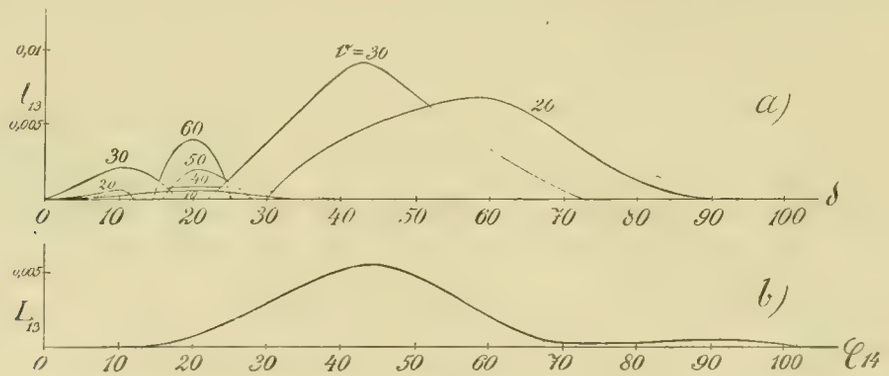


Fig. 55.

Normalen der Flächen I und VI, nämlich 120°, oder es ist die Ablenkung

$$\gamma = 120^0,$$

so dass, wie bei dem vorhergehenden Büschel, für ein unveränderliches v auch φ unveränderlich ist. Andererseits ist

$$\eta = (1 - \alpha)^2 \alpha,$$

wobei α aus Tab. 27 zu $\varepsilon' = \delta$ gehörig zu entnehmen ist. q kann auf I,

IV oder VI abgemessen werden. Es gelten hier für l und b dieselben Formeln wie für das vorhergehende Büschel 12. Nach ihnen sind die l berechnet und danach die Kurven (l, φ) für unveränderliche ν in Fig. 55a) eingetragen; dieselben bestehen zum Theil aus zwei getrennten Aesten. Daraus ist dann, wie vorher, die Kurve (L, φ) in Fig. b) gebildet, bei welcher jene Schwierigkeit mit scheinbar unendlich grossen Helligkeiten nicht auftreten. Die Werthe der L sind in Tab. 51 eingetragen. Fig. 55. Tab. 51.

Tabelle 51.

φ	0^0	10^0	20	30	40	50	60	70	80	90	100	103
L_{13}	0,0000	0000	0004	0027	0053	0048	0021	0003	0003	1004	0003	0000

113. Das Lichtbüschel 14. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an II total und an III theilweise reflektirt werden und dann aus V austreten. Die äusseren Einfallswinkel bei I und III sind $= \varepsilon' = \delta$, die inneren β', diejenigen bei V sind ε'' und β'' und es gilt (s. Fig.) Fig. 56.

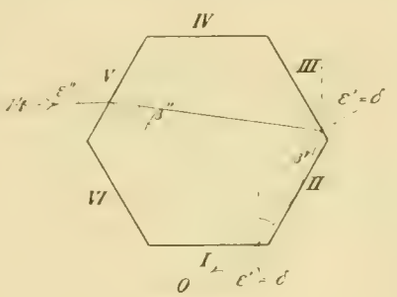


Fig. 56.

$$\sin \beta' = \frac{1}{n'} \sin \delta, \quad \beta'' = 60^0 - \beta',$$
$$\sin \varepsilon'' = n' \sin \beta'' = n' \sin (60^0 - \beta');$$
$$\eta = (1-\alpha)\, \alpha\, (1-\alpha_1),$$

wo α zu $\varepsilon' = \delta$, α_1 zu ε'' gehörig aus Tab. 27 entnommen wird. Die Ablenkung ergiebt sich

$$\gamma = \delta + 60^0 + \varepsilon'', \quad \triangle\gamma = \triangle\delta + \triangle\varepsilon''.$$

Diese Winkelbeziehungen stimmen mit denen von Gl. 49 und 53''' überein, so dass für unser Büschel auch die Gl. 57''' für b gilt. Damit wird l nach

Tabelle 52.

Verhältnissmässige Lichtstärke des Büschels 14.

φ	50^0	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	$163^0\,25'$
L_{14}	0,0000	0002	0006	0012	0018	0038	0053	0078	0117	0209	0235	0015	0000

Gl. 46 berechnet, wobei q auf I oder III (nicht auf V) abgemessen wird. Die φ ergeben sich nach Gl. 52. Man ist nun im Stande, die Kurven (l, φ) für unveränderliche ν zu verzeichnen, was in Fig. 57a) geschehen ist. Daraus Fig. 57.

bestimmt man wie bisher die Kurven (l, v) für unveränderliche φ in Fig. *b*) und bestimmt durch deren Flächenmessung den zu jedem φ gehörigen Werth

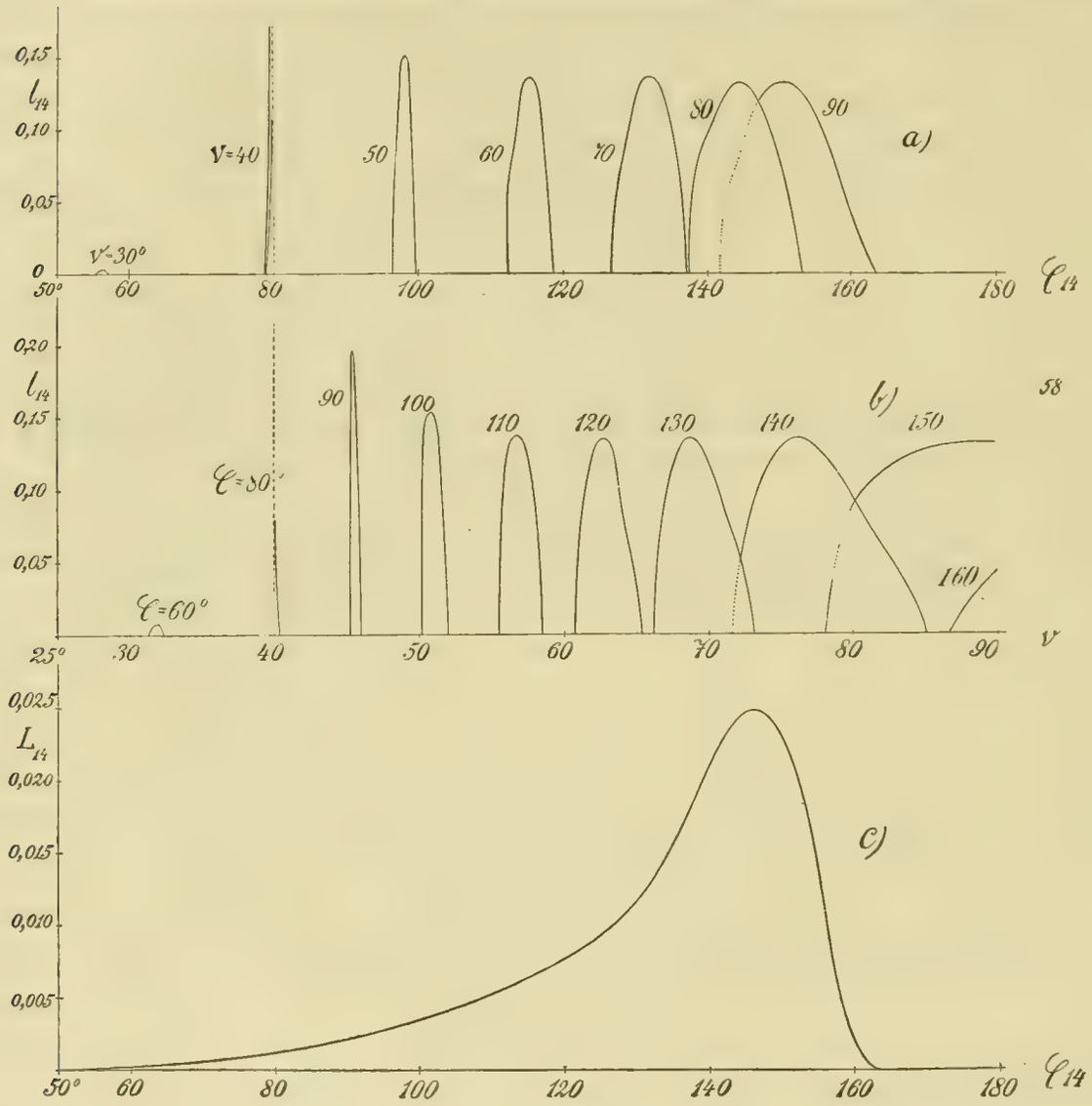


Fig. 57.

von L (Gl. 59). Damit ist die Kurve (L, φ) in Figur c) gezeichnet und die Tab. 52. Tabelle 52 gebildet.

Fig. 58. **114. Das Lichtbüschel 15.** Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III theilweise, dann an IV total

reflektirt werden und aus V austreten. Die Ein- und Ausfallswinkel bei III und V sind offenbar bezw. einander gleich und es gilt wieder

$$\sin\beta' = \frac{1}{n'}\ \sin\delta,\ \beta'' = 60^0 - \beta',$$
$$\sin\varepsilon'' = n' \sin(60^0 - \beta');$$

sodann

$$\eta = (1-\alpha)\,\alpha_1\,(1-\alpha_1),$$

wo α, α_1 bezw. zu δ und ε'' gehören. Ferner ist

$$\gamma = \delta + 60^0 + \varepsilon'',\ \triangle\gamma = \triangle\delta + \triangle\varepsilon''.$$

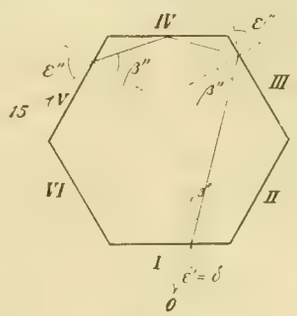


Fig. 58

Die Entwicklung weicht also nur in der Formel von η von derjenigen des Büschels 14 ab. Die Kurven (l, φ) und (l, ν) haben auch ganz ähnliche Gestalten wie dort und mögen deswegen hier weggelassen werden. Die Kurve (L, φ) ist in Figur 59 gezeichnet und die berechneten Werthe von L sind in Tab. 53 eingetragen. Fig. 59. Tab. 53.

Tabelle 53.

φ	55°	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160°	163° 32′
L_{15}	0,0000	0001	0005	0014	0021	0019	0017	0032	0074	0163	0104	0004	0000

Die Werthe für den Beginn und das Ende des Auftretens dieses Büschels findet man, wenn man beachtet, dass das q beginnt, Werthe an-

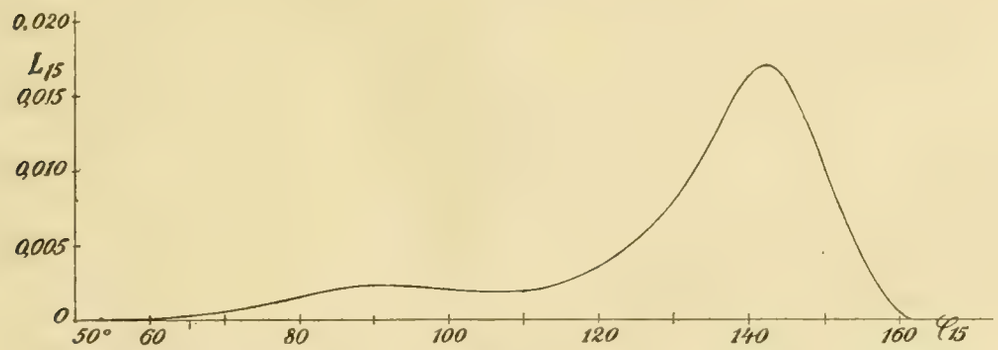


Fig. 59.

zunehmen, wenn $\varepsilon'' = 90^0$ wird und wenn zugleich ν seinen kleinstmöglichen oder grösstmöglichen Werth annimmt. Der letztere ist $\nu = 90^0$; der erstere tritt dann ein, wenn der zwischen V und IV und daher auch der zwischen IV und III liegende Strahl mit IV parallel, also $\beta'' = 30^0$ wird.

Es ist dann

$$\frac{\sin \varepsilon''}{\sin \beta''} = \frac{1}{n'} = \frac{\sin 30^0}{\sin 90^0} = \frac{1}{2}, \quad n' = 2;$$

Hieraus folgt nach Gl. 42 $\nu = 29^0\,13'$. Aus $\beta'' = 30^0$ ergiebt sich aber nach den obigen Formeln $\beta' = 30^0$, $\delta = 90^0$, $\gamma = 240^0$ und hieraus nach Gl. 52 $\varphi = 50^0\,3'$. Andererseits folgt aus $\varepsilon'' = 90^0$ und $\nu = 90^0$ wofür $n' = 1{,}31$ ist, $\sin \beta'' = 1 : 1{,}31 = 0{,}763$, also $\beta'' = 49^0\,44'$; dann $\beta' = 10^0\,16'$, $\sin \delta = n' \sin \beta' = 0{,}234$, $\delta = 13^0\,32'$, $\gamma = 163^0\,32'$, woraus nach Gl. 52 auch $\varphi = 163^0\,32'$ folgt.

Fig. 60. **115. Das Lichtbüschel 16.** Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III, IV, V total, an I theilweise, nochmals an III total reflektirt werden und aus V austreten. Die Ein und Ausfallswinkel zweimal bei I und einmal bei V sind offenbar bezw. untereinander gleich, nämlich $\varepsilon' = \delta$, und β'. Daher ist

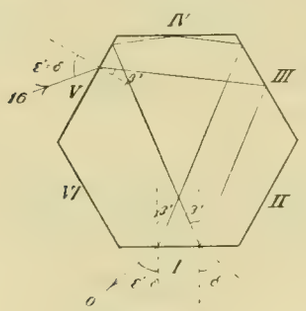


Fig. 60.

$$\eta = (1-\alpha)^2\,\alpha,$$

wo α zu δ gehört. Die Ablenkung ist

$$\gamma = 60^0 + 2\,\delta, \quad \triangle\gamma = 2\,\triangle\delta.$$

Es werden also die Gleichungen 53′ und 57′ benutzt. Die Endergebnisse der Rechnungen sind in Tab. 54

Tab. 54. Fig. 61. und in Fig. 61 niedergelegt.

Tabelle 54.

φ	30^0	40	50	60	70
L_{16}	0. 0000	0002	0008	0015	0000

116. Das Lichtbüschel 17. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III, IV, V, VI, I total, an III theilweise reflectirt werden und aus VI austreten. Wegen der gleichartigen Lage gegen V von IV, III, I und von VI, I, III bilden die durch I und durch III tretenden Strahlen gleiche Winkel mit diesen Flächen, ebenso der durch VI tretende; an den drei Durchtrittsstellen herrschen daher die gleichen Winkel $\varepsilon' = \delta$ und β'. Daher ist $\eta = (1-\alpha)^2\,\alpha$,

wo α zu δ gehört. Die Ablenkung ist

$\gamma = 120^0$, daher $\triangle\gamma = 0$.

Es gelten demnach dieselben Beziehungen, wie bei Büschel 12. Es ist wieder bei unveränderlichem ν auch φ unveränderlich; man braucht daher

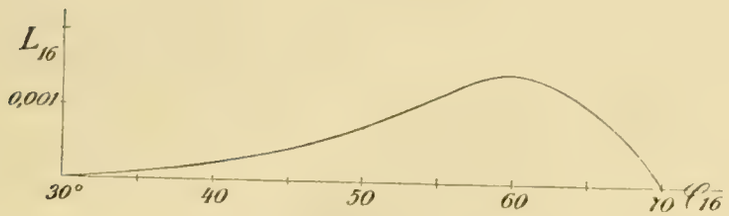


Fig. 61.

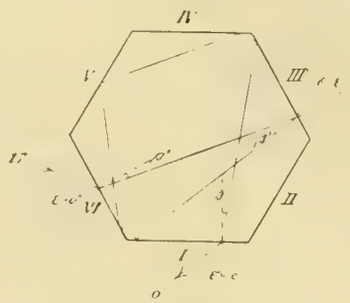


Fig. 62.

wieder nur eine Hilfsfigur a), nicht aber die b). Es wird aber auch, ebenso wie dort, für $\nu = 90^0$, da $\gamma = 120^0$, auch $\varphi = 120^0$, und l und L werden umgekehrt proportional mit $\triangle\nu$, nämlich $L = \frac{1}{\triangle\nu} 0{,}0038$, was für $\triangle\nu = 1^0 = 0{,}01745$ zu $L = 0{,}218$ wird. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Tab. 55 und in Fig. 63 eingetragen, und aus letzterer sind die Werthe der L_{17} von Grad zu Grad des φ_{17} entnommen und in der Vereinigungstabelle 58 eingetragen.

Tab. 55. Fig. 63.

Tabelle 55.

ν	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
φ	0°	17°18′	34.24	51.14	67.32	82.56	97.00	108.40	116.40	120.00
L_{17}	0,0000	0095	0077	0028	0056	0050	0047	0079	0135	$\frac{0038}{\triangle\nu}$

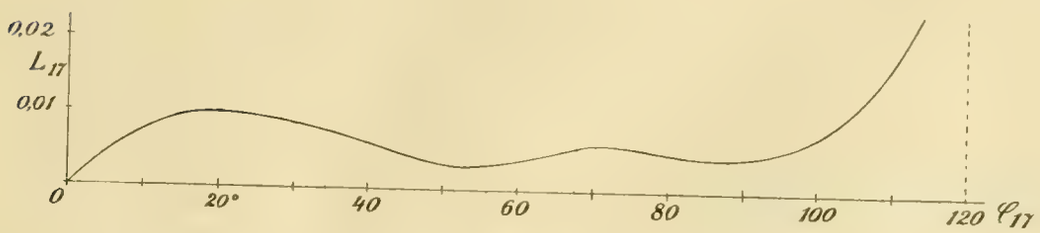


Fig. 63.

Fig. 64. **117. Das Lichtbüschel 18.** Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III, IV, V, VI, I, II, III total, an V theilweise reflektirt werden und bei II austreten. In anderen Fällen gehen die Lichtstrahlen im Innern zwei- oder dreimal mit totaler Reflexion herum, bis sie aus II austreten können, in anderen Fällen keinmal, so dass sie von I nach III, V, II gehen. Bei unserem Büschel sind in allen den bezeichneten Fällen, wie man sich leicht überzeugen kann, die äusseren Einfallswinkel an I, V und II einander gleich, nämlich $= \varepsilon' = \delta$, die zugehörigen inneren $= \beta'$. Daher ist

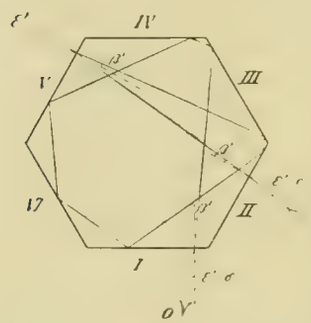


Fig. 64.

$$\eta = (1-\alpha)^2\ \alpha,$$

wo α zu δ gehört. Die Ablenkung ist

$$\gamma = 240^0, \text{ daher } \triangle\gamma = 0.$$

Es gelten daher wieder die Beziehungen, wie im vorigen Büschel und in dem Büschel 12.

An dieses Büschel schliesst sich mit stetigem Uebergang ein solches an, welches sich von dem betrachteten nur dadurch unterscheidet, dass bei III, welche Fläche aber nur einmal getroffen wird, nicht eine totale, sondern nur eine theilweise Reflexion stattfindet, ebenso wie es bei 7′ und 7″ der Fall war. Der Strahl trifft III unter dem Winkel $\beta'' = 60^0 - \beta'$, wobei

$$\sin \beta' : \sin \delta = 1 : n', \quad \sin \varepsilon'' = n \sin \beta''$$

(vergl. Figur 58). Es wird dann

$$\eta = (1-\alpha)^2\ \alpha\ \alpha_1,$$

worin α_1 zu ε'' gehört. Dadurch werden die Werthe von l und L sehr klein.

Tabelle 56.

ν	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
φ	0°	17° 18′	34.24	51.14	67.32	82.56	97.00	108.40	116.40	120°
L_{18}	0,0000	0000	0021	0038	0008	0003	0004	0000	0000	$\frac{0{,}00016}{\triangle\nu}$

Es tritt aber dieses Büschel dann noch bei $\nu = 90^0$ auf, wo es zu $\varphi = 120^0$ gehört; und es wird dafür, wie bei Büschel 12, L mit $\triangle\nu$ umgekehrt proportional und ergiebt sich in unserem Falle als

$$L = \frac{1}{\triangle \nu}\ 0{,}00016,$$

was für $\triangle \nu = 1^0 = 0{,}01745$ zu $L = 0{,}009$ wird. Etwa von $\varphi = 100^0$ bis nahezu $\varphi = 117^0$ bleibt aber $L < 0{,}0001$. Die erhaltenen Werthe sind in Tab. 56 und in Fig. 65 eingetragen. Tab. 56. Fig. 65.

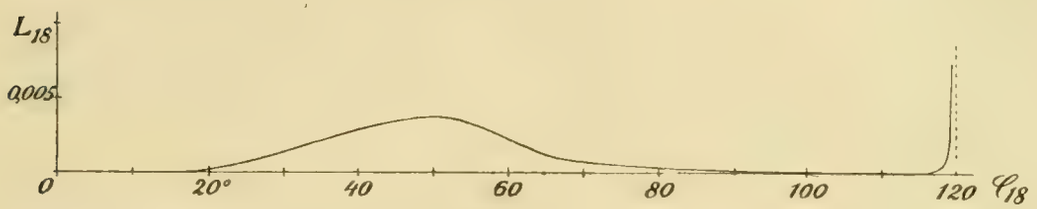


Fig. 65.

118. Das Lichtbüschel 19. Es wird durch die Strahlen gebildet, welche durch I in's Innere treten, an III total, an V theilweise und an I nochmals total reflektirt werden und bei III austreten. An den Stellen von I, III, V, wo keine totale Reflexion stattfindet, herrschen übereinstimmend die äusseren Einfallswinkel $\varepsilon' = \delta$; daher gilt Fig. 66.

$$\eta = (1-\alpha)^2\ \alpha,$$

wobei α zu δ gehört. Die Ablenkung ist

$$\gamma = 2\,\delta - 60^0, \text{ daher } \triangle\gamma = 2\,\triangle\delta.$$

Demnach gelten die Gleichungen 53′ und 57′. Die Ergebnisse sind in Tab. 57. Fig. 67.

Tabelle 57.

φ	$11^0\,45'$	20	30	40	$44^0\,30'$
L_{19}	0,0002	0051	0051	0018	0000

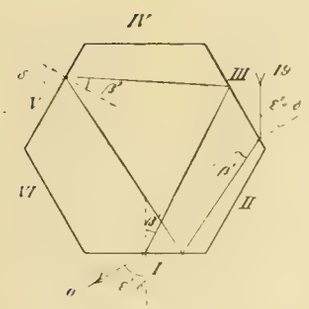


Fig. 66.

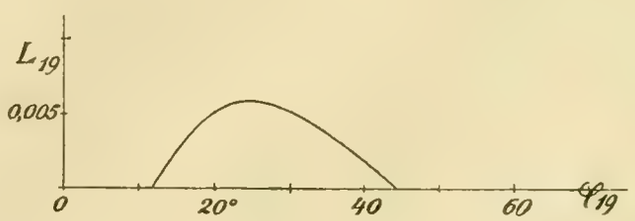


Fig. 67.

Tab. 58. **119. Die Vereinigung der durch die Eiskryställchen hervorgebrachten Lichtbüschel.** Die Vereinigung der Lichtbüschel ist in der Tabelle 58 vorgenommen, worin die verhältnissmässige Lichtstärke L aller Lichtbüschel von Grad zu Grad des φ eingetragen und deren Summe L gezogen ist. Das Büschel 2 giebt die Helligkeit an, welche in der Sonne selbst zur Erscheinung kommt, d. h. die Lichtmenge, welche von den gerade vor der Sonne stehenden Kryställchen in das Auge gesendet wird. Sie tritt daher in die Tabelle zur Berechnung der Himmelshelligkeit nicht ein, wurde überhaupt nicht benutzt.

Sodann ist nach der zweiten Gleichung im Abschnitt 55 Seite 110 die Lichtmenge i'_2 berechnet, welche durch die Eiskrystalle auf eine umgebende Kugel vom Halbmesser 1 m im Ganzen geworfen wird. Es ergiebt sich dabei

$$L' = \frac{\pi^2}{90} \sum_0^{180} L \sin\varphi = 0{,}10966 \;.\; 93{,}1916 = 10{,}22,$$

und hiermit ist $L : L' = i'_2$ berechnet und in die Tabelle 58 eingetragen.

Fig. 68. Hieraus ist die Kurve (i'_2, φ) in Figur 68 hergestellt. Man bemerkt den verwaschenen Ring von 22° Sonnenabstand, der bei noch kleineren Kryställchen in noch höherem Grade verwaschen oder ausgebreitet würde. Ganz nahe bei der Sonne nimmt die Helligkeit wieder zu, so dass bei $\varphi = 3°$ ein Minimum eintritt.

Tabelle 58.

Zerstreuung des Sonnenlichts durch Eiskryställchen.

φ	L_1	L_2	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L	i'_2
0°	0,788	0,472	0,000	0,010	0,807		0,015	0,000			0,000	0,000				0,000	0,000		2,092	0,204
1	739	482	001	010	395		016	000			000	000				001	000		1,644	0,160
2	697	497	001	010	164		018	000			000	000				002	000		1,389	0,136
3	661	533	002	010	098		020	000			000	000				003	000		1,320	0,129
4	629	599	003	010	072		023	000			000	000				004	000		1,340	0,131
5	600	684	003	010	054		027	000			000	000				005	000		1,383	0,135
6	573	780	004	010	042		031	000			000	000				005	000		1,445	0,141
7	547	887	005	010	035		036	000			000	000				006	000		1,526	0,149
8	521	1,004	006	010	032		041	000			000	000				006	000		1,620	0,158
9	496	1,130	006	010	030		047	000			000	000				007	000		1,726	0,169
10	472	1,273	007	010	029		053	000			000	000				007	000		1,851	0,181

φ	L_1	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L	i'_2
	0,		0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,		
11°	448	1,434	008	010	028		060	000			001	000				008	000		1,997	0,196
12	425	1,608	008	010	029		069	000			001	000				008	000	000	2,158	0,211
13	404	1,779	009	010	030		080	000			001	000				009	000	001	2,323	0,227
14	384	1,951	010	010	031		092	000			001	000				009	000	002	2,490	0,244
15	364	2,104	011	010	033		105	001			001	000				009	000	003	2,641	0,258
16	345	2,256	012	010	035		120	001			001	000				009	000	003	2,792	0,273
17	326	2,400	013	010	038		137	001			001	000				010	000	004	2,940	0,288
18	309	2,535	014	010	042		153	001			001	000				010	000	004	3,079	0,301
19	293	2,659	016	009	047		171	001			001	000				010	000	005	3,212	0,314
20	277	2,771	017	009	052	000	188	001			001	000				010	000	005	3,331	0,326
21	265	2,865	018	009	059	000	206	001			001	001				010	000	005	3,440	0,336
22	253	2,937	019	009	067	000	227	001			001	001				010	000	006	3,531	0,345
23	241	2,987	019	009	075	000	249	001			001	001				010	000	006	3,599	0,352
24	230	3,013	021	009	084	000	273	002			001	001				010	000	006	3,650	0,357
25	219	3,025	022	009	093	001	297	002			001	002				009	000	006	3,686	0,360
26	208	2,998	024	009	102	001	320	002			002	002				009	001	006	3,684	0,360
27	198	2,961	025	009	111	001	344	002			002	002				009	001	006	3,671	0,359
28	188	2,903	026	008	120	001	368	002			002	002				009	001	006	3,636	0,356
29	179	2,825	027	008	129	002	391	003			002	003				009	001	005	3,584	0,350
30	171	2,726	028	008	137	002	412	003			002	003			000	009	001	005	3,507	0,343
31	163	2,610	029	008	144	003	432	004			002	003			000	008	001	005	3,412	0,334
32	155	2,487	029	008	151	003	452	004			002	003			000	008	002	005	3,309	0,324
33	148	2,356	030	008	158	004	472	005			002	004			000	008	002	004	3,201	0,313
34	141	2,211	031	008	163	005	492	006			002	004			000	008	002	004	3,077	0,301
35	134	2,058	032	007	165	006	512	007			002	004			000	008	002	004	2,941	0,287
36	128	1,903	033	007	166	007	532	008			002	005			000	007	002	003	2,803	0,274
37	122	1,751	033	007	164	008	551	009			002	005			000	007	003	003	2,665	0,261
38	116	1,601	034	007	162	009	569	011			002	005			000	007	003	003	2,529	0,247
39	110	1,449	034	007	156	010	588	012			002	005			001	006	004	002	2,386	0,233
40	105	1,302	035	007	144	011	608	012			002	005			001	006	004	002	2,244	0,220
41	100	1,171	036	007	134	013	627	011			001	006			001	006	004	001	2,118	0,207
42	095	1,053	036	006	123	015	647	010		000	001	006			001	005	004	001	2,003	0,196
43	090	0,943	037	006	109	018	666	009		000	001	006			001	005	004	001	1,893	0,185
44	086	842	037	006	095	021	686	008		000	001	006			001	005	004	000	1,798	0,176
45	082	741	038	006	083	024	707	007		000	001	006			001	004	004		1,704	0,167
46	078	649	039	006	072	027	728	005		000	001	005			001	004	004		1,619	0,158
47	075	565	039	006	060	031	752	004		000	000	005			001	004	004		1,546	0,151
48	072	498	040	006	049	036	776	003		000	000	005			001	003	004		1,493	0,146
49	069	440	040	005	039	041	800	002		000	000	005			001	003	004		1,449	0,142
50	066	389	041	005	029	047	822	002		000	000	005	000	000	001	003	004		1,414	0,138
51	063	342	041	005	022	052	840	001		000	000	005	000	000	001	003	004		1,379	0,135
52	060	301	041	005	017	057	854	000		000	000	004	000	000	001	003	004		1,347	0,132

φ	L_1	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L	γ_2
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,			
53°	057	269	042	005	014	061	867			000	000	004	000	000	001	003	004		1,327	0,130
54	055	240	042	005	011	065	875			000	000	004	000	000	001	003	004		1,305	0,128
55	053	215	042	005	008	068	881			000	000	004	000	000	001	003	004		1,284	0,126
56	051	194	042	005	005	070	880			000	000	003	000	000	001	003	003		1,257	0,123
57	049	177	043	005	003	073	877			000	000	003	000	000	001	003	003		1,237	0,121
58	047	162	043	005	001	075	871			000	000	003	000	000	001	003	003		1,214	0,119
59	045	148	043	004	000	076	860			000	001	002	000	000	001	004	003		1,187	0,116
60	044	135	043	004	000	078	847			000	001	002	000	000	001	004	003		1,162	0,114
61	043	123	043	004		079	829			000	001	002	000	000	001	004	003		1,132	0,111
62	042	111	043	004		080	810			000	001	002	000	000	001	004	003		1,101	0,108
63	041	102	043	004		081	789			000	001	001	000	000	001	005	002		1,068	0,104
64	040	095	042	004		081	767			000	001	001	000	000	001	005	002		1,039	0,102
65	039	089	042	004		082	742			000	001	001	000	000	001	005	002		1,008	0,099
66	038	084	042	004		082	714			000	001	001	000	000	001	005	002		0,974	0,095
67	037	079	042	004		083	684			000	001	000	000	000	001	006	001		0,938	0,092
68	036	075	041	004		083	658			000	001	000	000	000	000	006	001		0,905	0,089
69	035	073	041	004		083	634			000	001	000	000	000	000	006	001		0,878	0,086
70	035	068	041	004		082	610		000	000	001	000	001	001	000	006	001		0,850	0,083
71	034	064	041	004		081	586		000	001	001	000	001	001		006	001		0,821	0,080
72	033	061	041	004		080	564		000	001	001	000	001	001		006	001		0,794	0,078
73	033	058	040	004		078	542		000	001	001	000	001	001		006	000		0,765	0,075
74	032	055	040	004		076	521		000	001	001	000	001	001		006	000		0,738	0,072
75	031	053	040	004		074	503		001	001	001	000	001	001		006	000		0,716	0,070
76	030	050	039	003		073	487		001	001	001	000	001	001		006	000		0,693	0,068
77	029	048	039	003		072	472		001	001	001	000	001	001		006	000		0,674	0,066
78	029	046	039	003		070	456		001	001	001	000	001	001		005	000		0,653	0,064
79	028	044	038	003		068	441		001	001	001	000	001	001		005	000		0,632	0,062
80	028	042	038	003		065	426		001	001	001	000	001	001		005	000		0,612	0,060
81	027	039	037	003		062	412		001	001	001	000	001	002		005	000		0,591	0,058
82	027	036	037	003		060	400		001	001	001	000	001	002		005	000		0,574	0,056
83	026	034	036	003		057	390		001	001	001	000	001	002		005	000		0,557	0,054
84	025	032	036	003		054	381		001	001	001	000	001	002		005	000		0,542	0,053
85	024	030	035	003		052	372		001	001	001	000	002	002		005	000		0,528	0,052
86	024	028	034	003		050	361		001	001	001	000	002	002		005	000		0,512	0,050
87	023	026	034	003		048	348		001	001	001	000	002	002		004	000		0,493	0,048
88	023	024	033	003		046	335		001	001	001	000	002	002		004	000		0,475	0,046
89	022	021	033	003		044	322		001	001	000	000	002	002		004	000		0,455	0,044
90	022	020	032	003		043	310		001	001	000	000	002	002		004	000		0,440	0,043
91	021	019	032	003		041	298		001	001	000	000	002	002		005	000		0,425	0,042
92	021	017	031	003		039	285		001	001	000	000	002	002		005	000		0,407	0,040
93	020	016	031	003		037	270		001	001	000	000	003	002		005	000		0,389	0,038
94	020	015	030	003		036	256		001	001	000	000	003	002		005	000		0,372	0,036

φ	L_1	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L	i'_2
	0,	0,	0,	0,		0,	0,		0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,	0,			
95°	019	013	029	003		034	242		001	001	000	000	003	002		005	000		0,352	0,034
96	019	012	029	003		033	225		001	001	000	000	003	002		006	000		0,334	0,033
97	018	011	028	003		031	210		001	001	000	000	003	002		006	000		0,314	0,031
98	018	009	027	003		030	194		001	001	000	000	003	002		007	000		0,295	0,029
99	017	008	027	003		029	179		001	001	000	000	003	002		007	000		0,277	0,027
100	017	008	026	003		028	163		001	001	000	000	004	002		007	000		0,260	0,025
101	017	007	026	003		027	147		001	001	000	000	004	002		008	000		0,243	0,024
102	016	007	025	003		026	132		001	001	000	000	004	002		008	000		0,225	0,022
103	016	007	025	003		025	118		001	001	001		004	002		009	000		0,212	0,021
104	016	006	024	003		024	104		001	001	001		004	002		010	000		0,196	0,019
105	016	006	023	003		023	092		001	001	001		004	002		011	000		0,183	0,018
106	016	006	022	003		023	082		001	001	001		005	002		012	000		0,176	0,017
107	016	005	022	003		022	072		001	001	001		005	002		013	000		0,163	0,016
108	015	004	021	003		021	063		001	002	001		005	002		014	000		0,152	0,015
109	015	004	021	003		021	055		001	002	001		005	002		015	000		0,145	0,014
110	015	003	020	003		020	049		001	002	001		005	002		017	000		0,138	0,014
111	015	003	020	003		020	043		001	002	001		006	002		019	000		0,135	0,013
112	015	003	019	003		019	039		001	002	001		006	002		021	000		0,131	0,013
113	015	002	019	003		019	034		001	002	002		006	002		023	000		0,128	0,013
114	015	002	019	003		018	030		001	002	002		006	002		025	000		0,125	0,012
115	014	002	019	003		018	026		001	002	002		007	002		027	000		0,123	0,012
116	014	002	018	003		017	022		001	002	002		007	002		029	000		0,119	0,012
117	014	002	018	003		017	018		001	002	002		007	003		030	000		0,117	0,011
118	014	002	018	003		017	016		001	002	002		007	003		030	001		0,116	0,011
119	014	001	018	003		016	014		001	002	003		008	003		031			0,114	0,011
120	014	001	017	004		016	013		001	002	003		008	003		031			0,113	0,011
121	014	001	017	004		016	012		001	002	002		008	003		030			0,110	0,011
122	014	001	017	004		015	011		001	002	002		009	004		029			0,109	0,011
123	014	001	017	004		015	010		001	002	002		009	004		028			0,107	0,010
124	014	001	017	004		015	009		001	002	001		010	004		027			0,105	0,010
125	014	001	017	004		014	008		001	002	001		010	005		026			0,103	0,010
126	015	001	016	004		014	008		001	003	001		010	005		024			0,102	0,010
127	015	000	016	004		014	008		001	003	001		010	006		022			0,100	0,010
128	015	000	016	004		013	007		001	003	000		011	006		020			0,096	0,009
129	015	000	016	004		013	007		001	003	000		011	007		018			0,095	0,009
130	015	000	016	005		013	007		001	003	000		012	007		016			0,095	0,009
131	015	000	016	005		012	007		001	003			012	009		013			0,093	0,009
132	015	000	016	005		012	006		002	003			013	009		011			0,092	0,009
133	015	000	016	005		011	006		002	003			014	011		009			0,092	0,009
134	015	000	016	005		011	006		002	003			014	012		007			0,091	0,009
135	015	000	016	005		011	006		002	003			015	013		006			0,092	0,009
136	015	000	017	006		011	006		002	004			016	014		005			0,096	0,009

φ	L_1	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L	i'_2
	0,	0,	0,	0,		0,	0,		0,	0,			0,	0,		0,				
137°	015	000	017	006		010	005		002	004			017	015		004			0,095	0,009
138	015	000	017	006		010	005		002	004			018	016		003			0,096	0,009
139	015	000	017	006		010	005		002	004			020	016		003			0,098	0,010
140	015	000	017	006		009	005		002	004			021	017		002			0,098	0,010
141	015		017	006		009	005		002	005			022	017		002			0,100	0,010
142	015		017	006		009	005		003	005			023	017		002			0,102	0,010
143	015		017	007		009	004		003	005			024	017		002			0,103	0,010
144	015		018	007		008	004		003	005			025	016		001			0,102	0,010
145	015		018	007		008	004		003	005			025	016		001			0,102	0,010
146	016		018	007		008	004		003	006			025	016		001			0,104	0,010
147	016		019	008		007	004		003	006			025	015		001			0,104	0,010
148	016		019	008		007	004		003	006			025	014		000			0,102	0,010
149	016		019	008		007	003		003	006			024	012		000			0,098	0,010
150	016		019	008		006	003		003	006			023	010		000			0,094	0,009
151	016		018	008		006	003		003	006			022	009					0,091	0,009
152	016		017	008		006	003		004	006			021	007					0,088	0,009
153	016		015	008		006	003		004	006			019	006					0,083	0,008
154	016		013	009		005	003		004	006			016	005					0,077	0,008
155	016		011	009		005	003		004	006			014	004					0,072	0,007
156	017		010	009		005	003		004	006			010	003					0,067	0,007
157	017		008	009		004	003		004	006			007	002					0,060	0,006
158	017		007	009		004	003		004	006			005	001					0,055	0,006
159	017		005	009		003	002		004	006			003	001					0,050	0,005
160	018		004	010		003	002		004	006			002	000					0,049	0,005
161	018		002	010		003	002		004	006			001	000					0,046	0,005
162	018		000	010		003	002		004	006			000	000					0,043	0,004
163	018			010		003	002		004	006			000	000					0,043	0,004
164	017			011		002	002		004	006									0,042	0,004
165	017			011		002	002		004	006									0,042	0,004
166	017			011		002	002		004	006									0,042	0,004
167	017			011		002	002		004	005									0,041	0,004
168	017			011		001	001		004	005									0,039	0,004
169	016			011		001	001		004	005									0,038	0,004
170	016			011		001	001		003	005									0,037	0,004
171	016			010		001	001		003	004									0,035	0,003
172	015			010		001	001		003	004									0,034	0,003
173	015			009		001	001		003	003									0,032	0,003
174	015			008		000	001		002	003									0,029	0,003
175	015			007		000	001		002	003									0,028	0,003
176	015			007		000	001		002	002									0,027	0,003
177	014			006		000	001		001	002									0,024	0,002
178	014			005		000	001		001	001									0,022	0,002
179	014			003		000	001		001	001									0,020	0,002
180	014			001		000	001		000	000									0,016	0,002

120. Die Lichtzerstreuung durch Beugung an Eiskryställchen.

Nun bewirken die Eiskryställchen ebenso eine Lichtzerstreuung durch Beugung wie die Wassertröpfchen, die aber bei der wechselnden Lage der

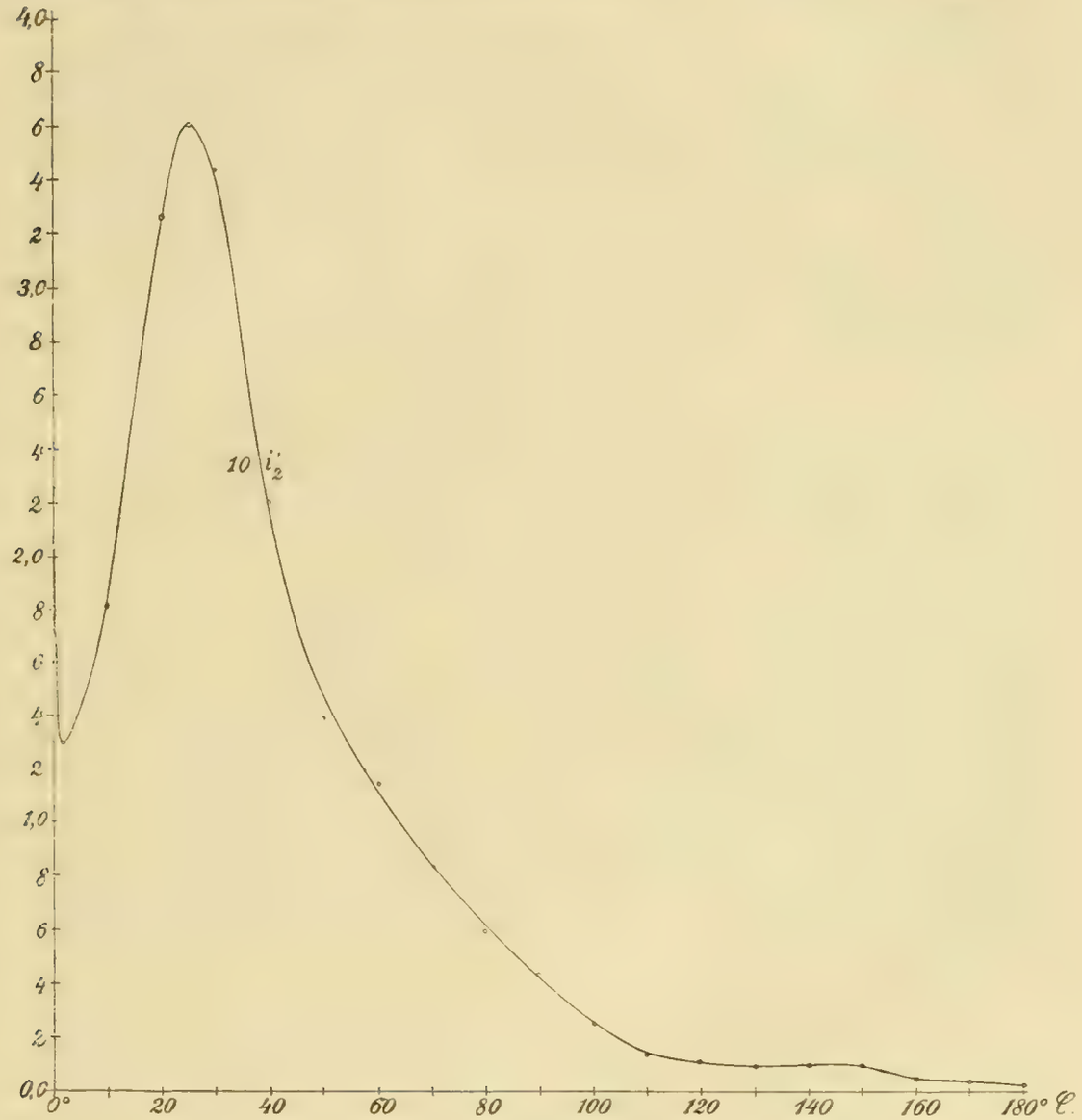


Fig. 68.

Nadeln gegen die Sonnenstrahlen offenbar eine sehr wechselnde ist. Wir haben angenommen, dass die Beugung dieselbe wie durch die Tröpfchen ist.

Auch hier wird die Hälfte des überhaupt zerstreuten Lichtes durch Beugung, die andere Hälfte durch Zurückwerfung und Brechung zerstreut.

Vierter Abschnitt.

Wirkung der kleinsten schwebenden Theilchen, die im Vergleich zur Lichtwellenlänge klein sind.

121. Experimentelle Grundlagen. Die auf S. 15 besprochene Zerstreuung des Lichtes durch schwebende Theilchen, welche klein gegen eine Wellenlänge des Lichtes sind, mögen sie nun aus Wasser, Eis oder Staub bestehen, ist wie schon früher erwähnt von Tyndall[1]) experimentell untersucht worden. Durch ein Glasrohr von etwa 1 m Länge und 7 cm innerem Durchmesser, liess er einen starken elektrischen Strahl durchgehen, während er in das Rohr verschiedene Gase leitete, in denen der auftreffende Strahl sogleich eine Zersetzung und einen Niederschlag hervorbrachte. Er wählte verschiedenartige Stoffe, z. B. Butylnitrit; jedesmal bei grösserer Verdünnung dieser Gase durch atmosphärische Luft, wenn also der Niederschlag ein feiner und fein vertheilter war, wurde bei umgebender Dunkelheit zuerst eine schwache blaue Wolke sichtbar, deren Farbe bei allmählich zunehmender oder bei ursprünglich grösserer Verdichtung in weiss überging. Das Licht der dünnen blauen Wolke war beim Beschauen in einer zum beleuchtenden Strahle senkrechten Richtung vollständig polarisirt in der durch den beleuchtenden Strahl gehenden Ebene, also mit Lichtschwingungen, die zu diesem Strahle und zur Sehrichtung senkrecht waren; während sich bei weisslichen Wolken die Sehrichtung für das Maximum der Polarisation mit zunehmender Dichte mehr und mehr zum beleuchtenden Strahle geneigt zeigte.

122. Theorie der Erscheinung. Theoretisch war die Erscheinung der Lichtzerstreuung von Stokes[2]) untersucht worden; in einfacherer Weise und mit Rücksicht auf die Beobachtungen von Tyndall dagegen von

[1]) Angeführt auf Seite 16.

[2]) Stokes, of the dynamical theory of diffractions. Transact. of Cambridge, Vol. 9, 1856, p. 1—62.

Strutt[1]); und im Anschluss an dessen kürzeste Darstellung (S. 111) wollen wir im Folgenden die mathematische Erklärung dieser Erscheinung versuchen.

Sei b die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit des Lichtes in dem betrachteten Mittel (der Luft), t die Zeit, welche von einem festen Ausgangszeitpunkte bis zum betrachteten Zeitpunkte verflossen ist, λ die Wellenlänge des Lichtes, D die Dichtigkeit des Aethers in jenem Mittel (der Luft), D' die Dichtigkeit des Aethers in dem schwebenden Theilchen, T der sehr kleine Raum dieses Theilchens, A die Schwingungsweite des Aethertheilchens in jenem Mittel (Luft), so ist die Ausweichung ζ dieses Aethertheilchens aus der Gleichgewichtslage in dem betrachteten Zeitpunkte bekanntlich

$$\zeta = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} bt,$$

wenn man den Ausgangszeitpunkt so wählte, dass in ihm die grösste Ausweichung $\zeta = A$ stattfand (bei $t = 0$). Daraus folgt die Beschleunigung zur Zeit t

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -A\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} bt.$$

Aus dieser Beschleunigung ergiebt sich die wirkende Kraft durch Multiplikation mit der beschleunigten Masse des Aethers. Diese betrage in der Luft D, im schwebenden Theilchen D' für die Raumeinheit. Ist $D' > D$, so wird im Theilchen eine Verminderung der Beschleunigung des Aethers eintreten; und es ist gerade so, wie wenn in dem schwebenden Theilchen die Aussenschwingung stattfände, dazu aber noch eine entgegengesetzte schwächere zugefügt wäre. Die im Raume T des Theilchens wirkende Kraft K, welche diese Abweichung der inneren von der äusseren Schwingung hervorbringt, wird daher aus der obigen Beschleunigung durch Multiplikation mit $-(D'-D)\,T$ erhalten, ist also

$$K = (D'-D)\,TA\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{\lambda} bt = F \cos \frac{2\pi}{\lambda} bt,$$

wobei die Schwingungsphasen für alle Aethertheilchen innerhalb des schwebenden Theilchens wegen dessen Kleinheit im betrachteten Zeitpunkte nicht merkbar verschieden sind. Man sieht hieraus, dass die beschleunigende

[1]) Strutt, on the light from the sky, its polarisation and colour. Phil. Mag., Ser. 4, Vol. 41, 1871, S. 107; insbesondere S. 117 und 111.

Kraft K mit t wechselt, aber stets proportional mit der Kraft

$$F = (D' - D)\, TA \left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^2,$$

also umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Wellenlänge λ, oder gerade proportional mit dem Quadrate der Anzahl $b : \lambda$ der Schwingungen in einer Sekunde ist.

Wenn man sich dieses Ergebniss der obigen doppelten Differentiation anschaulich machen will, so findet man, dass es daher rührt, dass bei derselben Schwingungsweite die Geschwindigkeit des schwingenden Theilchens in der Gleichgewichtslage mit der Anzahl der Schwingungen $b : \lambda$ proportional und dass die Wirkungsdauer der beschleunigenden Kraft umgekehrt mit $b : \lambda$, also die Kraft nochmals mit $b : \lambda$ proportional ist.

Die weitere Wirkung dieser Aetherschwingung im schwebenden Theilchen, welche in demselben zu der ausserhalb stattfindenden Schwingung hinzugekommen gedacht werden muss, wollen wir nun verfolgen. Die Aetherschwingungen eines durch ein gleichförmiges Mittel, wie die Luft, durchgehenden Lichtstrahles pflanzen sich bekanntlich nur vorwärts in der Richtung des Lichtstrahls aber nicht rückwärts und nicht seitwärts fort, obgleich man nach der Huygens'schen Theorie jede Stelle des Lichtstrahls als eine Lichtquelle ansehen muss.

Dass es nicht rückwärts geschieht, erklärt sich so, dass irgend eine Stelle des Lichtstrahls an eine rückwärts liegende Stelle desselben in irgend einer Zeit einen gewissen Schwingungszustand durch Fortpflanzung überträgt (ihren eigenen in der Zeit einer ganzen Anzahl von Schwingungsdauern, wenn der Abstand der beiden Stellen das ganzzahlige Vielfache einer Wellenlänge ist), dass aber eine andere Stelle, welche um eine viertel Wellenlänge weiter vorn liegt, in demselben Zeitpunkte gerade den entgegengesetzten Zustand übertragen hat, weil diese selbst in einem Schwingungszustande ist, der um eine viertel Phase dem gleichzeitigen Zustande der erst betrachteten Stelle voraus ist und weil ferner der von ihr aus auf die zurückliegende Stelle übertragene Zustand, der gleichzeitig mit dem von der ersten Stelle übertragenen ankommt, noch um eine viertel Phase voraus ist, da der Abstand jener nach vorn gelegenen Stelle um eine viertel Wellenlänge grösser ist. Diese zwei gleichzeitig übertragenen entgegengesetzten

Zustände heben sich aber auf und so alle derartigen, sodass keine Fortpflanzung rückwärts stattfindet.

Anders ist es bei der Fortpflanzung vorwärts, wo nach irgend einer Stelle von irgend zwei rückwärts liegenden Stellen gleichzeitig derselbe Schwingungszustand übertragen wird, sodass sich alle unterstützen.

Seitwärts des Lichtstrahls kann keine Fortpflanzung stattfinden, weil auf eine seitwärts liegende Stelle von den Stellen des Strahls Schwingungen mit allen möglichen Schwingungsphasen gleichzeitig übertragen werden, sodass sie sich gegenseitig aufheben. Nur wenn der Strahl schmal begrenzt ist, findet auch schwach seitlich eine Fortpflanzung statt, welche in bekannter, auch hier an einer früheren Stelle erörterten Weise die Beugung hervorbringt.

Ganz anders ist es aber mit unserm schwebenden Theilchen, welches klein ist gegen eine Wellenlänge, sodass in ihm so gut wie nur ein einziger Schwingungszustand herrscht. Hier heben sich nicht die Wirkungen verschiedener Schwingungszustände gegenseitig auf, es wirkt vielmehr wie eine einzelne fast punktartige unabhängige Lichtquelle, und überträgt ihre Schwingungen nach allen Richtungen. Jedoch ein Unterschied gegen eine ursprüngliche Lichtquelle, wie einen brennenden oder glühenden Körper, findet statt. In einem solchen schwingen die (Körper- und) Aethertheilchen nach allen Richtungen, in unserem schwebenden Theilchen aber nur in der auf der zum durchgehenden Lichtstrahle senkrechten Ebene, hierin aber, wenn das durchgehende Licht natürliches ist, nach allen Richtungen, wenn polarisirt, auf einer einzigen, und zwar in der zur Polarisationsebene senkrechten, wie gerade die hier sich ergebenden Beobachtungen zeigen, und dadurch die Anschauung Fresnels in der hier stattfindenden Streitfrage[1]) bestätigen werden.

Nehmen wir nun zunächst an, dass der ursprüngliche Lichtstrahl geradlinig polarisirt sei und dass seine Schwingungsrichtung einen Winkel α bilde mit einer auf dem Lichtstrahle senkrechten Richtung, in welcher von der Entfernung r aus auf den Punkt O dieses Strahles geblickt würde. Dann ergiebt sich die Ausweichung ζ' des schwingenden Aethers in diesem Abstande r von O

$$\zeta' = C \frac{F \sin \alpha}{b^2 D r} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - r) .$$

[1]) Dieselbe liegt etwas verwickelter, als hier dargestellt; doch ist hier nicht der Ort darauf näher einzugehen. [Die Herausgeber.]

Denn es ist ζ' proportional mit der zu r senkrechten Seitenkraft $F \sin \alpha$ des in O schwingenden Theilchens. Ferner steht bei einer gegebenen, zu derselben Wellenlänge λ gehörigen, periodisch sich ändernden, durch den Cosinus des Phasenwinkels gegebenen treibenden Kraft die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und daher auch die Ausweichung ζ' mit dieser Kraft, also mit $\cos [2\pi\ (bt-r):\lambda]$ in Verhältniss. Sodann ist ζ' umgekehrt mit der Masse des bewegten Aethers proportional; diese aber ist die Masse der während einer kleinen Zeit dt erschütterten Kugelschale, welche nach Verlauf von 1 Secunde nach der in O erregten Schwingung (bei der Dicke $b\,dt$) gleich $4\pi b^2 . b\,dt . D$ ist. Dazu kommt noch ein konstanter Faktor, da diese Schale nicht gleichförmig erschüttert wird, sondern, wie wir alsbald sehen werden, in stärkerem Grade in der Linie des ursprünglichen Lichtstrahls, als in der darauf senkrechten Linie. Die verschiedenen Unveränderlichen seien in der Unveränderlichen C einbegriffen. Sodann ist ζ' mit der Wirkungsdauer dt der Kraft proportional. Endlich wissen wir, dass die Lichtstärken in den Abständen r und b von dem schwebenden Theilchen sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände, also wie $b^2 : r^2$ verhalten, die Ausweichungen daher wie $b : r$. Es tritt also in ζ' das Produkt der Faktoren auf

$$\frac{C}{b^2 . b\,dt . D} . dt . \frac{b}{r} = \frac{C}{b^2\, r D} .$$

Wir erhalten daher durch Zusammenfügen aller erhaltenen Faktoren den obigen Ausdruck für ζ'. Und wenn wir darin den früher erhaltenen Ausdruck von F einführen und den Zahlenfaktor $4\pi^2$ in C einbegreifen, wird

$$\zeta' = AC \frac{D'-D}{D} \frac{T}{r\lambda^2} \sin \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt-r) .$$

Man sieht, dass die Länge der Zeit dt gar nicht in die Formel eintritt, indem sich beide dt in dem vorletzten Ausdrucke aufheben. Man kann sich davon leicht Rechenschaft geben. Denkt man sich als die kleine Zeit dt die Dauer einer Viertelschwingung, so wird in dieser Zeit, von der Gleichgewichtslage aus gerechnet, die ganze Ausweichung ζ' hervorgebracht, und diese müsste daher proportional mit diesem dt sein; aber die Dicke der erschütterten Aetherschicht und deren Masse sind ebenfalls proportional mit dt, wodurch ζ' auch umgekehrt proportional mit dt wird, sodass die Zeit dt

oder auch die Wellenlänge λ nicht von neuem einen Einfluss gewinnt, sondern dass das frühere λ^2 im Nenner bestehen bleibt.

Die letzte Formel zeigt, dass die Stärke des in der Richtung r zerstreuten Lichtes nun mit dem Quadrate der Schwingungsweite (das ζ' bei $\cos[2\pi(bt-r):\lambda]=1$) im Verhältniss steht; und da ebenso die Stärke des einfallenden Lichtes mit A^2 in demselben Verhältniss steht, so ist das Verhältniss der Stärke des zerstreuten Lichtes zu der des einfallenden, welches durch eine Anzahl von schwebenden Theilchen hervorgebracht wird,

$$l = C^2 \frac{(D'-D)^2}{D^2} \sin^2\alpha \frac{\Sigma T^2}{\lambda^4 r^2}.$$

Ist der einfallende Strahl natürliches Licht, also nicht polarisirt, so kann man ihn in zwei von der halben Stärke mit $\alpha = 90^0$ und $\alpha = 0^0$ zerlegen, so dass an die Stelle von $\sin^2\alpha$ der Faktor

$$\frac{1}{2}\sin^2 90^0 + \frac{1}{2}\sin^2 0^0 = \frac{1}{2}$$

tritt. Bildet aber der zerstreute Strahl mit dem ursprünglichen nicht einen rechten Winkel, wie wir bisher annahmen, sondern den Winkel φ, so erhält α die beiden Werthe 90^0 und $(90^0-\varphi)$, so dass $\sin^2\alpha$ durch $^1/_2(1+\cos^2\varphi)$ ersetzt wird. Begreift man $^1/_2$ in C^2 ein, so ist die verhältnissmässige Stärke des zerstreuten Strahles

$$l = C^2 \frac{(D'-D)^2}{D^2}(1+\cos^2\varphi)\frac{\Sigma T^2}{\lambda^4 r^2}. \qquad (61\,a)$$

Die zwei wesentlichen Folgerungen aus der letzten Formel sind:

1. Schwebende Theilchen, deren Ausdehnung klein gegen eine Wellenlänge des Lichtes ist, zerstreuen Licht, dessen Stärke im Verhältniss zur Stärke des einfallenden Lichtes umgekehrt proportional mit der vierten Potenz dieser Wellenlänge ist, also mehr Licht von den Strahlen von kleiner Wellenlänge (Violett und Blau), als von dem von grosser Wellenlänge (Gelb und Roth).

2. Die Menge dieses zerstreuten Lichtes ist mit $(1+\cos^2\varphi)$ proportional, also am kleinsten, wenn $\varphi = 90^0$, oder der Strahl des zerstreuten Lichtes senkrecht auf dem des ursprünglichen Lichtes steht und am grössten, nämlich doppelt so gross als im ersten Falle, wenn $\varphi = 0^0$, oder wenn das

zerstreute Licht in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung mit dem ursprünglichen Lichte fällt.

Daraus folgt, dass das blaue Licht des Himmels aus der vorherrschenden Zerstreuung der violetten und blauen Strahlen durch sehr kleine schwebende Theilchen zu erklären ist, in welch letzterer Farbe der Himmel öfter im Zenith besonders von hohen Bergen aus erscheint.

123. Prüfung der Theorie durch die Erfahrung. Strutt fand auch das theoretisch abgeleitete Gesetz der vierten Potenzen der Wellenlängen erfahrungsmässig bestätigt. Er bildete ein Spektrum des vom Zenith genommenen Lichtes des Himmels und desjenigen der Sonne, und fand, dass die Verhältnisse der Lichtstärken des ersteren zu denen des zweiten Spektrums bei gleichen Farben waren bei der Beobachtung, in

C (roth)	D (orange)	F (grünlich blau)
25	41	90,

und nach dem Gesetze der umgekehrten Potenzen der Wellenlängen

25	40	80,

was bei den verwickelten Verhältnissen eine gute Uebereinstimmung anzeigt.

Ferner erklärt sich die gelbliche Farbe der Sonne, die um so mehr ins Rothe übergeht, je dicker die Luftschicht, durch welche die Strahlen gegangen sind, indem mehr blaues und weniger gelbes und rothes Licht zerstreut wurde. Daraus erklärt sich auch die Erscheinung, dass jedes Licht durch dicken Nebel roth erscheint und dass das rothe Signallicht zur kräftigen Durchdringung des Nebels am geeignetsten ist.

Langley[1]) zieht aus jener Erscheinung den Schluss, dass uns die Sonne ausserhalb unserer Atmosphäre bläulich erscheinen würde. Er hat, wie schon S. 17 bemerkt wurde, durch Beobachtungen festgestellt, dass die Strahlen von kürzerer Wellenlänge (wie blau) in viel höherem Grade durch die Atmosphäre absorbirt (zerstreut) werden, als die von längerer (wie roth).

Man hat also der atmosphärischen Luft nicht eine bestimmte Farbe zuzuschreiben, sondern sie erscheint bald blau, bald gelb und roth. Sie

[1]) Langley, The selective absorption of solar energy. Phil. Mag. Ser. 5, vol. 15, p. 153—183 (das Obige S. 180).

theilt diese Eigenschaft mit allen Körpern, die ihre Farbe einer Trübung verdanken, so unter den festen Körpern dem Opal, der gegen hellen Grund blau, gegen dunklen gelb und roth erscheint. Diese Ansicht wurde schon von Göthe in seiner Farbenlehre ausgesprochen, in welcher die Grundlage von der Wirkung des trüben Mittels gebildet wird, welches auf hellem Grunde gelb und roth, auf dunklem Grunde blau und violett erscheint.[1]) Er brachte die Trübung im Wasser durch einige Tropfen wohlriechenden Wassers und andere Stoffe (162, 163) hervor, im künstlichen Opal durch Metallkalke und calcinirte Knochen (166) (der natürliche Opal ist Quarz, der durch Wasser oder Metalloxyde getrübt ist), und betrachtete die atmosphärische Luft als ein Mittel, das durch Dünste, Rauch oder Staub (154) getrübt ist. An allen diesen Stoffen machte er dieselben Beobachtungen, und erklärte damit die gelbliche oder rothe Farbe der tiefstehenden Sonne und ihrer benachbart erscheinenden Luft, und die blaue der entfernten Luft, welche den dunklen Weltraum zum Hintergrunde hat. Die Erscheinung von Gelb oder Blau im trüben Mittel, je nachdem es vor hellem oder dunklem Grunde erscheint, bildeten ihm Grundthatsachen, auf welchen er nun seine fehlerhafte Theorie des Farbenspektrums aufbaute (199—214). Eine Erklärung dieser Grundthatsachen giebt Göthe nicht.

Aus der oben mitgetheilten Erklärung von Stokes und Strutt ergiebt sich nun ferner, dass das senkrecht zum einfallenden Lichtstrahle durch kleine schwebende Theilchen zerstreute Licht vollständig polarisirt ist, da es nur die Schwingungen überträgt, welche senkrecht zur Ebene beider Strahlen stehen; das schief (unter dem Winkel φ) zerstreute Licht ist nur theilweise polarisirt. Bei dem Himmel findet man im senkrecht zum Sonnenstrahle polarisirten Lichte keine vollständige Polarisation, was sowohl daher rührt, dass die vorhandenen grösseren Wassertröpfchen (S. 19) dieses Licht nicht vollständig polarisiren, als auch daher, dass das in der fraglichen Richtung in das Auge fallende Licht schon mehrfach zerstreutes enthält.

124. Helligkeitskurve für das durch kleinste Theilchen zerstreute Licht. Die Stärke l des durch diese Erschütterung der

[1]) Göthe, Farbenlehre, didaktischer Theil (Nr. 150 u. s. w.).

schwebenden Theilchen zerstreuten Lichtes im Verhältniss zur Ablenkung φ ist mit $(1+\cos^2\varphi)$ proportional, da nach Formel (61a) (S. 227) alle anderen darin vorkommende Grössen von φ unabhängig sind. Es sei

$$l = c\,(1+\cos^2\varphi),$$

worin c eine noch unbekannte Unveränderliche ist, die von der Anzahl und Grösse dieser Theilchen abhängt und nur durch Erfahrung, d. i. durch

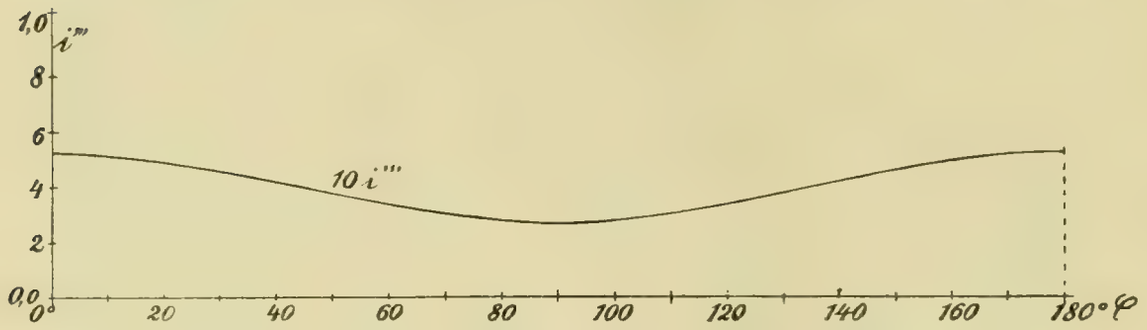


Fig. 69.

Messungen der Himmelshelligkeiten bestimmt werden kann, die aber zweifellos mit den verschiedenen Zuständen des Himmels in hohem Grade wechselt.

Für die Werthe von $(1+\cos^2\varphi)$ wurde eine Tabelle von Grad zu Grad berechnet, wovon hier ein Theil wiedergegeben sei:

φ	0°	15	30	45	60	75	90
	180	165	150	135	120	105	
$(1+\cos^2\varphi)$	2,000	1,932	1,750	1,500	1,250	1,068	1,000

Die obige Gleichung ist für die später benutzte Konstante $c = 0{,}026$
Fig. 69. in Fig. 69 veranschaulicht. Die Grösse l wird später mit i''' bezeichnet.

Fünfter Abschnitt.

Vereinigung der verschiedenen Ursachen zur Feststellung des Gesetzes der Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre.

125. Die drei Arten der Lichtzerstreuung mit zwei Unveränderlichen. Wir haben jetzt die drei Ursachen der Zerstreuung des Lichtes durch die Atmosphäre verfolgt, die durch Zurückwerfung und Brechung in den Wassertröpfchen oder in den Eiskryställchen entstehen. Jede dieser Zerstreuungen war ziemlich unabhängig von der Grösse dieser Theilchen;

nur der Grad der Verwaschung der Regenbogen und des hellen Eisringes war davon abhängig. Doch wollen wir die gewählten Verhältnisse als unveränderlich beibehalten. Die Gesammtmenge des so zerstreuten Lichtes nahmen wir in jedem Falle vorläufig $= 1$ an, was wir alsbald dahin ändern müssen, dass die Gesammtmenge des durch die drei Ursachen zerstreuten Lichtes $= 1$ wird.

Die zweite Ursache der Lichtzerstreuung war die Beugung. Dabei musste die Gesammtmenge des gebeugten Lichtes gleich der des erstgenannten abgelenkten Lichtes, also vorläufig ebenfalls $= 1$ gesetzt werden; die Ablenkung des noch merkbaren gebeugten Lichtes setzten wir aber in ziemlich willkürlicher Weise $= 18°$. Wir müssen diesen Winkel durch einen unbekannten β ersetzen, derart, dass die Ergebnisse der Rechnung mit denen der Messung möglichst übereinstimmen. Um die neue Lichtzerstreuung zu erhalten, vervielfachen wir jeden zu einer Helligkeit J' nach Tab. 26 gehörigen Ablenkungswinkel φ mit $\beta : 18$ und berechnen dann von neuem den Reductionskoefficienten C, sodass $i'' = CJ'$, nach den Formeln der S. 108, sodass die Menge des zerstreuten Lichtes $= 1$ wird.

Die dritte Ursache der Lichtzerstreuung war die durch die Erschütterung der kleinsten schwebenden Körperchen. Sie lieferte (S. 230) die Lichtmenge

$$l = c\,(1 + \cos^2\varphi),$$

worin c eine unbekannte Unveränderliche.

126. Bestimmung der zwei Unveränderlichen für die Berechnung der Gesammthelligkeiten. Es sind also zwei unveränderliche β und c so zu bestimmen, dass sie den Beobachtungen möglichst entsprechen. Die Beobachtungen wechseln natürlich von Tag zu Tag und von Stunde zu Stunde; wir haben den im Anfang bezeichneten klaren Septembertag zu Grund zu legen, an welchem wir unsere Beobachtungen machten. Für ihn allein gelten dann unsere Zahlentabellen mit einiger Sicherheit. Zur Bestimmung der zwei Grössen β und c mussten wir drei Himmelsstellen auswählen, welche nach Tab. 1, Fig. 1 zwei Verhältnisszahlen der Helligkeiten liefern; diese würden die 2 Unbekannten bestimmen. Statt 3 wollen wir aber 5 Stellen von recht verschiedenen und bezeich-

nenden Helligkeiten wählen, wobei aber dann auch keine volle, sondern nur eine möglichst nahe Uebereinstimmung von Rechnung und Messung an diesen Stellen, aber dafür auch eine bessere Uebereinstimmung an allen Stellen erreicht werden kann. Diese Stellen seien in dem Vertikalkreise der Sonne gelegen, besitzen also die Azimuthe $\alpha = 0$ oder $\alpha = 180^0$. Es sind dies folgende: 1) Unmittelbar neben der Sonne $\alpha = 0^0$, Zenithdistanz $\zeta = 46^0$, wofür man durch Verlängerung der Messungskurve $H = 23{,}8$ erhält. 2) Die gegenüberstehende Stelle $\alpha = 180$, $\zeta = 46^0$, wofür man durch Einschaltung $H = 0{,}178$ erhält. 3), 4), 5) sind unmittelbar gemessen. Bezeichnen wir die Messungsergebnisse mit Klammern, so ist:

$$
\begin{array}{llll}
1) & \alpha = 0^0, & \zeta = 46^0, & (H^s) = 23{,}8; \\
2) & \alpha = 180, & \zeta = 46, & (H^{s'}) = 0{,}178; \\
3) & \alpha = 0, & \zeta = 90, & (H^0) = 4{,}67; \\
4) & \alpha = 180, & \zeta = 90, & (H^{180}) = 1{,}00; \\
5) & \alpha = 0, & \zeta = 67, & (H^{\zeta}) = 8{,}38.
\end{array}
$$

Die Berechnung der Helligkeiten an diesen Stellen können wir nur nach den später erst entwickelten Formeln vornehmen. Um aber hier schon das Gesetz der Lichtzerstreuung für jenen Septembertag bestimmen zu können, wollen wir vorgreifend die Rechnungsergebnisse mittheilen. Wir werden hierzu später noch einige Voraussetzungen machen müssen. Wir nehmen eine mittlere von der Meteorologie ermittelte Vertheilung des Wasserdampfes in der Atmosphäre an, wir setzen die Mengen des Dunstes, d. h. der Wassertröpfchen und Eiskryställchen mit jenen Dampfmengen proportional, wir nehmen auf meteorologisch bestimmter Grundlage für jenen Tag eine gewisse Höhe der Grenze zwischen Wasser und Eis an.

Dann machte ich probeweise Annahmen für β und c und erhielt in der sechsten Probe für $\beta = 30^0$ und $c = 0{,}026$ die von der Sonne unmittelbar an jenen Stellen hervorgebrachten alsbald anzugebenden Helligkeiten H_1. Die Himmelshelligkeit wird aber sehr wesentlich durch die von anderen Theilen der Atmosphäre eingestrahlte Lichtmenge beeinflusst, die nun auch berechnet werden musste, wozu aber ein bedeutender Zeitaufwand nöthig ist. Da ich aber schon aus anderen angenommenen Werthen von β und c, die ich auf weniger ausgedehnter Grundlage bestimmt hatte, die Berechnung für den ganzen Himmel vorgenommen, dabei freilich keine genügende

Uebereinstimmung mit den Beobachtungen fand, so entnahm ich wenigstens aus dieser Rechnung das Verhältniss der unmittelbar durch die Sonne hervorgebrachten zu der gesammten unter Mitwirkung des Luftreflexes hervorgebrachten Helligkeit H, unter Vernachlässigung des geringen Bodenreflexes. An manchen Stellen ist sogar $H = 2\,H_1$. Dadurch fand ich folgende Zahlen; die letzte Reihe giebt die Verhältnisse für $H^{180} = 1$.

			$H : H^{180}$
1)	$H_1^s = 5{,}96$;	$H^s = 1{,}1\ H_1^s = 6{,}58$;	23,1 :
2)	$H_1^{s'} = 0{,}0236$;	$H^{s'} = 2\ H_1^{s'} = 0{,}0472$;	0,166;
3)	$H_1^0 = 0{,}4326$;	$H^0 = 1{,}85\ H_1^0 = 0{,}802$;	2,82 ;
4)	$H_1^{180} = 0{,}1424$;	$H^{180} = 2\ H_1^{180} = 0{,}2848$;	1,00 ;
5)	$H_1^{\zeta} = 1{,}356$;	$H^{\zeta} = 1{,}6\ H_1^{\zeta} = 2{,}168$;	7,62 .

Die Zahlen der letzten Reihe stimmen ausser 3) mit denen der Beobachtung (S. 232) gut überein; 3) zeigt 2,82 statt 4,67. Wir müssen es darauf ankommen lassen, ob bei genauer Berechnung des Luftreflexes die Uebereinstimmung vollständiger wird. Immerhin ist die nahe Uebereinstimmung von 5 Zahlen, von denen schon 3 bestimmend für β und c sind, ein gutes Zeichen für unsere Funktion der Lichtstärke von der Ablenkung. Eine volle Uebereinstimmung ist aber nie zu erwarten, da die Zustände der Atmosphäre der Zeit nach und den Schichten und der Himmelsstelle nach stets wechseln, eine auch möglichst vollkommene Theorie aber eine gewisse Gleichförmigkeit vorauszusetzen gezwungen sein wird.

In Bezug auf die Beugung werden nun die in Tab. 26 niedergelegten Ergebnisse dahin abgeändert, dass alle zu den J' gehörigen Werthe von φ mit 30 : 18 vervielfacht werden, ohne Aenderung der J'. mit Einschaltung solcher J' für die zwischenliegenden ganzen Grade. Dadurch erhält man die Tabelle 59. Aus ihr sind die Werthe $J' \sin\varphi$ berechnet und eingetragen. Tab. 59.
Dann ergiebt sich aus (s. S. 123)

$$1 = 2\,\pi\ \triangle\ \varphi \sum_0^{\pi} \sin\varphi\ C J'$$

für $\triangle\ \varphi = \pi : 180$, und für $\Sigma \sin\varphi\, J' = 0{,}9529$ aus Tab. 59, $C = 9{,}57$ und daraus die Reihe der $i'' = C\,J'$. Man bemerkt, dass diese Werthe von i'' fast genau $(18 : 30)^2 = 0{,}36$ mal so gross, als die von Tab. 26 sind, was deswegen der Fall sein muss, weil die gleiche Lichtmenge 1 im zweiten

Tabelle 59.

Stärke i'' des gebeugten Lichtes bei einer Ablenkung bis zu $\varphi = 30^0$.

φ	0^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
J'	0,776	769	753	732	706	672	627	580	529	476	421	365
$J' \sin \varphi$	0,0034	0135	0263	0384	0493	0587	0654	0708	0733	0746	0732	0697
i''	7,420	7,350	7,205	7,003	6,750	6,440	6,000	5,540	5,060	4,550	4,026	3,490

φ	12^0	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
J'	0,310	256	205	157	115	082	057	039	029	022	016	011
$J' \sin \varphi$	0,0644	0575	0495	0406	0316	0240	0176	0127	0099	0079	0060	0043
i''	2,960	2,452	1,958	1,503	1,103	0,783	544	372	277	210	153	105

φ	24^0	25	26	27	28	29	30
J'	0,008	006	004	003	002	001	000
$J' \sin \varphi$	0,0032	0025	0018	0014	0009	0005	0000
i''	0,077	057	040	024	010	003	000

Fall auf eine nahezu viermal so grosse Fläche der Kugel ausgebreitet wird. Diese Werthe von i'', welche von $\varphi < 30^0$ an unbeachtet bleiben können, sind in Tab. 60 (S. 236 und 237) eingetragen. Tab. 60.

Ebenso sind für die Helligkeit durch Erschütterung die Werthe von $i''' = (1+\cos^2 \varphi)\ c = (1+\cos^2 \varphi)\ 0{,}026$ berechnet und in Tab. 60 eingetragen.

127. Endgiltige Einheit für die Gesammtmenge des zerstreuten Lichtes. Nun ist es noch nothwendig, als endgiltige Einheit die Gesammtmenge des von einem Theilchen der Atmosphäre zerstreuten Lichtes einzuführen. Nach der bisherigen Einheit ist die Gesammtmenge des von einem solchen Theilchen durch Zurückwerfung und Brechung zerstreuten Lichtes $= 1$, was bei den wässrigen Schichten durch Tröpfchen, bei den eisigen durch Kryställchen geschieht und die Gesammtmenge des durch Beugung zerstreuten ebenfalls $= 1$. Die durch Erschütterung zerstreute Lichtmenge ergiebt sich aber als L''' aus der Formel für L' auf S. 110, wenn man die Lichtstärke l durch i''' ersetzt

$$L''' = 2\,\pi \int_0^{\pi} i''' \sin\varphi \, d\varphi .$$

Für mechanische Quadratur kann man wieder $d\varphi$ durch $\triangle\varphi = \pi : 180$ ersetzen und erhält dann

$$L''' = \frac{\pi^2}{90} \sum_0^{180} i''' \sin\varphi = 2\,\frac{\pi^2}{90} \sum_0^{90} i''' \sin\varphi ,$$

da die Funktion $i''' \sin\varphi$ von $\varphi = 90$ bis $\varphi = 0$ oder $= 180$ symmetrisch ist. Dies ausgeführt, ergab $L''' = 0{,}4372$. Da aber $i'''\,(1+\cos^2\varphi)$ 0,026, so lässt sich das Integral leicht ausführen, indem

$$L''' = 2\,\pi \int_0^{\pi} 0{,}026\;(1+\cos^2\varphi)\,\sin\varphi \, d\varphi .$$

Es ist nämlich

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right),$$

$$(1+\cos^2\varphi)\,\sin\varphi = \frac{3}{2}\,\sin\varphi + \frac{1}{2}\,\sin\varphi\cos 2\varphi$$

$$-\frac{3}{2}\,\sin\varphi + \frac{1}{4}\left(\sin(\varphi+2\varphi) + \sin(\varphi-2\varphi)\right)$$

$$= \frac{5}{4}\,\sin\varphi + \frac{1}{4}\,\sin 3\varphi ;$$

daher

$$L''' = 2\,\pi\,.\,0{,}026 \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{4}\,\sin\varphi + \frac{1}{4}\,\sin 3\varphi\right) d\varphi$$

$$= 2\,\pi\,.\,0{,}026 \left[\left(-\frac{5}{4}\cos\varphi - \frac{1}{12}\,\cos 3\varphi\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\,\pi\,.\,0{,}026 \left(+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right) = 6{,}283\,.\,0{,}026\,.\,\frac{8}{3} = 0{,}4355,$$

was mit dem obigen Ergebnisse gut übereinstimmt.

Die dreierlei Helligkeitsursachen liefern daher zusammen die Lichtmenge $1+1+0{,}4355 = 2{,}4355$; um diese auf 1 zu bringen, müssen die einzelnen Lichtmengen durch 2,4355 getheilt werden.

128. Die Helligkeitskurven des insgesammt zerstreuten Lichtes für die wässerige und für die eisige Schicht. Wir bilden

Tabelle 60.

Lichtzerstreuung in der wässerigen (i_1) und in der eisigen (i_2) Dunstschicht.

φ	i_1'	i_2'	i''	i'''	$i_1'+i''+i'''$	$i_2'+i''+i'''$	i_1	i_2	φ	i_1'	i_2'	i''	i'''	$i_1'+i''+i'''$	$i_2'+i''+i'''$	i_1	i_2
		0,		0,							0,		0,	0,	0,	0,	0,
0°	1,295	204	7,420	052	8,767	7,676	3,600	3,152	44°	141	176		039	181	215	074	088
1	1,286	160	7,350	052	8,688	7,562	3,568	3,105	45	130	167		039	169	206	069	084
2	1,276	136	7,205	052	8,533	7,393	3,502	3,034	46	119	158		039	157	197	064	081
3	1,262	129	7,003	052	8,317	7,184	3,414	2,949	47	109	151		038	147	189	060	078
4	1,244	131	6,750	052	8,046	6,933	3,302	2,846	48	099	146		038	137	184	056	075
5	1,223	135	6,440	052	7,715	6,627	3,167	2,720	49	089	142		037	126	179	052	073
6	1,199	141	6,000	052	7,251	6,193	2,976	2,542	50	081	138		037	118	175	048	072
7	1,171	149	5,540	051	6,762	5,740	2,777	2,355	51	075	135		036	111	171	046	070
8	1,140	158	5,060	051	6,251	5,269	2,566	2,163	52	069	132		036	105	168	043	069
9	1,106	169	4,550	051	5,707	4,770	2,342	1,959	53	064	130		035	099	165	041	068
10	1,069	181	4,026	051	5,146	4,258	2,112	1,749	54	060	128		035	095	163	039	067
11	1,030	196	3,490	051	4,571	3,737	1,877	1,533	55	055	126		035	090	161	037	066
12	0,989	211	2,960	051	4,000	3,222	1,642	1,322	56	052	123		034	086	157	035	064
13	946	227	2,452	051	3,449	2,730	1,416	1,120	57	047	121		034	081	155	033	063
14	903	244	1,958	050	2,911	2,252	1,194	0,923	58	043	119		033	076	152	031	062
15	860	258	1,503	050	2,413	1,811	0,990	742	59	039	116		033	072	149	030	061
16	819	273	1,103	050	1,972	1,426	809	585	60	036	114		033	069	147	028	060
17	779	288	0,783	050	1,612	1,121	661	460	61	032	111		032	064	143	026	059
18	740	301	544	050	1,334	0,895	547	367	62	028	108		032	060	140	025	057
19	702	314	372	049	1,123	735	461	302	63	025	104		031	056	135	023	055
20	667	326	277	049	0,993	652	408	268	64	023	102		031	054	133	022	054
21	633	336	210	049	892	595	366	244	65	020	099		031	051	130	021	053
22	600	345	153	048	801	546	329	224	66	017	095		030	047	125	019	051
23	569	352	105	048	722	505	296	207	67	015	092		030	045	122	018	050
24	539	357	077	048	664	482	272	198	68	013	089		030	043	119	018	049
25	509	360	057	047	613	464	252	190	69	011	086		029	040	115	017	047
26	479	360	040	047	566	447	232	183	70	010	083		029	039	112	016	046
27	451	359	024	047	522	430	214	176	71	009	080		029	038	109	015	045
28	423	356	010	046	479	412	197	169	72	007	078		028	035	106	014	044
29	397	350	003	046	446	399	183	164	73	006	075		028	034	103	014	042
30	370	343	000	045	415	388	170	159	74	005	072		028	033	100	013	041
31	346	334		045	391	379	160	155	75	004	070		028	032	098	013	040
32	325	324		045	370	369	152	151	76	004	068		028	032	096	013	039
33	305	313		044	349	357	143	146	77	004	066		027	031	093	013	038
34	286	301		044	330	345	135	141	78	003	064		027	030	091	012	037
35	268	287		043	311	330	128	135	79	003	062		027	030	089	012	037
36	251	274		043	294	317	121	130	80	003	060		027	030	087	012	036
37	235	261		043	278	304	114	125	81	003	058		027	030	085	012	035
38	218	247		042	260	289	107	119	82	003	056		027	030	083	012	034
39	202	233		042	244	275	100	113	83	003	054		027	030	081	012	033
40	189	220		041	230	261	094	107	84	003	053		026	029	079	012	032
41	176	207		041	217	248	089	102	85	003	052		026	029	078	012	032
42	163	196		040	203	236	083	097	86	003	050		026	029	076	012	031
43	151	185		040	191	225	078	092	87	003	048		026	029	074	012	030

φ	i_1'	i_2'	i''	i'''	$i_1'+i''+i'''$	$i_2'+i''+i'''$	i_1	i_2	φ	i_1'	i_2'	i''	i'''	$i_1'+i''+i'''$	$i_2'+i''+i'''$	i_1	i_2
	0,	0,		0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,		0,	0,	0,	0,	0,
88°	002	046		026	028	072	012	030	134	018	009		038	056	047	023	019
89	002	044		026	028	070	011	029	135	019	009		039	058	048	024	020
90	002	043		026	028	069	011	028	136	019	009		040	059	049	024	020
91	002	042		026	028	068	011	028	137	020	009		040	060	049	025	020
92	002	040		026	028	066	011	027	138	021	009		040	061	049	025	020
93	002	038		026	028	064	011	026	139	021	010		041	062	051	025	021
94	002	036		026	028	062	011	025	140	022	010		041	063	051	026	021
95	002	034		026	028	060	012	025	141	022	010		042	064	052	026	021
96	002	033		026	028	059	012	024	142	023	010		042	065	052	027	021
97	002	031		027	029	058	012	024	143	023	010		043	066	053	027	022
98	002	029		027	029	056	012	023	144	024	010		043	067	053	028	022
99	002	027		027	029	054	012	022	145	024	010		043	067	053	028	022
100	002	025		027	029	052	012	021	146	025	010		044	069	054	028	022
101	002	024		027	029	051	012	021	147	026	010		044	070	054	029	022
102	002	022		027	029	049	012	020	148	026	010		045	071	055	029	022
103	002	021		027	029	048	012	020	149	026	010		045	071	055	029	022
104	002	019		028	030	047	012	019	150	027	009		045	072	054	030	022
105	002	018		028	030	046	012	019	151	027	009		046	073	055	030	022
106	002	017		028	030	045	012	018	152	027	009		046	073	055	030	022
107	002	016		028	030	044	013	018	153	028	008		047	075	055	031	022
108	003	015		028	031	043	013	018	154	028	008		047	075	055	031	022
109	003	014		029	032	043	013	018	155	028	007		047	075	054	031	022
110	003	014		029	032	043	013	018	156	029	007		048	077	055	032	022
111	004	013		029	033	042	014	018	157	029	006		048	077	054	032	023
112	004	013		030	034	043	014	018	158	029	006		048	077	054	032	023
113	004	013		030	034	043	014	017	159	030	005		049	079	054	032	023
114	005	012		030	035	042	014	017	160	030	005		049	079	054	032	023
115	005	012		031	036	043	015	017	161	030	005		049	079	054	033	023
116	005	012		031	036	043	015	017	162	030	004		050	080	054	033	023
117	005	011		031	036	042	015	018	163	031	004		050	081	054	033	023
118	005	011		032	037	043	015	018	164	031	004		050	081	054	033	023
119	006	011		032	038	043	016	018	165	031	004		050	081	054	033	023
120	006	011		033	039	044	016	018	166	031	004		050	081	054	033	023
121	007	011		033	040	044	016	018	167	031	004		051	082	055	034	023
122	008	011		033	041	044	017	018	168	032	004		051	083	055	034	023
123	009	010		034	043	044	018	018	169	032	004		051	083	055	034	023
124	010	010		034	044	044	018	018	170	032	004		051	083	055	034	023
125	010	010		035	045	045	019	018	171	032	003		051	083	054	034	023
126	011	010		035	046	045	019	018	172	032	003		051	083	054	034	023
127	012	010		035	047	045	019	018	173	032	003		051	083	054	034	023
128	013	009		036	049	045	020	018	174	032	003		052	084	055	034	023
129	014	009		036	050	045	020	018	175	032	003		052	084	055	034	023
130	015	009		037	052	046	021	019	176	032	003		052	084	055	034	023
131	015	009		037	052	046	021	019	177	032	002		052	084	054	034	023
132	016	009		038	054	047	022	019	178	032	002		052	084	054	034	023
133	017	009		038	055	047	023	019	179	032	002		052	084	054	034	023
									180	032	002		052	084	054	034	023

nun in Tab. 60 zuerst mit den bisherigen Zahlen die gesammte Lichtmenge für die wässerige Schicht $= i_1' + i'' + i'''$, für die eisige $i_2' + i'' + i'''$, und erhalten daraus durch Theilung mit 2,4355 die in der wässerigen und in der eisigen Dunstschicht zerstreuten Lichtmengen i_1 und i_2. Die Ergebnisse sind in Tab. 60 eingetragen und in Fig. 70 (φ, i_1) und Fig. 71 (φ, i_2) niedergelegt. Die letztere Figur zeigt wie die für die Wassertröpfchen ein starkes Abfallen von $\varphi = 0^0$ an, woraus sich ergiebt, dass auch im Norden bei starker Kälte doch in der Nähe der Sonne die grösste Helligkeit herrscht.

Fig. 70 und 71.

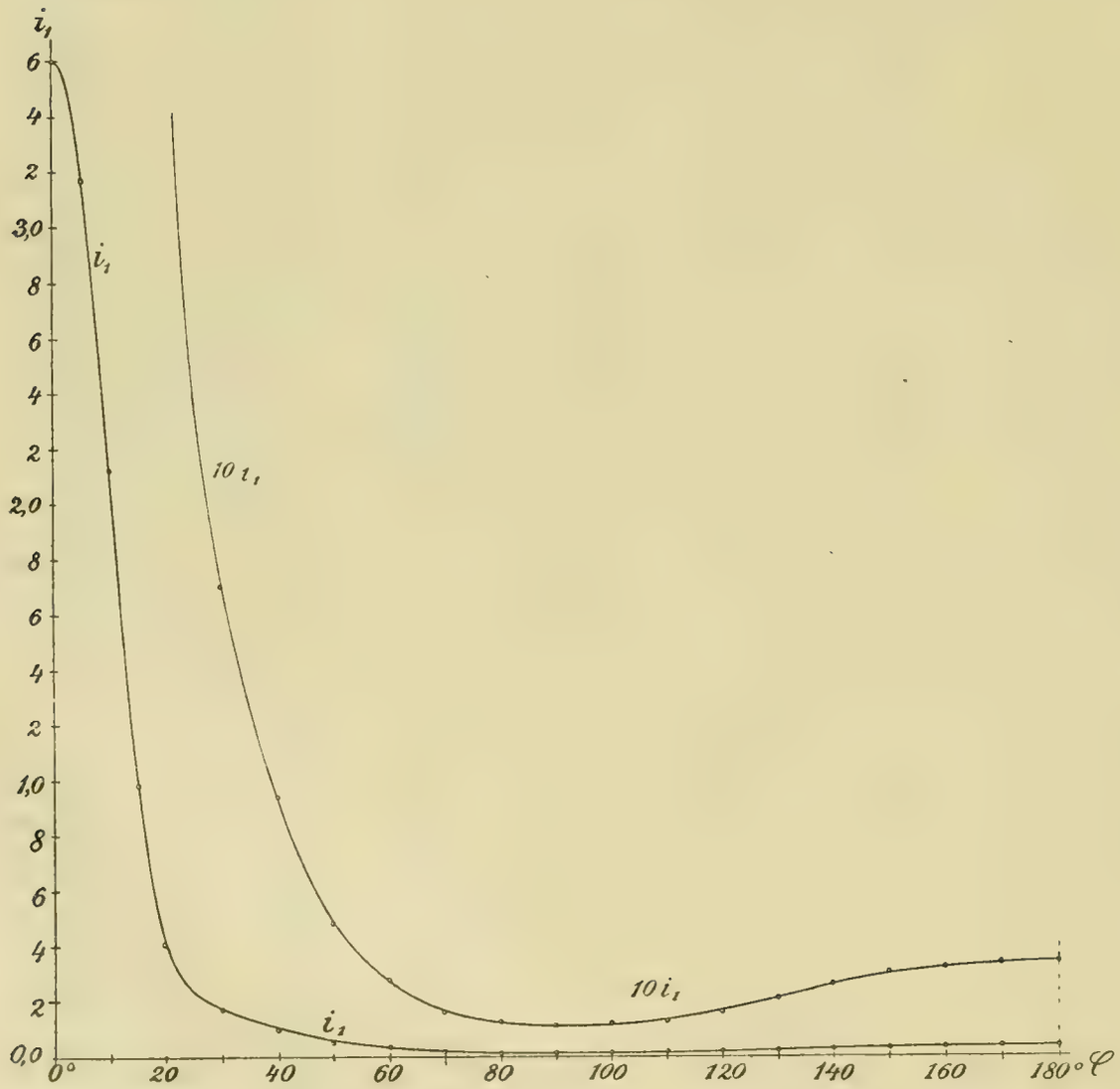


Fig. 70.

Gegen $\varphi = 180^0$ findet aber eine stetige Abnahme von i_2 statt, von einer geringfügigen durch den Antheil i''' bewirkten Zunahme abgesehen, so dass bei dem alleinigen Vorhandensein von Eiskrystallen in der Atmosphäre der Gegenpunkt der Sonne (beim Untergang) kaum merklich heller erscheinen dürfte. Die etwas unstetige Form der Kurve erklärt sich aus den mannigfachen Arten von Lichtbüscheln.

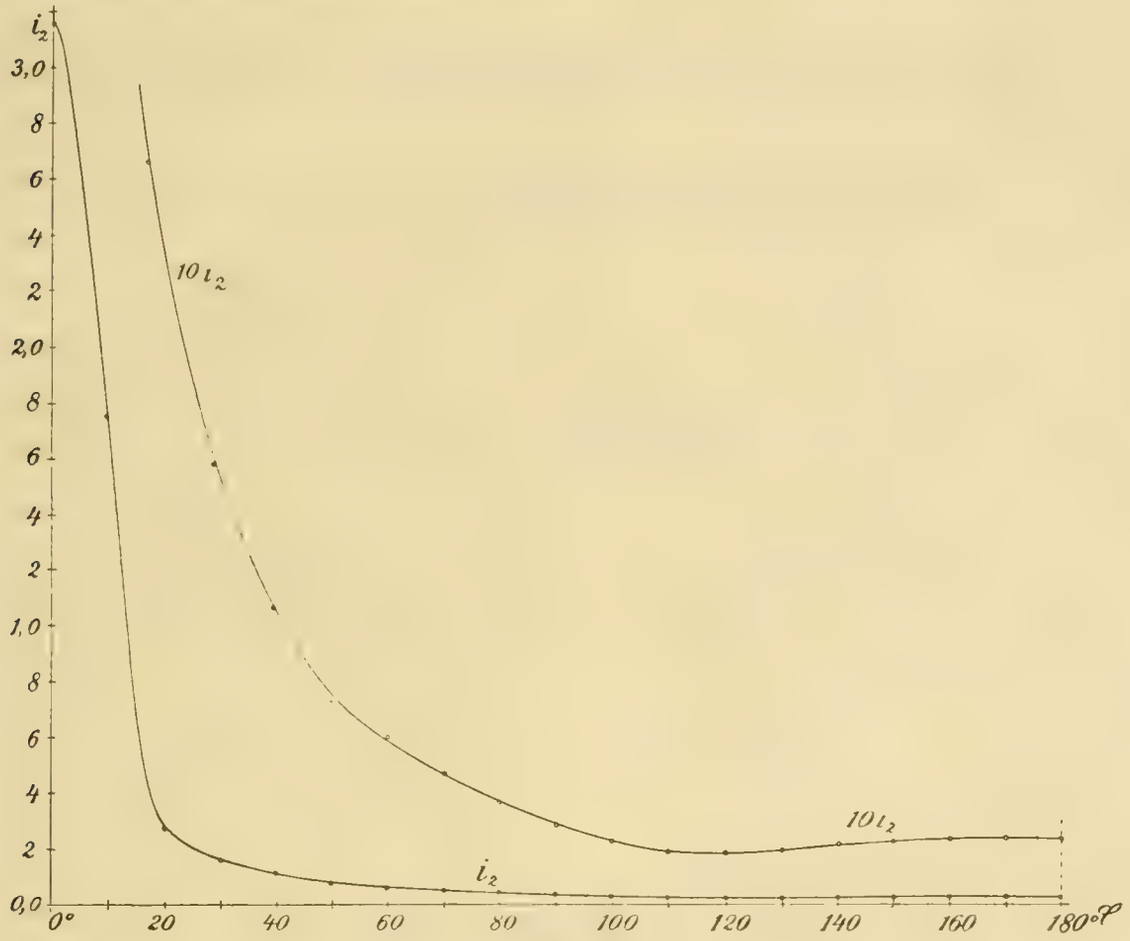


Fig. 71.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher
Band LXXIII. Nr. 2.

Das Zentral-Nervensystem der Selachier

als Grundlage für eine Phylogenie des Vertebratenhirns.

Von

Prof. Rud. Burckhardt,
Direktor der Zoologischen Station Rovigno (Istrien).

I. Teil: Einleitung und Scymnus lichia.

Mit 5 Tafeln Nr. I—V und 64 Textfiguren.

Eingegangen bei der Akademie am 13. Juni 1906.

HALLE.
1907.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Motto: „Man muss sich aber vorstellen, dass, wer über irgend einen der Teile oder eines der Organe handelt, nicht über die Materie oder um ihretwillen untersucht, sondern um der gesamten Form willen; gerade so, wie es sich um das Haus handelt, nicht aber um Ziegel, Lehm und Holz, so muss es auch dem Naturforscher um die Zusammensetzung und das Gesamtwesen zu tun sein, nicht aber um das, was sich niemals von seinem Wesen getrennt vorfindet. Es ist aber nötig, zuerst diejenigen Erscheinungen jeder Gattung nach zu bestimmen, welche an und für sich allen Tieren zukommen, nachher aber sie auf ihre Ursachen zurückzuführen".

Aristoteles, Teile der Tiere 645 b.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Vorwort 9

Einleitung 11

I. Vorbemerkungen 11

II. Das Problem: Hirnforschung und Entwicklungslehre 12

III. Wahl des Untersuchungsobjektes 15

IV. Kritik der empirisch gewonnenen Resultate aus der Geschichte der Hirnforschung 17

V. Äusserer Entwicklungsgang der Arbeit 17

VI. Zusammenstellung des Materials in zoologischer Reihenfolge 22

VII. Konservierung des Materials 24

VIII. Gang der Untersuchung des Gehirns 27

a) Zoologische Methodik 27

b) Anatomische Methodik 28

iX. Nomenklatur 36

Erster Teil.

Das Gehirn der Paläoselachier 45

Vorbemerkungen 47

Erste Abteilung.

Scymnus lichia 49

I. Chronologie der Erforschung des Hirns 49

II. Körperform von Scymnus 53

III. Kopf und dessen Organe 55

1. Äussere Form des Kopfes 55

2. Massen des Kopfes 55

3. Oberflächliche Organe des Kopfes 56

Seite

a) Integument 56
b) Öffnungen des Integuments 56
c) Organe des Integuments 59
α) Seitenlinie 59
β) Lorenzinische Ampullen 61
γ) Nase 63
δ) Auge 63
ε) Gehörorgan 65
4. Muskulatur des Kopfes 65
5. Schädel 66
6. Schädelhöhle 68
a) Gesamtform 68
b) Dura mater 72
c) Arachnoidea 72
7. Gefässe des Hirns 73
a) Arterien 73
b) Venen 75

IV. Zentral-Nervensystem, Anatomie 77
1. Messungen 77
2. Beschreibung der äusseren Topographie 81
a) Rückenmark 81
b) Verlängertes Mark 81
c) Hinterhirn 88
d) Mittelhirn 89
e) Zwischenhirn 89
f) Unterhirn 93
g) Vorderhirn 97
3. Oberflächenskulptur 100
4. Medianschnitt 105
5. Innenskulptur 111

V. Zentral-Nervensystem, Histologie 117
1. Einleitung 117
2. Rückenmark 122
3. Zellen 127
a) Vorbemerkungen 127
b) Neurogliosa 130
c) Gangliosa 142
4. Gewebe 144
a) Topographie 144
b) Gegenseitige Beziehungen der Gewebe unter sich und zur Gesamtform 156

VI. Entwicklungsgeschichte des Hirns im Zusammenhang mit der Formentwicklung des Kopfes 163
1. Einleitung 163

Seite

2. Massen des Kopfes auf verschiedenen Entwicklungsstadien . . 166
3. Formentwicklung des Hirns auf Stadium II und III 174
4. Späte Entwicklung einzelner Verhältnisse des Hirns 182
   a) Beziehungen zwischen dem Wachstum des Kopfes und des Hirns . 182
   b) Veränderung der Hirnregionen 184
      α) Vorderhirn 184
      β) Hinterhirn 186
5. Entwicklung des Medianschnitts und der Gewebe 189

VII. Zusammenfassung über das Hirn von Scymnus 199

VIII. Verzeichnis der Textfiguren und der Tafeln 205

Vorwort.

Die theoretische Erforschung des Nervensystems erfordert, dass wir es als das Resultat zweier Komponenten verstehen lernen: Die eine ist die Zelle als das organische Substrat jeder komplizierten Organisation, die andere ist die Einwirkung der Aussenwelt auf den Organismus, wie sie sich an dem organischen Substrat, innerhalb seines gesamten Lebens durch Summation bis auf die Gegenwart herab bleibend kund gibt. Das Nervensystem ist daher als eine Form organischen Daseins und als eine Grundlage organischer Verrichtungen nachzuweisen, deren Notwendigkeit auf dem Ausgleich zwischen biologischer und energetischer Einheit beruht. Dieser Ausgleich stuft sich aber in mannigfaltiger Weise ab und seine Wirkung auf den Organismus lässt sich naturgemäss folgendermassen gliedern: Bau und Verrichtungen des Nervensystems sind zurückzuführen erstens auf die funktionellen Ansprüche des Sinnesorgansystems. Dieses selbst ist wieder als das Resultat des organischen Substrates und der diesem zugänglichen, in Gestalt von Reizen einwirkenden Energieformen zu betrachten. Zweitens auf die funktionellen Ansprüche der vom Nervensystem Reize empfangenden Peripherie. Drittens auf die Einschaltung neuer zentraler Organe, welche den einen Reflexbogen komplizieren und viertens auf den mechanischen Einfluss, den die Organe und Gewebe des Gehirns, des Kopfes und des ganzen Körpers auf einander ausüben.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt, einen Beitrag von grösserer Ausdehnung an die Lösung dieser Aufgaben zu liefern. Entspricht auch das Erreichte nicht den eigenen Postulaten, so durfte doch mit der Veröffentlichung nicht mehr gezögert werden. Wesentliche Veränderungen der seit Jahren geprüften Anschauungen waren zunächst nicht zu erwarten.

Andererseits war das Gebot des nonum prematur in annum bereits reichlich überschritten und die Stoffmassen hatten einen Umfang angenommen, der zum Abschluss drängte. Jetzt, wo bereits das Gesamtmaterial in erster Sichtung und Verarbeitung vorliegt, entschloss ich mich zur Zerlegung des Gesamten in mehrere Teile, deren Anordnung sich denn auch aus der natürlichen Gliederung des Stoffes rechtfertigte.

In diesem ersten Teil soll zunächst der Plan und Entwicklungsgang unserer Arbeit dargestellt werden. Dann folgt die Beschreibung des Hirns von Scymnus lichia als Grundlage für die der weiteren Selachier.

Der zweite Teil ist der Beschreibung der übrigen Palaeoselachier gewidmet, wobei durch Darstellung von allerlei bei ihnen vorkommenden Zuständen der Typus des Selachierhirns ergänzt werden wird.

Der dritte Teil umfasst die Beschreibung des Gehirns bei den Neoselachiern. Daran schliesst sich der Versuch, die Stammesentwicklung des Selachierhirns mit der seiner Träger in Einklang zu bringen.

Im vierten Teil wird das Selachierhirn mit dem der Fische und der übrigen Wirbeltiere verglichen und der Entwurf einer allgemeinen Stammesgeschichte des Wirbeltierhirns gegeben.

Der fünfte Teil soll auf Grund einer geschichtlichen Darstellung der vergleichenden Anatomie des Nervensystems eine kritische Beurteilung unserer Allgemeinbegriffe enthalten.

Einleitung.

I. Vorbemerkungen.

Bei dem Umfange der Arbeit sehe ich mich veranlasst, Plan und Entwicklungsgang derselben eingehender zu schildern, damit der Leser auch in das Verhältnis zwischen dem eingangs gekennzeichneten Problem und den Mitteln und Wegen zu seiner Lösung, die mir zu Gebote standen, einen Einblick erhalte.

Die persönliche Veranlassung, das Selachierhirn zu studieren, ergab sich für mich aus der Fortsetzung meiner in früheren Arbeiten niedergelegten Spezialstudien über das Gehirn niederer Wirbeltiere. Ursprünglich beabsichtigte ich weiter nichts, als eine ähnliche Monographie zu schreiben, wie die über das Hirn von Protopterus annectens, oder wie sie seither von Bela Haller[1]) über Salmo und Scyllium von Johnston[2]) über Acipenser, von Ariëns-Kappers[3]) über Galeus erschienen ist. Erst nachdem ich mich von meinem ursprünglichen Plan durch den Zuwachs meiner Materialkenntnis abgedrängt sah, wurde ich inne, dass die vorgefasste Absicht und die Anlehnung an die bestehende Tradition der Hirnmonographie nicht genügen könne. Aufgabe und Hilfsmittel zur Erreichung meiner Ziele veränderten sich und ich hatte keinen Grund, mich dieser natürlichen Entwicklung zu entziehen, ja immer mehr Veranlassung, den planmässigen Erwerb neuer Erfahrungen in ihren Dienst zu stellen.

[1]) B. Haller, Vom Bau des Wirbeltiergehirns I. Salmo und Scyllium. Morphol. Jahrb. XXVI. 1898.

[2]) J. B. Johnston, The brain of Acipenser. Zool. Jahrb. Abt. f. Anat. Bd. XV. 1901.

[3]) C. U. Ariëns-Kappers, The structure of the Teleostean and Selachian brain. Journ. Comp. Neur. Vol. XVI. 1906.

II. Das Problem: Hirnforschung und Entwicklungslehre.

Die allgemeine Billigung, deren sich gegenwärtig die Hirnforschung erfreut, ist durch nichts eindringlicher demonstriert worden, als durch den bekannten Beschluss des Pariser Akademiekongresses vom Jahre 1900. Das Nervensystem ist heute die vielleicht meist kultivierte Domäne der deskriptiven Histologie. Zahlreiche und wertvolle Einzelarbeiten bereichern uns hier fast täglich mit neuen Erfahrungen. Fragen wir dagegen nach dem allgemeinen Standpunkt, der für die Orientierung dieser Untersuchungen massgebend ist, so entspricht er fast ausschliesslich dem Wunsche, das Studium des menschlichen Hirns und der uns an ihm wichtig scheinenden Funktionen, der Nervenphysiologie, zu fördern. Das beweist besonders intensiv die Aktualität des Streites um die Neuronenlehre. Der Physiologe strebt vor allem danach, entweder bei niederen Organismen Zustände zu finden, die sich experimentell verwerten lassen oder beim Menschen und verwandten Säugetieren auf Grund des anatomischen Baues durch Isolierung einzelner Leitungsbahnen reine Experimente zu erhalten. Von diesen die Physiologie dominierenden Gesichtspunkten wird aber auch die vergleichend-anatomische Forschung beherrscht. Die Bemühung, diesen oder jenen anatomischen Befund, die An- oder Abwesenheit der einen oder anderen Funktion des Menschenhirns bei einem niederen Tier nachzuweisen, geht wie ein roter Faden durch alle Hirnarbeiten, daneben her wohl auch die Absicht, anatomische Verhältnisse mit der speziellen Lebensweise eines Untersuchungsobjektes in Zusammenhang zu bringen. Der Mensch und die Leistung seines Nervensystems also sind beinahe ausschliesslich Leitstern und Ziel der Hirnanatomie. Dazu kommt, diesen Standpunkt festigend, dass für die praktische auf den Menschen orientierte Wissenschaft die Methode der Selbstbeobachtung sich hier mit der der objektiven Beobachtung verbinden lässt und damit das Recht der Physiologie, den Menschen im Zentrum der Forschung zu behalten, noch mehr zu verstärken scheint.[1])

[1]) Vergl. für die prinzipielle Darstellung des Verhältnisses von Physiologie zu Phylogenie meine Arbeit: R. Burckhardt, Zur Geschichte der biologischen Systematik. Verh. Naturf. Gesellsch. Basel 1901.

Aber nicht nur dieser positive und in seiner Weise progressive Charakter ist der gegenwärtigen Hirnforschung eigen, sondern auch ein negativer.

Diesen erblicken wir darin, dass in der rein genetischen Betrachtungsweise des Hirns diejenigen Gesichtspunkte die leitenden sind, die es auch schon vor einem halben Jahrhundert waren, und dass in dieser Hinsicht die Fruchtbarkeit aller physiologischen Fortschritte keine Veränderung im Sinne der Entwicklungslehre hervorgerufen hat. Zwei Beispiele mögen dies illustrieren: Die von His geschaffene Wachstumsphysiologie des embryonalen Hirns hat noch nicht vermocht C. E. v. Baers unheilvolles Schema der Hirnbläschen zu beseitigen, auf die Theorien vom Bau des Wirbeltierkopfes zurückzuwirken und eine allgemeine, phylogenetisch begründete Wachstumsphysiologie des Wirbeltierhirns zu erzeugen. Das beweisen alle Lehr- und Handbücher. Zweitens aber hat die Wirbeltiersystematik mit Ausnahme der Hirnwindungen bei den Säugern keine neuen Merkmale aus der Hirnanatomie gewonnen, ja nicht in einer einzigen Schrift ist die Bedeutung der Hirnmerkmale für die Phylogenie der niederen Vertebraten erörtert worden. Und doch ist zu bedenken, dass in diese ganze Periode der Durchbruch der Entwicklungslehre fällt. Da hätte es nahe gelegen, auch die Erforschung des Nervensystems genetisch zu revolutionieren, die Konsequenzen der Descendenztheorie und der Dezentralisation des Menschen auch für sein Hirn zu ziehen.

Dieses Postulat ist auch von anderen Autoren bereits erkannt, ja Gemeingut geworden; ich verweise hierfür auf folgende Auslassung B. Hallers (p. 418): „Vielfach störend wirkte aber auf diese Forscher die, auch bei ihnen sehr ausgesprochene Hinneigung — die als ein allgemeiner Charakterzug der Zeit die gesamte Nervenforschung hemmte und noch immer hemmt — die bei dem Menschen ungenau aufgedeckten Verhältnisse direkt auf die Hirnzustände niederer Wirbeltierformen zu übertragen, statt nach Erforschung der Bauverhältnisse dieser niederen Formen aus diesem Verhalten jene des Menschen durch Vermittlung der Zwischenstufen zu erklären zu trachten."

Statt dessen besitzen wir nur die triviale Übereinanderstellung des

des Hirnschemas der fünf Wirbeltierklassen und ihre grobe Anwendung auf die Doktrinen der Entwicklungsdogmatik.

Andere Schäden der Hirnforschung will ich gar nicht zu kritisieren mir erlauben, sondern hier den aus grösster Kenntnis der Nervenforschung entspringenden kritischen Bemerkungen Edingers[1]) Raum geben: „Vergleicht man die geringe Zahl der über andere Gehirne Arbeitenden mit der grossen Zahl derer, die das Säugerhirn durchforschen, so muss man immer wieder bedauern, dass gerade dem Gebiete, wo noch die meisten Probleme zu lösen sind, am wenigsten Interesse zugewandt wird."

Ein Ausweg aus dieser Stagnation konnte meiner Ansicht nach nur geschaffen werden durch folgende Mittel: Erstens möglichste Erweiterung des genetisch verwertbaren Materials. Als ich meine Untersuchung begann, war das Gehirn von nur 28 Gattungen der Selachier bekannt, wovon viele kaum mehr als nur erwähnt, während ich zum Schluss meiner Arbeit das Hirn von 55 Genera kennen gelernt hatte. Zweitens, Abwägung des Verhältnisses zwischen einer Stammesgeschichte der Wirbeltiere, wie sie ganz auf dem Boden der Entwicklungstheorie und unter Berücksichtigung der Paläontologie entstanden ist, einerseits und der Stammesgeschichte des Zentral-Nervensystems andererseits unter möglichster Anwendung der Schnitt- und Färbetechnik. Eine Vergleichung zwischen den Umwandlungsprozessen des Hirns und seines Trägers musste dazu führen, zu wissen, was der zoologische Systematiker vom Hirn für seine Zwecke zu halten habe.

Endlich musste eine konsequent durchgeführte Phylogenie des Hirns ganz von selbst dazu verhelfen, die Hirnphylogenie mit der der übrigen Organe zu vergleichen, sie wachstumsphysiologisch zu erfassen und mit der Wachstumsphysiologie des embryonalen Hirns zu verbinden, letztere neu befruchtend. Erst von da aus war weiter vorzudringen gegen die Fragen der Kopfbildung und der Beziehungen zwischen Hirn und Sinnesorganen, resp. den verschiedenen durch sie vermittelten Energieformen. So gestaltete sich aus meinem

[1]) Edinger und Wallenberg, Bericht über die Leistungen auf dem Gebiete der Anatomie des Zentral-Nervensystems 1901—1902. Schmidts Jahrbücher der gesamten Medizin. Bd. CCLXXIX.

Bedürfnis, Entwicklungslehre und Hirnforschung zu verbinden, jenes naturhistorische Problem allmählich heraus, das ich zu Beginn des Vorwortes formuliert habe.

III. Wahl des Untersuchungsobjektes.

Die Wahl meiner Objekte ergab sich aber nicht nur aus der konsequenten Fortsetzung früherer Studien. Bei der Ausdehnung, die die Fragestellung annahm, konnte ich mir nicht verhehlen, dass, wie möglichst ausgedehnte Aneignung der Literatur auch über die Wirbellosen erwünscht, ebenso das Gehirn der Wirbeltiere in seiner Gesamtheit in Betracht zu ziehen sei. Im grossen ganzen suchte ich mich zwar auf einen Formenkreis zu beschränken, doch, so wenig das Spezielle aus dem Allgemeinen darf gedeutet werden, so wünschte ich doch auch mich nicht allein innerhalb des gewählten Formenkreises zu Hause zu fühlen. Wenn ich gerade die Selachier als Ausgangspunkt gewählt habe, so wird das bei keinem Phylogenetiker Bedenken erregen; sind wir doch alle in einer oft vielleicht etwas übertriebenen Hochachtung für die Selachier aufgewachsen, als für die Wirbeltiere, die in Bau und Entwicklung die Uranlagen der Wirbeltiere am reinsten zur Schau tragen und dadurch für sie überhaupt typisch sein sollten. Aber nicht nur diese vielleicht fast zu wenig bestrittene typische Einfachheit der Selachier ist es, die sie wie für andere Organe auch für das Gehirn der Wirbeltiere besonders wertvoll erscheinen lässt. Es kommt vielmehr noch ein anderer Vorteil der Selachier dazu, der für andere Organe noch lange nicht so sehr erwogen, vielleicht auch nicht so verwertbar ist, wie für das Gehirn. Die Selachier bilden nämlich in ihren lebenden Vertretern phylogenetische Reihen, in denen sich die Funktions- und Formwandlungen besonders deutlich in Einklang bringen lassen. Damit stehen sie innerhalb der niederen Vertebraten, sofern es nicht auf Hartgebilde allein ankommt, einzig da, jedenfalls sowie wir uns nicht begnügen wollen, die Formänderungen innerhalb eines Stammes, genetisch zu deuten, sondern auch die Geschichte einer bestimmten Funktion mit der Stammesentwicklung zu verbinden. Vergleichen wir in dieser Beziehung mit den Selachiern die

übrigen Vertebraten, so sind es höchstens noch die Säugetiere, die für die Phylogenie des Hirns ähnliche Chancen darbieten, doch auf genetisch viel weniger breiter Basis. Diese beiden Zweige des Vertebratenstammes sind es allein, die sich für eine fortlaufende Vergleichung eignen. Für eine solche kommt Amphioxus kaum ernstlich in Betracht. Die Cyclostomen, Teleostier, Ganoiden und Dipnoer sind nicht nur in ihren gegenseitigen Verhältnissen schwer erkennbar, sondern weisen auch in ihrem jedesmaligen Formenkreise keine fortlaufende Formenentwicklung, jedenfalls nicht des Hirns, auf. Für die Amphibien gilt dasselbe. Endlich kann bei der Kenntnis der Sauropsidenphylogenie kaum daran gedacht werden, Entwicklungsreihen des Gehirns nachzuweisen. Als besonders günstig erwies sich den Absichten meiner Arbeit, dass ausser der auf Anatomie begründeten Phylogenie auch die Paläontologie der Selachier wesentlich Fortschritte gemacht hat und ich gleich beim Beginn meiner Selachierstudien in freundschaftlichster Weise in dieses Gebiet von meinem Lehrer und Freunde Herrn Professor Otto Jaekel in Berlin eingeführt wurde. Von den nun am Selachierhirn gewonnenen Anschauungen aus hellte sich auch manch dunkler Punkt in der Wertung der übrigen Fischgehirne auf und ich würde es bedauern, wenn ich mich nicht gleichzeitig auch auf die phylogenetische Abschätzung dieser weiter stehenden Formen verbreitet hätte. Daneben resultierten vergleichend-physiologische Tatsachen über den Nervenapparat der Wirbeltiere und allgemeine, wenn auch noch vielfacher Prüfung bedürftige Schlussfolgerungen in der Richtung der eingangs charakterisierten Naturgeschichte des Zentral-Nervensystems. Angesichts dieser Eignung des Selachierhirns für die Lösung allgemeiner Fragen muss ein Standpunkt als längst überholt betrachtet werden, wie er neuerdings in den Worten W. Locys[1]) zum Ausdruck gelangt ist: „Seine anatomische Analyse ist so weit gefördert worden, dass wir sagen können, sie habe einen Zustand der Vollkommenheit erreicht, soweit als Gebilde in Betracht kommen, die dem freien Auge sichtbar sind.“

[1]) On a newly recognized nerve connected with the fore-brain of Selachians. Anat. Anz. Bd. XXVI. 1905.

IV. Kritik der empirisch gewonnenen Resultate aus der Geschichte der Hirnforschung.

Mit dem Heranwachsen der Aufgabe und der zu bewältigenden Materialien bildete sich ganz spontan die Notwendigkeit heraus, auch die geschichtliche Entwicklung der Anschauungen, die auf dem Boden der vergleichenden Anatomie gewachsen waren, zur Schärfung der Kritik beizuziehen. Erst so konnte das Abhängigkeitsverhältnis, das zwischen der vergleichenden Neurologie und der von praktischen Gesichtspunkten ausgehenden Hirnanatomie des Menschen und der höheren Tiere verstanden und eine Weiterbildung desselben bewusst durchgeführt werden. Der Gang unserer Beobachtungen und Schlussfolgerungen durfte jedoch nicht zu sehr kompliziert werden und da sich auch die Geschichte dieses Forschungsgebietes als ein allgemein interessanter Stoff der Geschichte unserer Wissenschaften herausstellte, so beschloss ich, ihn abzutrennen und den empirisch gehaltenen Teilen nachfolgen zu lassen.

Da ich immer mehr zur Überzeugung gelangt bin, dass die Entwicklungslehre erst den Ausblick auf eine weitere Entwicklung der Hirnforschung garantiert, glaubte ich, meine Schlussfolgerungen selbst auch in ihrer historischen Bedingtheit nachweisen zu sollen.

V. Äusserer Entwicklungsgang der Arbeit.

Das erste planmässige Studium des Selachierhirns begann ich bei Anlass eines mit Bewilligung des königlich preussischen Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten an der zoologischen Station in Rovigno verbrachten Aufenthaltes von zwei Monaten im Herbst 1892. Zur weiteren Verfolgung meiner Studien auf diesem Gebiete überliess mir sodann dasselbe Ministerium einen Freiplatz an der zoologischen Station des Herrn Geheimrat A. Dohrn in Neapel für die Monate Februar und März des Jahres 1893. Hier erhielt ich, besonders dank der Liberalität des Direktors, drei Vertreter seltener Gattungen, Callochynchus, Cestracion und Pristis in trefflich konservierten Alkoholexemplaren, die Chierchia bei Anlass der Weltumsegelung des

„Vettore Pisani“ gesammelt hatte; ausserdem durch die anhaltenden Bemühungen Dr. S. Lobiancos reiches Material von neunzehn Genera mediterraner Selachier, teils ganze Exemplare, teils Köpfe. In dankenswertester Weise wurde dieses Material ergänzt durch eine Sendung von drei Chimaeragehirnen, die mir Herr Dr. Appellöf, Konservator am Museum von Bergen zukommen liess und durch ein Exemplar von Pristiophorus japonicus, das Herr Prof. Döderlein in Strassburg zu meiner Verfügung stellte, wie er mich dann auch späterhin mit Chimaera Platyrhina und Triacis aufs Freundlichste versah. Meine ersten Bemühungen galten dem Studium der äusseren Formen dieses Materials. Aber ich fühlte mich ihm keineswegs gewachsen. Zuerst galt es, eine empfindliche Lücke in meinem Wissen auszufüllen und mir die umfangreiche Literatur über Selachier dienstbar zu machen, keine geringe Schwierigkeit bei dem Mangel an einer hierzu geeigneten Sammlung. Dazu kam, dass mir jahrelang zu Basel nicht die einfachsten Hilfsmittel zu Gebote standen, die mir eine sachgemässe technische Verarbeitung gestattet hätten. Schon hatte ich die Hoffnung aufgegeben, die Untersuchung überhaupt durchzuführen, als im Herbst 1896 mein Freund Dr. Aug. Siegrist mir in seinem Privatlaboratorium gastliche Aufnahme gewährte und mir dadurch eine Möglichkeit des Arbeitens schuf, um die ich mich nicht nur vorher sondern auch ferner zwei Jahre zuständigen Orts vergeblich bemüht hatte. Meinem opferwilligen Freunde sei an dieser Stelle ganz besonderer Dank abgestattet. Meine Hirnsammlung erhielt sodann wertvolle Ergänzungen, indem im Sommer 1896 Herr Prof. Chun mir ein sehr junges Exemplar von Myliobatis aquila zusandte und fernerhin indem Herr Dr. Forsyth Major sich im Sommer 1897 in liebenswürdigster Weise für meine Arbeit in London verwandte und mir einen wesentlichen Zuwachs an neuen Selachiern verschaffte. Auf seine Fürsprache hin sandte mir nämlich Herr Boulenger F. R. S vom British Museum (Natural History) ein Exemplar von Aetobatis narinari und Herr Professor G. B. Howes von Royal College of Science die Köpfe folgender Selachier: Crossorhinus barbatus, Hemiscyllium ocellatum, Rhynchobatus djeddensis, Rhinobatus halavi, Astrape dipterygia, Hypnus subnigrum, Pteroplatea hirundo, Urolophus testaceus, Pristis juv. Ein Exemplar von Taeniura motoro verdanke ich der Freundlichkeit von Herrn Dr. Engelmann, dem Vorsteher der Commission des Naturhistorischen

Museums in Basel. Weiterhin erhielt ich durch Vermittlung von Herrn Dr. Siebenrock in Wien von Herrn Hofrat Steindachner dem Vorsteher des K. K. Hofmuseums für Naturkunde je ein prächtig konserviertes Exemplar von Rhinobatus Halavi und von Polypterus senegalensis. Mit je einem Exemplar von Chiloscyllium phymatodes und Aetobatis narinari, die mir Herr G. Schneider, Naturalienhändler in Basel und einem noch leidlich erhaltenen frischen Gehirn von Oxyrhina Spallanzani, das mir Herr Christen, Fischhändler in Basel, schenkte, endete die reiche Ernte dieses Jahres. Die Zunahme der Formen, die ich nunmehr zu übersehen begann, reifte der Wunsch, auch die Ganoïden und Teleostier in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Von ersteren stand, wie oben erwähnt, bereits Polypterus zu meiner Disposition; ferner hatte mir im Frühling 1897 Herr Professor Lendl in Budapest leidlich frische Sterlets verschafft. Ein Versuch, aus Amerika Amia und Lepidosteus zu erhalten, war erfolglos geblieben und so bin ich denn Herrn Professor Hans Virchow zu grossem Danke verpflichtet, dass er im Februar 1898 meine Bitte um Unterstützung in dieser Richtung mit einer Sendung von je drei Prachtexemplaren von Lepidosteus osseus und Amia calva beantwortete. Unterdessen hatten auch meine mikroskopischen Studien Fortschritte gemacht und die Fragestellung gestaltete sich präziser. Ein zweiter Aufenthalt an der zoologischen Station in Neapel sollte die Möglichkeit zur Ausdehnung meiner Studien besonders nach der histologischen Seite hin bieten. Ich richtete daher ein Gesuch an die k. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin, unter Darlegung des Standes meiner Arbeit, sie möchte mich mit einem Beitrag speziell für zweimonatliche Arbeit an der Neapler Station unterstützen. Dank der gütigen Vermittlung meines ehemaligen Chefs, Herrn Geheimrat Oskar Hertwig, Direktor des anatomisch-biologischen Instituts gewährte mir auch die genannte Akademie einen einmaligen Beitrag von 1000 Mark, den ich hiermit gebührend verdanke. Durch die Munifizenz meines Vaters wurde mir fernerhin ermöglicht, meinen Schüler und Freund Dr. E. Sauerbeck als Assistenten, der mir denn auch in allen technischen Manipulationen eifrig an die Hand ging, auf diese Reise mitzunehmen. Die Anfertigung einer Menge von Silberpräparaten, von Injektionspräparaten und die Exstirpation von Gehirnabschnitten, zum Nachweis der Faserbahndegeneration durch die Marchi'sche

Technik bildeten Hauptpunkte unserer gemeinsamen Arbeit. Nebenbei sammelte mein Freund eine grosse Anzahl von Teleostiergehirnen zu eigenem Studium, woraus ich begreiflicherweise auch Anschauungen gewinnen konnte, die mir für die Beurteilung des Selachierhirns zu Gute gekommen sind. Weniger günstig gestaltete sich indess dieser Aufenthalt in einer anderen Hinsicht. Das anhaltend unbeständige Wetter war der Beschaffung grösserer und seltener Selachier wenig förderlich, sodass ich auf manches, was bei gutem Wetter in Neapel leicht erhältlich ist, diesmal verzichten musste; immerhin sei erwähnt, dass ich drei Gehirne von Alopias vulpes und das überaus wertvolle von Odontaspis ferox erhielt. Fernerhin, dass ich ausser an der zoologischen Station die freundlichste Aufnahme im vergleichend-anatomischen Institut der Universität Neapel von Herrn Professor della Valle fand, der mir bereitwilligst die nach grossartigem Plane angelegte Sammlung Panceris zur Verfügung stellte. Hier fand ich das Original des Gehirns von Cephaloptera Giorna wieder, welches einst von de Sanctis beschrieben worden ist[1]) und das ich einer Neubearbeitung unterzog; neu war für mich auch die Autopsie der Gehirne von Echinorhinus spinosus, Centrina Salviani und Lamna gomphodon, sowie einiger Präparate von Zygaena in derselben Sammlung. Von grösstem Werte endlich war mir in allen literarischen Angelegenheiten der bewährte Rat von Herrn Professor Paul Mayer; überhaupt habe ich jedem der Kollegen am Aquarium in Neapel für Unterstützung in seinem Wirkungskreise den aufrichtigsten Dank abzustatten. In Rom gewährte mir Herr Professor G. B. Grassi einen Einblick in seine Sammlung, wodurch ich besonders meine Studien über das Gehirn von Cephaloptera an einem Spirituspräparat ergänzen konnte, ausserdem beschenkte er mich mit wertvollen Embryonen von Laemargus rostratus. Ein zweites Pristiophorusgehirn, welches mir Herr Prof. Nikolsky, Direktor der zoologischen Sammlungen der kaiserlichen Akademie in St. Petersburg einem von Herrn Dr. A. von Bunge erbeuteten Exemplar zu entnehmen gestattete und ein Exemplar von Cestracion Philippi, sowie ein Gehirn von Cephaloptera, welch letzteres mir die Herren Professoren Cattaneo in Genua und Mazza in Cagliari verschafften, sind hier noch anzuschliessen.

[1]) Panceri e de Sanctis, Sopra alcuni organi della Cephaloptera Giorna. Menn Acad. Pontiana Napoli 1869.

Das Jahr 1899 führte mir weniger Materialien zu, doch ist zu erwähnen, dass ich durch Herrn Dr. Lobiancos Wachsamkeit in den Besitz von zwei wohlkonservierten Echinorhinusgehirnen gelangte, denen im Laufe der folgenden zwei Jahre aus derselben Quelle noch eines von Odontaspis und Cephaloptera folgte. Herr Professor Zschokke in Basel überlies mir ein Exemplar von Zygaena tiburo, das in sehr willkommener Weise eine Lücke ausfüllt. Während der zwei folgenden Winter erhielt ich durch Vermittlung von Herrn F. Glaser Sohn in Basel mehrere Exemplare von Laemargus borealis und in derselben Zeit sammelte für mich Sign. Brancoleone Borgioli mehrere Exemplare des äusserst seltenen Laemargus rostratus, zwei Centrina Salviani, sowie zahlreiche andere Seltenheiten, die sich in der Umgebung von Genua zeigten. Eine erhebliche Erweiterung erfuhr sodann mein Material durch die grosse Liberalität, womit mir Herr G. A. Boulenger F. R. S. die disponiblen Doubletten des Naturhistorischen Museums von London im Sommer 1900 zur Verfügung stellte. Neu waren für mich die Gehirne von Rhinoptera, Narcine, Ginglymostoma, Trygonorhina und namentlich von Isistius. Herr Dr. Albert Günther F. R. S. beschenkte mich mit einer Abbildung des im Roy. College of Surgeons befindlichen Gehirns von Selache, die ich mit Erlaubnis des Councils dieser hohen Körperschaft veröffentliche. Auf meiner Rückreise über Paris gestattete mir Herr L. Vaillant, Vorsteher der Abteilung für Ichthyologie am Jardin des Plantes, Kopien von einem kleinen Gehirn von Selache in der Sammlung des Jardin des Plantes und von dem von ihm beschriebenen Centroscymnusgehirn zu nehmen. Von auswärts kamen seither dazu ein grosses Hirn einer unbestimmten tropischen Trygonspezies aus Samoa von Herrn Dr. G. Thilenius, Gehirne von Trygon uarnak und Pristis antiquorum von Herrn Dr. Volz in Sumatra, endlich ein Pristis perrotteti von Herrn Dr. E. A. Goeldi in Para.

1901 gelangte ich wiederum durch Herrn Dr. S. Lobianco in den Besitz eines für mich neuen Gehirns, desjenigen von Selache maxima, ferner erhielt ich mehrere Jugendstadien von Scymnus lichia und Laemargus rostratus, letztere durch Güte von Herrn Professor E. Bugnion in Lausanne, sowie von Herrn Dr. M. Jaquet am Musée Oceanographique von Monaco. Die meist versprechende Erweiterung in neuerer Zeit bestand in Überlassung

von embryonalen Holocephalengehirnen, von Carchariasembryoren und von zwei Gehirnen von Aetobatis mittlerer Grösse durch Herrn Professor H. Schauinsland in Bremen. Dadurch, dass mir im Jahre 1903 Herr Professor M. Fürbringer die von Herrn Professor Semon gesammelten Gehirne von Ceratodus Forsteri zur Bearbeitung übergab, sowie Exemplare von Polypterus und Bdellostoma, wurden für mich die letzten Lücken meines Anschauungsmaterials ausgefüllt, denn jetzt verfügte ich, abgesehen von besonderen Fällen innerhalb der Teleostier über direkte Beobachtung an allen zugänglichen Gehirnen niederer Wirbeltiere.

Die Bearbeitung des Ceratodusmaterials bot mir Anlass, die eingangs dargelegten Anschauungen an einem schwierigen Objekt zu erproben und zugleich die Vorarbeiten für den dritten Teil dieser Arbeit zu fördern. Daneben lernte ich durch die unter meiner Leitung unternommene Untersuchung Helbings[1]) diejenigen Selachier in ihrem gesamten Bau näher kennen, die sich der von mir als Grundform benützten Gattung Scymnus am meisten anschliessen, die Laemargiden. Der letzte Zuwachs an Material wurde mir 1904 durch Professor Bashford Dean in New York in Gestalt von japanischen Selachiern und Polypterus zu teil, ferner 1905 durch Herrn Geheimrat A. Dohrn in Neapel, welcher mich mit vier älteren Embryonen von Heptanchus beschenkte, nachdem er mir auch sonst in jeder Weise seine Hilfe hatte angedeihen lassen.

VI. Zusammenstellung des Materials in zoologischer Reihenfolge.

Endgiltig umfasst das mir zu Gebote stehende Material sämtliche Typen niederer Wirbeltiere. In der nachfolgenden Übersicht sind die Selachier nochmals systematisch zusammengestellt und nach Zahl, Alterszustand und technischer Verarbeitung bezeichnet. Hierbei wähle ich abkürzungsweise folgende Bezeichnungen:

a: erwachsenes Exemplar.
j: jugendliches Exemplar.
f: fötales Exemplar.
e: Embryo.
m: mehr als ein Exemplar.
i: Gefässe injiziert.
s: Schnittserien.
b: in der Literatur bereits vorkommende Gehirne, die mir nicht zugänglich waren.

[1]) H. Helbing, Beiträge zur Anatomie und Systematik der Laemargiden. Nov. Act. Leop. Carol. Akad. Halle. Bd. LXXXII. 1904.

(Chlamydoselachus anguineus)								b
Hexanchus griseus	a				m		s	
Heptanchus cinereus	a		f	e	m			
„ deani	a							
Scymnus lichia	a	j	f	e	m	i	s	
Laemargus rostratus	a		f	e	m		s	
„ borealis	a				m			
Isistius brasiliensis	a	j					s	
Centrina vulgaris	a		f		m			
Acanthias vulgaris	a	j	f		m	i	s	
„ blainvilli	a		f	e	m			
„ mitsukurii		j						
Spinax niger	a				m	i	s	
„ lucifer	a							
Centroscymnus coelolepis	a							
Centrophorus granulosus	a	j	f		m		s	
Cestracion Philippi	a				m		s	
„ galeatus	a						s	
Pristophorus japonicus	a				m			
Echinorhinus spinosus	a				m		s	
Squatina vulgaris	a	j		e	m	i	s	
„ Meyeri		j			m	i		
Scyllium catulis	a	j	f		m		s	
„ canicula	a	j	f	e	m	i	s	
Pristiurus melanostomus	a			e	m			
Crossorhinus barbatus	a	j						
Chiloscyllium phymatodes	a	j						
Hemiscyllium punctatum	a							
Ginglymostoma concolor	a							
Deania eglantina	a							
Lamna cornubica	a				m			
„ gomphodon	a							
Oxyrhina Spallanzani	a				m		s	
Carcharodon Rondeletti	a						s	
Odontaspis ferox	a				m			
Alopias vulpes	a				m	i	s	
Selache maxima	a							
Mustelus vulgaris	a	j			m	i	s	

Mustelus laevis	a				m			
„ manazo	a							
Triacis scyllium	a	j						
Galeus canis	a	j			m	i	s	
(Galeocerdo tigrinus)								b
Carcharias glaucus	a				m		s	
„ spec.		j	f	e	m		s	
Zygaena tiburo	a							
„ malleus	a	j			m		s	
„ blochii		j						
Rhynchobatus djeddensis		j						
Rhinobatus halavi	a				m			
Trygonorhina fasciata	a							
Pristis cuspidatus		j						
„ Perotteti		j			m		s	
„ antiquorum		j	f		m			
Narcine brasiliensis	a						s	
Astrape dipterygia	a						s	
Torpedo ocellata	a	j	f	e	m		s	
„ marmorata	a	j	f	e	m	i	s	
Hypnus subnigrum	a						s	
Raja clavata	a	j		e	m	i	s	
„ asterias	a				m			
„ batis	a	j			m			
Laeviraja oxyrhynchus	a	j			m		s	
Platyrhina sinensis	a							
Trygon violacea	a				m		s	
„ pastinaca	a		f		m	i	s	
„ spec. uarnak	a							
Taeniura motoro	a							
Pteroplatea hirundo	a							
Myliobatis aquila	a	j	f		m	i	s	
„ bovina	a		f		m	i		
Aetobatis narinari	a	j			m			
Rhinoptera jayakari	a							
Cephaloptera giorna	a				m			
Chimaera monstrosa	a			e	m		s	
Callorhynchus antarcticus	a		f	e	m		s	

Somit betrug der Gesamtbestand an Selachiergattungen, deren Hirn mir zugänglich war, 55, wovon nur zwei, anderen Formen nahe verwandte, mir allein literarisch bekannt wurden. Von nur einer Familie, der der Rhinodontidae besass ich gar keinen Vertreter und die mir noch fehlenden Gattungen, so interessant im einzelnen die Feststellung ihres Gehirns sein wird, liegen doch innerhalb des Stammes so, dass prinzipiell wichtige Abweichungen in der Beurteilung des Selachierhirns von ihrer Beschreibung kaum zu erwarten ist.

Der wertvollste Zuwachs dürfte noch aus dem Studium der späteren Embryonalformen und der Gehirne von Exemplaren resultieren, die das Maximum des ihrer Art möglichen Wachstums erreichen.

Ausser diesem Grundstock meines Untersuchungsmaterials an Selachiern hatte ich zum Vergleich: Amphioxus, Petromyzon, Myxine, Bdellostoma, Acipenser, Polypterus, Lepidosteus, Amia, Lepidosiren, Protopterus und Ceratodus, ferner ca. 60 Gattungen von Teleostiern, Ichthyophis, Siredon, Triton, Salamandra, Rana, Chelone, Tropidonotus, Pelias, Hatteria, Lacerta, Chamaeleo, Alligator, sowie typische Gehirne von Vögeln und Säugetieren in verschiedenen Entwicklungsstadien.

VII. Konservierung des Materials.

Mein Material bestand vielfach nur in Alkoholexemplaren. Ich überzeugte mich bald, dass die Meinung, bei Tieren, die bloss zu Sammlungszwecken konserviert seien, sei das Gehirn nicht mehr zu verwerten, total irrig ist. So liess der pelagisch lebende Isistius des Britischen Museums, der offenbar sofort beim Fang in gutem Alkohol von geeigneter Konzentration aufgehoben war, noch nach vielen Jahren zahlreiche histologische Einzelheiten recht gut feststellen. Im Gegensatz zu meinen Erfahrungen an Alkoholmaterial steht die Mode, nur die verdickten Teile des Hirnrohres zu konservieren und der Beschreibung für würdig zu erachten, die ja zeitweise dazu führte, dass man den „Hirnschlitz öffnete“, um die Konservierungsflüssigkeit besser in die Ventrikel eindringen zu lassen, d. h. die genetisch bedeutungsvolle Decke des III. Ventrikels einfach entfernte.

Auch Formol tat gute Dienste, wenngleich der geeignetste Grad der Konzentration sich nicht immer leicht treffen lässt. Dass ich, wo immer möglich, Müllersche Flüssigkeit anwandte, versteht sich von selbst, ebenso die Konservierungsflüssigkeiten für Versilberung der Objekte.

Ganz besonders empfahl sich für die Konservierung, speziell des Gehirns, folgende Prozedur:

Man öffnet die Schädelkapsel, womöglich bis über die Decke des IV. Ventrikels. Nun füllt man ein zu feiner Spitze ausgezogenes Glasrohr mit osmiobichromischer Lösung, stösst die Spitze am Calamus scriptorius durch die Decke des IV. Ventrikels, nachdem man das Hirn mit dem Kopf schräg abwärts gestellt hat. Hierauf bläst man die im Glasrohr befindliche Lösung langsam in die Ventrikel und wiederholt das Einfüllen so lange, bis auch der vierte Ventrikel angefüllt ist und seine Decke prall erscheint. Die durch Einstechen entstandene Öffnung braucht nicht geschlossen zu werden, denn jetzt bringt man das Gehirn mit den zugehörigen Teilen des Schädels in toto in Müllersche Flüssigkeit, wobei die Hirnwandungen genügend prall bleiben und doch, da kein übermässiger Druck entsteht, nicht unnatürlich angespannt werden. Ist das Gehirn alsdann genügend erhärtet, so kann man es aus seiner Lage im Schädel herauspräparieren und es wird nachher, auch wenn während der Präparation die Wände kollabieren, der ursprüngliche Turgor wieder hergestellt.

Handelt es sich nun aber nicht bloss darum, das Gehirn für mikroskopische Zwecke, sondern auch für die Vergleichung mit anderen Selachiergehirnen vorzubereiten, so kommen Faktoren in Betracht, die dem Sammler nicht von vornherein für Beurteilung des Hirns möchten wichtig erscheinen. Sollen in Zukunft für weitere Untersuchungen Materialien gesammelt werden, so empfehle ich folgendes zu beachten:

1. Man messe womöglich die totale Länge des Exemplares, dessen Gehirn konserviert werden soll; bei Rochen die Breite. Ist dies nicht möglich, dann wenigstens Teile des Kopfes, die eine Vergleichung mit Figuren zulassen, z. B. Länge von der Schnauzenspitze bis zum Auge, dem Spritzloch, oder Breite des Mundes.

2. Man präpariere Kiefer oder deren Teile, da dies für Bestimmung des betreffenden Selachiers bedeutungsvoll ist.

3. Will man das Hirn nicht sofort verarbeiten, oder kennt man nicht bereits genau seine Beziehungen zu den übrigen Organen des Kopfes, so eröffne man bloss das Schädeldach, lasse aber das Hirn in situ. Um es hierbei nicht zu verletzen, beachte man folgende Regeln: Bei kleinen Exemplaren liegt namentlich das Hinterhirn gewöhnlich der Schädelhöhle an, die Eröffnung geschieht daher am besten so, dass man die Mündungen der Ductus endolymphatici zum Ausgangspunkt nimmt, um in die Tiefe zu präparieren. An dieser Stelle lässt sich ohne Schwierigkeit eine Calotte von der Schädelhöhle abtragen. Damit gelangt man an eine Stelle über dem vierten Ventrikel, wo die Konservierungsflüssigkeit leicht eindringen kann, ohne dass sie die etwas quellende Hirnmasse durch eine allzu enge Öffnung presst, wie es geschieht, wenn man die mittlere über dem Kleinhirn gelegene Schädelkuppe abträgt.

Im allgemeinen sollten Gehirne nicht in herausgenommenem Zustande konserviert werden, ehe man sich solcher in situ gelegener Gehirne, die alsdann in Alkohol 85 % oder Formol 10 % aufzuheben sind, versichert hat. Embryonen, Föten und Jugendformen ertragen ebensowohl Konservierung in Alkohol wie in Müllerscher Flüssigkeit, ohne Eröffnung der Schädelhöhle. Bei grossen und genau gemessenen Tieren kann der Kopf abgetrennt werden.

Ausser der Konservierung mit Alkohol, Formol, Müllerscher Flüssigkeit, Pikrinessigsäure und osmiobichromischer Mischung wandte ich keine anderen Konservierungsflüssigkeiten an. Die Färbung geschah meistens mit Karminpräparaten, Hämatoxylinpräparaten, reiner Osmiumsäure, oft unter Anwendung einer Nachfärbung mit Bleu de Lyon oder Methylenblau. Silberimprägnation wurde so viel als möglich herangezogen, doch liesse sich dieses Verfahren wohl noch auf seltene Formen anwenden, über die ich nur in Alkoholexemplaren verfügte. Endlich unternahm ich zahlreiche Injektionen und zwar entweder mit Teichmannscher Masse oder mit Berlinerblau-Gelatine an einer weit grösseren Zahl von insbesondere auch genetisch wichtigen Formen, als Rex.[1]) Bei einiger Übung lassen sich übrigens auch die Hauptverhältnisse der Gefässe ohne Injektion übersehen.

[1]) H. Rex, Beiträge zur Morphologie der Hirnvenen der Elasmobranchier. Morphol. Jahrb. Bd. XVII. 1891.

VIII. Gang der Untersuchung des Gehirns.

Erst allmählich bin ich zu der Einsicht gelangt, dass der übliche Untersuchungsgang, wonach ein Gehirn möglichst rasch seiner Umgebung enthoben und in Schnittserien zerlegt wird, keineswegs genügend sei, um seine Eigentümlichkeiten in demjenigen Zusammenhang kennen zu lernen, in dem allein sie zu verstehen sind. Ich lasse daher hier den Gang der Untersuchung folgen, den ich eingeschlagen habe, wo es mir möglich war, und den einzuschlagen ich empfehlen möchte, wo es anderen möglich sein wird, meine Untersuchung zu erweitern.

a) Zoologische Methodik.

In systematischer Hinsicht war mein Untersuchungsgang durch die gegenwärtigen Ansichten von der Phylogenie der Selachier vorgezeichnet. Die spezielle Durchführung wird in den Vorbemerkungen zu den zwei ersten Teilen entworfen werden. Als systematische Einheit für die Vergleichung des Hirns wählte ich die Gattung aus dem rein praktischen Grunde, weil gewöhnlich die Gattungen im Hirnbau merkliche Differenzen aufweisen, seltener die Arten oder gar die Individuen, weil aber andererseits die Differenzen innerhalb einer Familie zu gross sein können, als dass man nur einen einzigen Typus aus einer Familie auswählen dürfte. In vielen Fällen sind übrigens die Grenzen der Familie dieselben, wie die der Gattung.

Wenn ich Scymnus lichia als Basis für die monographische Darstellung des Selachierhirns wählte, so konnte ich doch die Beschreibung an dieser Form nicht mit all denjenigen Einzelheiten durchführen, die sich an anderen nahe verwandten Formen ergänzend feststellen liessen. Dies gilt namentlich für Entwicklungsgeschichte, Histologie, Einzelheiten der Gefässverzweigungen u. s. w.

Naturgemäss fiel dem ersten Teil, der die älteren Selachier umfasst, hauptsächlich die Aufgabe zu, die typischen Zustände des Selachierhirns darzustellen, das physiologisch-anatomische Element trat mehr in den Vordergrund als im zweiten, wo dann das systematische mehr dominieren wird.

Was die Reihenfolge betrifft, so könnte es für angebracht erachtet werden, hierin den Systemen von Dumeril[1]) und Günther[2]) zu folgen: Seit der Aufstellung dieser Systeme aber ist ein Menschenalter verflossen, ohne dass dem gesamten Stamm der Selachier eine genetisch begründete systematische Bearbeitung zu teil geworden ist. Sind ja doch auch die Selachier die „partie honteuse“ aller, auch der besten Museen Europas; ein Zustand, der endlich einer gründlichen Remedur bedürfte. Ich ziehe es daher vor, unter Anlehnung im allgemeinen an die bestehenden Selachiersysteme gewissen Rücksichten auf die Darstellung des Hirns zu folgen. Es wird sich in einem späterem Teile alsdann Gelegenheit bieten, die Frage nach der Bedeutung der vom Hirn abzuleitenden Merkmale und die Systematik der Selachier zu erörtern.

b) Anatomische Methodik.

In anatomischer Hinsicht legte ich Wert darauf, Grössenverhältnisse, Massenverhältnisse und Lagebeziehungen des Gehirns festzustellen und zu betonen, kurz die mechanische Korrelation zwischen Hirn und Kopf in einer Ausdehnung zu studieren, wie es niemals an grösseren Formenreihen niederer Vertebraten geschehen ist. Sodann wandte ich besondere Aufmerksamkeit den Beziehungen zwischen den zu beschreibenden Gehirnen und dem relativen Alter respektive der Körpergrösse seiner Träger zu. Die monographische Durchführung dieser Studien an einer einzigen Form, als Basis zum Vergleich der einen oder anderen Korrelation bei dieser oder jener weiter differenzierten schien mir zu genügen. Das Gehirn selbst bietet in seinen reichen Formwandlungen schon rein äusserlich aber möglichst scharf erfasst, ein morphologisch wertvolleres Objekt, als man in der Regel glaubt. Blosse Topographie, verbunden mit der Untersuchung der Nerven und Gefässe genügt aber nicht. Für das Verständnis der Hirnformen selbst und ihrer eigenen Massenverhältnisse erwies sich das Studium auch der Ventrikel als dringend notwendig. Besonders glaubte ich auch in der Oberflächen-

[1]) A. Dumeril, Hist. nat. d. Poissons. T. I. Elasmobranches. Paris 1865.

[2]) A. Günther, Catalogue of the Fishes in the British Museum. Part. I. Chondropterygii. London 1870.

skulptur ein bisher so gut wie ganz vernachlässigtes Mittel zum Verständnis des Zusammenhanges zwischen Hirnform und Hirnstruktur zu finden. Diese Wertung der Oberflächenskulptur entsprang schon daraus, dass die Oberfläche bei diesen dünnwandigen Gehirnen eine ganz andere Bedeutung zukommt, als bei den gewaltig verdickten Hirnmassen der höheren Vertebraten. Zu meiner Freude fand die Oberflächenskulptur alsdann auch in dem klassischen Retzius'schen „Menschenhirn" (1897) vermehrte und vertiefte Beachtung. Technisch war das Verfahren, sie darzustellen, überaus einfach. Man schält das Gehirn, am besten nach Konservierung mit Müllerscher Flüssigkeit, indem man die Gefässe und die Pia abzieht, die Nervenwurzeln durchtrennt, kurz alles entfernt, was ausserhalb der Membrana limitans externa liegt. Die topographische Untersuchung der Hirnmassen nahm nicht nur auf den Querschnitt und die hinter einander liegenden Abschnitte die gebührende Rücksicht, sondern mehr als bisher auch auf die Längsrichtung, den funktionell zusammengehörenden Zonen folgend, wobei auch die Oberfläche der Innenwand zur Geltung kam. Dass ich den Zuständen des sich entwickelnden Hirns besondere Sorgfalt angedeihen liess, versteht sich von selbst.

Dagegen wich ich in einem anderen Punkte vom Usus erheblicher ab, als man ohne Anhören meiner Gründe begreifen wird, nämlich in der Histologie. Wohl verfüge ich über ein Material, dem sich bei der sonst üblichen Ausführlichkeit und Breite der zehnfache Umfang der Darstellung hätte geben lassen. Aber ich habe hier gleich dem Missverständnisse vorzubeugen, als ob ich den Wert der histologischen Feinarbeit dadurch unterschätzte, dass ich es für wünschenswert hielt, mich in dieser Richtung kürzer zu fassen, als es zu geschehen pflegt und als ich es wohl früher auch selbst getan hätte. Ich möchte nur eines bestreiten, nämlich dass mit der Feststellung einer enormen Masse histologischer Einzelheiten, und wären sie auch physiologisch deutbar, für die Stammesgeschichte des Hirns und seiner Teile etwas wesentliches geleistet werde. Die Frage, was man in der Hirnforschung mit dem Mikroskop überhaupt bezweckt, ist auf keinem anderen Gebiete so berechtigt. Denn kaum irgendwo sonst wird das Mikroskop mit so sicherer Aussicht gehandhabt, dass Neues beizubringen und Ungesehenes leicht darzustellen sei. Wiedergabe von

solchen Tatsachen, die lediglich auf diese beiden Attribute Anspruch erhebt, ist von mir geflissentlich gemieden worden, schon aus dem einfachen Grunde, um meiner Schilderung den Vorwurf des Überladenseins mit noch zusammenhanglosen Einzelheiten zu ersparen; mögen andere das von mir vorbereitete Material dereinst weiter verwerten. Ferner habe ich vermieden, mich auf das Studium der speziell cellulären Strukturen einzulassen. Dazu reichte und zwar gerade bei den wenigst zugänglichen und funktionell interessanten Formen schon der Konservierungszustand, den zu bestimmen nie meine Sache war, nicht aus. Ausserdem ist kaum ein tatsächlicher Zusammenhang zwischen der Cellularstruktur und den viel allgemeineren Hauptlinien unserer Untersuchung jetzt schon zu konstruieren, wo es noch so vieler und verschiedenartiger Zwischenarbeit, insbesondere seitens der Histologen und Physiologen bedarf, wie aus dem Nachfolgenden ersichtlich sein wird.

Ähnlich verhält es sich mit der Beschreibung der einzelnen Zellformen im Zentral-Nervensystem der Selachier. Schon aus der heute vorhandenen Literatur, die weit umfangreicher und vollständiger ist, als diejenige über die makroskopische Anatomie des Selachierhirns, ist leicht zu entnehmen, dass die Einzelzellen des Selachierhirns im ganzen ungeheuer generellen Habitus haben und weder innerhalb der Selachier, noch im Verhältnis zu niederen Formen bei höheren Vertebraten erhebliche und genetisch oder physiologisch verwertbare Unterschiede zeigen. Alle Autoren haben das Thema wohl einmal angeschnitten, aber sichtlich unbefriedigt wieder aus den Händen gelegt; das ist nicht zu verkennen. Immerhin wird es uns nicht daran hindern, das Vorhandene, sowie die neu gewonnenen Resultate zu verwerten. Es mag damit nur erklärt sein, warum die spezielle Beschreibung der Zellen in unserer Darstellung nicht einen breiteren Raum einnimmt. Etwas reicher gestaltet sich schon das Studium der Struktur, des Verhältnisses der Elemente zu einander, zwar weniger innerhalb der Selachier selbst, als im dritten Teile der Arbeit, wo wir die Struktur und ihre phylogenetische Entwicklung durch die Vertebraten verfolgen werden. Daher liess ich auch hierin möglichste Beschränkung walten, namentlich liess ich das Strukturdetail da weg, wo rein topographische

Verhältnisse wiederzugeben waren. Dem topographischen Schnitt möchte ich zweierlei Absicht zuerkannt wissen: einmal rückt er manche Verhältnisse der äusseren Form rasch und anschaulich dem Verständnis näher; und zwar nicht nur demjenigen, dessen Auge durch ausschliesslich mikroskopisches Sehen des plastischen Sehens gesamter Organe entwöhnt ist. Ein topographisches Bild drückt auch kurz Formen aus, die mit Worten nur umständlich zu beschreiben sind. Daher darf der Schnitt aber nicht bloss als Rahmen aufgefasst werden, der einfach mehr oder weniger interessante celluläre Details einschliesst; er muss wiederum als Teil eines neben ihm verständlichen Ganzen erscheinen, wie dies schon s. Z. so hübsch in Ahlborns[1]) Arbeit über Petromyzon erstmals durchgeführt und späterhin von so vielen anderen Autoren ebenso geübt worden ist. Zweitens aber möchte ich der topographischen Abbildung noch eine andere Bedeutung zuerkennen, die ihr bisher wenig abgewonnen wurde. Sie ist auch gleichzeitig der Ausdruck der Massenverteilung der strukturell vereinigten Gewebearten. Für die wachstumsphysiologische Betrachtung des gesamten Hirns kommt die funktionelle Dignität der verschiedenen nervösen Gewebe kaum in Betracht, nur ihre Quantitäten, allenfalls die Unterschiede zwischen fibrillären und cellulären Massen; jedenfalls aber die Festigkeit gegen Zug und Druck, Elastizität — kurz, rein mechanische Bedingungen, denen für die Analyse der Gesamtform grösserer Wert beigelegt werden muss, als den physiologischen Qualitäten der Elemente. Man könnte dem gegenüber geneigt sein, als wichtigste Aufgabe einer mikroskopischen Anatomie des Hirns niederer Vertebraten zu betrachten: möglichst genaue Bestimmung der Zellen in Bezug auf Form, Verbindung mit Faserbahnen und Endigung dieser Bahnen an der Peripherie. Dadurch würde der experimentellen Physiologie vorgearbeitet, um so mehr, da ja hier ganz einfache und niedrige Verhältnisse vorliegen. Vor einer solchen Auffassung und noch mehr vor der schiefen Perspektive, in ihr die Hauptaufgabe zu erblicken, kann nicht genug gewarnt werden, gerade weil sie die landläufige ist. Denn einmal weiss jeder Experimentalphysiologe, dass es nicht die generellen anatomischen Verhältnisse sind, die klare

[1]) F. Ahlborn, Untersuchungen über das Gehirn der Petromyzonten. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XL. 1883.

experimentelle Resultate erzielen lassen, insbesondere bei Gebilden, wie Nervenbahnen, wenn sie kaum anatomisch begrenzbar sind. Zweitens entspricht eine solche Auffassung, dass die Anatomie lediglich Dienerin der Physiologie sei, einem Standpunkt, der aus einer Zeit zu uns herübergenommen ist, da noch kaum ein Schimmer der Entwicklungslehre leuchtete. Aber lassen wir einmal diesen höchst bedenklichen und einseitigen Standpunkt gelten, so bleiben mir, abgesehen von der Einsicht in seine prinzipielle Fehlerhaftigkeit noch drei Gründe dafür, meine Untersuchung nicht anders als nur gelegentlich auf ihn zu orientieren.

1. In dieser Richtung ist für das Selachierhirn schon so viel versucht und erreicht worden, dass eine beabsichtigte Erweiterung in keinem Verhältnis zu dem stehen würde, was mir selbst, wie auch überhaupt erreichbar erscheint, wenn wir die Untersuchungen von Edinger,[1]) Botazzi,[2]) Sauerbeck,[3]) Schaper,[4]) B. Haller, Houser,[5]) Steiner[6]) und Ariëns Kappers in Rücksicht ziehen. Eine gewisse präsumtive Anerkennung meiner Auffassung geht wohl auch schon daraus hervor, dass bei der Untersuchung mehrerer Selachiergehirne in histologischer Hinsicht, doch nie seitens der Beobachter der Versuch gemacht wurde, aus den Beobachtungen für die Phylogenie Kapital zu schlagen.

2. Um zu demjenigen Grade anatomischer Genauigkeit zu gelangen, der für physiologische Verwertung unerlässlich ist, müsste die histologische Untersuchung an einer Form so durchgeführt werden, wie es bisher noch nicht einmal angestrebt worden ist; und nicht nur an einer Form, sondern an einer Reihe von solchen, deren genetische Beziehungen zu einander

[1]) L. Edinger, Unters. über d. vergl. Anat. d. Gehirns. Abh. d. Senckenb. Naturf. Ges. Bd. XVIII, XIX. 1888—96.

[2]) Botazzi, Il cervello antaiore dei selacei, Ricerc. lab. Anat. norm. di Roma. Bd. IV. 1895.

[3]) E. Sauerbeck, Beiträge zur Kenntnis vom feineren Bau des Selachierhirns. Anat. Anz. XII. 1896.

[4]) A. Schaper, The finer structure of the selacian cerebellum. Journ. Comp. Neurol. Bd. VIII. 1898.

[5]) G. L. Houser, The Neurones and supporting Elements of the Brain of a Selachian. Journ. Comp. Neurol. XI. 1901.

[6]) J. Steiner, Die Funktionen des Centralnervensystems und ihre Phylogenese. II. Fische. 1900.

wahrscheinlich, und deren physiologische Beziehungen zur Aussenwelt von dieser in bestimmbarer Abhängigkeit wären. Gaules[1]) — weil auf falschen Voraussetzungen beruhender — verfehlter Versuch der Zählung der Achsenzylinder-Querschnitte im Rückenmark des Frosches, bezeichnet theoretisch richtig den Weg, auf welchem erst vorzugehen wäre. Es würde also nicht genügen, dass ein Mikroskopiker einen Zusammenhang zwischen einer Nervenzelle, ihrer Faserbahn und der Peripherie nachwiese und, wie dies meist geschieht, auch die ähnlichen Zellen mit den ähnlich verlaufenden Axonen in Verbindung setzte, sondern er hat auch die quantitativen Verhältnisse zu bestimmen, die Zahl der an einer Bahn partizipierenden Zellen, das Verhältnis dieser Zahl und der der innervierten Organe. Erst dann kann er auch daran denken, die Intensität der Reaktion auf die ihr zu Grunde liegenden Elemente zu beziehen. Und dabei wird der Physiologe nicht stehen bleiben. Er will doch die Funktion eines Hirnteils oder des gesamten Zentralorgans nicht als Einzeltatsache, nicht nur in Verbindung mit den übrigen Funktionen der Teile des Individuums, sondern er will sie auch in ihrer durch die Entstehung des Substrates gegebenen geschichtlichen Bedingtheit kennen lernen. Aber diese Aufgabe, die Genese der Funktion kennen zu lernen, existiert ja für die heutige Physiologie kaum als Postulat. So sehr es nun zu wünschen und zu erwarten wäre, dass auch in dieser Richtung, ähnlich wie in der Biomechanik von der Morphologie der Anstoss ausgehe, so wird es mir doch bei dem Umfange gegenwärtiger Arbeit kaum verargt werden, wenn ich mich mit einer Skizzierung der letztgenannten Aufgabe begnüge, die ich theoretisch voll anerkenne. Es wird mir auch niemand bestreiten wollen, dass eine Vertiefung des Studiums der Form überhaupt auch hierfür nicht hinderlich, sondern förderlich sein muss, dass ferner gegenwärtige Arbeit nur in dem Sinne wirken kann. der den Mikroskopikern als Ideal vorschweben muss. Erst wenn die ganze Mannigfaltigkeit der verfügbaren Formen erschlossen ist, wird auch planmässig und mit Orientierung auf die speziell histologischen und physiologischen Fragen aufs neue gesammelt werden können. In der Eröffnung dieser Perspektive aber möge eine gewisse Kompensation für das erblickt werden,

[1]) J. Gaule, Zahl und Vertheilung der markhaltigen Fasern im Froschrückenmark. Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wissensch. 1881.

was man mir als makroskopische Einseitigkeit auslegen könnte. Dagegen würde man mit dieser Auslegung bei all denjenigen kein Glück haben, die nicht mikroskopische Spezialisten und Geheimwissenschaftler sind, sondern denen es darauf ankommt, dass alle Dinge in ihrem natürlichen Zusammenhang betrachtet werden. Die Gewohnheiten mikroskopischen Arbeitens haben gerade in der Hirnanatomie zu einer vollkommenen Verschiebung der Wertverhältnisse unserer Beobachtung geführt. Gewiss, wir werden ein Ganzes nicht verstehen, wenn wir nicht seine Teile kennen. Aber dieses Ganze ist damit nicht erklärt, dass wir es analysieren. Es gehört dazu, dass wir auch aus den Teilen wieder aufzubauen wissen. In der Hirnforschung nun ist diese Synthese stets nur nach einer Richtung vollzogen worden. Man hat allein das funktionelle Ineinandergreifen der Elemente, seien nun Neuronen oder Nervennetze vorhanden, im Auge gehabt. Beinahe nie aber die Massen der Elemente, die Quantitäten der Hirnsubstanz und deren Verhältnis. Weil sich aber nun jene Synthese selbst wiederum auf den Zusammenhang der Teile innerhalb der Linie des einfachen oder komplizierten Reflexbogens erstreckt, nötigt sie den Mikroskopiker nicht, sich vom zweidimensionalen Sehen abzulösen und die Massenverhältnisse, die Oberflächenskulptur u. a. zu sehen. So gut es einst ein berechtigtes Postulat war, dass makroskopisch beobachtete Tatsachen zu ihrer vollen Erhärtung der Kontrolle durch die mikroskopische Anatomie bedürfen, ebenso muss festgestellt werden, dass alle mikroskopisch klargelegten Facta deswegen nicht vermehrten inneren Wert besitzen, weil sie mit Hilfe eines Instrumentes gewonnen sind. Ihr Wert wird einzig dadurch bestimmt, inwiefern sie sich in Zusammenhänge physiologischer Art, und zwar sowohl der funktionellen des Organs selbst als auch seiner biomechanisch denkbaren Entwicklung, oder in Zusammenhänge phylogenetischer Art zu bringen sind. Alles andere ist Ballast, manchmal unvermeidlicher, meist aus der Behaglichkeit breiten Arbeitens hervorgehender; selten aber als solcher den Autoren dieser dickleibigen Beschreibungen bewusst. Auch hierüber möchte ich als Kronzeugen einen Erfahrenen anrufen und die beherzigenswerten Worte Edingers wiederholen:

„Es darf wohl einmal ausgesprochen werden, dass es besser wäre, wenn Arbeiter, die nicht genügend Zeit oder Kraft haben, ihre Beobachtungen breit anzulegen oder durch längere Arbeit zu kontrollieren, besser andere Arbeitsgebiete in Angriff nähmen, als gerade die Hirnanatomie, wo durch vereinzelte, oft kaum kontrollierbare Behauptungen das ohnehin schwer übersehbare Bild immer wieder unnötig getrübt wird. Sehr störend und auch wissenschaftlich unrichtig ist die Methode des schnellen Publizierens von Einzelheiten, denen dann der weiter arbeitende Autor in kurzer Folge immer neue Zugaben folgen lässt."

Wer viel Modelle rekonstruiert, hat es wohl auch schon empfunden, welche Sicherheit der Anschauung aus diesem Verfahren hervorgeht und wie gewissermassen der durch Schnitte geschaffene künstliche Zustand dadurch unschädlich gemacht wird. Aber das Rekonstruieren kann wohl die Beobachtung ergänzen, nicht ersetzen. Eine Menge feiner Einzelheiten gehen dabei notwendig verloren; diese zeigt uns erst die Lupe wieder. Wie lohnend sich das Arbeiten mit ihr erweist, habe auch ich erfahren. Man vergleiche als Beleg unsere Fig. 56 u. 57 mit v. Kupffers[1]) Fig. 92 u. 94. Überhaupt habe ich es mir zur Pflicht gemacht, möglichst viele Nebenarbeit aus der Darstellung auszuschalten, um die Hauptlinien nicht zu stören, möglichst viele Zusammenhänge schon als solche darzustellen, anstatt ihre Rekonstruktion aus dem Text dem Leser zu überlassen. Man könnte ja fragen, warum ich nur die phylogenetische Synthese durchführe und darauf verzichte, die z. T. sehr bemerkenswerten Resultate vergleichend-physiologischer Art, wie sie in den Arbeiten vieler und trefflicher neuerer Beobachter gesichert worden sind, in die Diskussion zu ziehen. Zunächst kann ich nicht angeben, wie viel davon im vierten Teile unserer Arbeit zur Verwertung zu bringen ist. Dann aber scheint mir die Aufgabe sich erst klar abzuheben, wenn die phylogenetischen und wachstumsphysiologischen Resultate bestätigt und erweitert sind. Bewusste Trennung der Wege schadet ja in solchem Falle nichts; nur Willkür in der Beurteilung des einen Gebietes vom anderen aus ohne Kenntnis des logischen Verhältnisses zwischen phylogenetischer und physiologischer Synthese.

[1]) C. v. Kupffer, Morphogenie des Centralnervensystems, Handbuch der Entwicklungslehre von O. Hertwig. Bd. 1903.

IX. Nomenklatur.

Über die Nomenklatur für die Phylogenie des Hirns werde ich mich in einem Schlussabschnitt der gesamten Arbeit aussprechen. Dagegen sollen hier vorläufig Bezeichnungen festgestellt werden, wie ich sie in der Beschreibung des Wirbeltierhirns überhaupt verwenden werde. Dabei habe ich mich möglichst eng an die herrschende Tradition angeschlossen, da die Schwierigkeiten der Verständigung auch so noch gross genug sind. Hierbei ist aber ausdrücklich verstanden, dass ich die Namen gebrauche, ohne damit bereits etwas für ihren phylogenetischen oder physiologischen Wert zu präjudizieren.

I. Als **Regionen** ohne gegenseitig scharfe Abgrenzung sind zu bezeichnen:

1. Rautenhirn (Rhombencephalon), vom Calamus scriptorius bis zum Trochlearis, zerfallend in a) das verlängerte Mark (Myelencephalon) und b) das Hinterhirn (Epencephalon).
2. Mittelhirn (Mesencephalon).
3. Unterhirn (Hypencephalon).
4. Zwischenhirn (Diencephalon).
5. Vorderhirn (Telencephalon).

II. Als **Längszonen** von bedingter gegenseitiger Begrenzung sind zu unterscheiden:

1. Dorsale: a) Medianzone.
   b) Lateralzonen.
2. Ventrale: a) Lateralzonen.
   b) Medianzone.

Die Längszonen sind, seitdem His[1]) sie am Embryo und ich selbst in der Wirbeltierreihe durchzuführen gesucht haben, von der Morphologie adoptierte Begriffe geworden. Ihr Wert wird ebenfalls in späteren Abschnitten noch besprochen werden. Im Gegensatz zu meiner früheren Auffassung und im Anschluss an His[2]) bin ich endgültig darauf zurück gekommen,

[1]) W. His, Die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monate. Leipzig 1904.

[2]) W. His, Die Entwicklung des menschlichen Rautenhirns vom Ende des ersten bis zum Beginn des dritten Monats. Abh. d. k. säch. Ges. d. Wiss. Bd. XVII. 1891.

deren nicht mehr als die genannten sechs zu unterscheiden. Als Kriterien haben für die Medianzonen die geringe Mächtigkeit der Masse und die beschränkte gewebliche Differenzierung zu gelten, für die Dorsolateralzonen der Besitz sensibler, für die Ventrolateralzonen motorischer Elemente.

Man wird vielleicht erwarten, ich würde nun eine genaue Abgrenzung der Dorsolateralzone von der Ventrolateralzone im Hirn auf diesem frühen Stadium seiner Gestaltung vornehmen wollen, wo noch die Verhältnisse relativ so einfach sind und wo die Zahl der Nervenzellen bereits so beträchtlich ist, dass im Laufe der späteren Entwicklung wohl nur noch deren Zahl, nicht aber deren formgebender Einfluss zunimmt. Ich muss

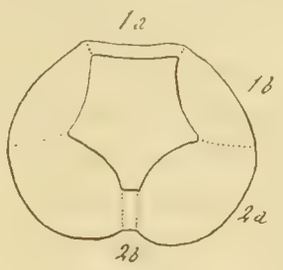


Fig. 1.

Schema der Längszonen des Zentral-Nervensystems an einem Querschnitt demonstriert.

1a = dorsale Medianzone.
1b = dorsale Lateralzone (vorwiegend sensibel).
2a = ventrale Lateralzone (vorwiegend motorisch).
2b = ventrale Medianzone.

mir die Diskussion der theoretischen Frage nach der Abgrenzung der beiden Zonen für den allgemeinen, auf breiterer Basis aufbauenden Teil der Arbeit vorbehalten und die dort eingehender zu begründenden Resultate jetzt nur in einigen Sätzen rein kategorisch hinstellen, damit verständlich werde, in welchem Sinne ich für die ganze Arbeit die Theorie von den Längszonen aufgefasst wissen möchte.

Wenn wir eine Dorsomedianzone und eine Ventromedianzone unterscheiden, so ist diesen Zonen gemeinsam, dass sie primitive Zustände der Gewebeform beibehalten, wo sie nicht von den Lateralzonen gezwungen werden, zu höheren Gewebeformen überzugehen. Insofern stehen sie beide in einem Gegensatz zu den Lateralzonen, von denen freilich die dorsalen

variabler sind und daher die Dorsomedianzone, die auch innerhalb des Kopfes mehr Spielraum hat, stärker modifizieren als die Ventromedianzone. Beide Medianzonen grenzen aber nicht aneinander, ausser im Recessus neuroporicus. Ihre gegenseitige Beeinflussung ist daher auch minim. Anders die Lateralzonen. Sie sind von den Sinnesorganen in erster Linie beherrscht. Auf sie wirken die Medianzonen nur sehr mässig und nur an den Stellen direkten Kontaktes ein. Sie selbst beeinflussen aber einander in viel höherem Grade, namentlich da sie ja nicht nur an Begrenzungsstellen durch ihre Massen aufeinander einwirken, sondern ausserdem funktionell unter sich verknüpft sind. Beinahe in noch höherem Masse endlich durch den in der Längsrichtung und ausserdem im Querschnitt vorhandenen Einfluss schon rein mechanischer Art; denn hier stösst nicht Zellschicht an Zellschicht und Gewebe an Gewebe, sondern eine Zellschicht, die z. B. im Mittelhirn gebildet wird, wirkt auf einen Teil der Medulla oblongata und zwar nicht notwendig auf den ihr im Querschnitt oder in der Längsgliederung entsprechenden Teil zurück, also etwa eine in der Dorsolateralzone des Mittelhirns entstehende Zellschicht wiederum auf die Dorsolateralzone der Medulla oblongata, sondern hier können die auf- oder absteigenden Bahnen jenes Zentrums in die Dorsolateralzone oder in die ventralen verlaufen. Durch diesen rein effektiven Tatbestand wird es uns nicht mehr möglich, für fortgeschrittene embryonale oder definitive Zustände des Gehirns anzugeben, wo und wie sich die Lateralzonen gegen einander abgrenzen. Wir können einzig annehmen, dass die Mehrzahl derjenigen Zellen, die lateral von der Dorsomedianzone liegen, sensible Zentralstationen vorstellen und im allgemeinen der Hinterhirnzone des Rückenmarks entsprechen, dass ebenso die der Ventromedianzone zunächst verlaufenden Zellsäulen motorischen Charakter haben, also der Ventrolateralzone angehören, dass aber in den ausgedehnten Zwischenbezirken Mischungen und Durchdringungen stattfinden, die wesentlich von der Mechanik der Faserbahnmassen hervorgerufen werden, und in vielen Punkten einer genaueren Untersuchung bedürfen, jedenfalls aber keine scharfe, etwa mit den an der Oberfläche der Membranae limitantes zu unterscheidenden Längswülsten und Gruben in Übereinstimmung zu bringende Abgrenzung zulassen. Bevor also an scharfe Fassung einer Trennung dieser beiden lateralen Zonen gedacht werden kann, wäre der

empirische Nachweis dieser Trennung nötig. Wenn His für das embryonale Nervenrohr und ich selbst innerhalb der phylogenetischen Entwicklung der Vertebraten diese Trennung betonen, so fehlt doch der Nachweis, welcher nur zu erbringen wäre, falls es gelänge, motorische und sensible Nervenzellen durch Färbung, oder ihrer Ontogenie nach deutlich zu unterscheiden. Dies ist wenigstens einstweilen ausgeschlossen und die Hypothese von der Homologie der Längszonen des Hirns mit den Rückenmarkshörnern kann nicht die von uns ihr zugedachte Bedeutung gewinnen, wohl aber eine andere, weniger spezielle, wovon später mehr. Dorsolateralzone und Ventrolateralzone sind also für mich von nun an nur Ausdrücke, wodurch der vorwiegende funktionelle Charakter der beiden Längsgebiete ausgedrückt werden mag, aber weder eine ausschliessliche, anatomisch oder genetisch scharf begrenzte Längseinheit, noch eine äusserlich mit den wohl begrenzten Wülsten und Gruben zusammenfallende, genetische Einheit. Beide Lateralzonen sind unter sich nicht in ähnlichem Gegensatz wie die Medianzonen unter sich, stehen aber als aktive formgestaltende Masse den Medianzonen gegenüber, die sich rein passiv verhalten.

III. Als **Oberflächenteile** haben zu gelten:

1. positive: Vorwölbungen.
   a) Höcker (Tuberculum), eine konvexe Protuberanz, meist ohne scharfe Begrenzung.
   b) Wulst (Torus), eine konvexe Protuberanz mit einseitig verlängerter Achse.
   c) Windung (Gyrus), ein gebogener Wulst.
   d) Faserband (Ligamen), ein Oberflächenbezirk mit erkennbarer Faserstreifung.
2. negative: Einsenkungen.
   a) Grube (Fossa), eine allseitig ebenmässige Einsenkung.
   b) Furche (Sulcus), eine Einsenkung mit einseitiger Ausdehnung.
   c) Winkel, Divertikel (Recessus), eine zugespitzte Einsenkung.
   d) Hohlraum (Ventriculus).

IV. Als **Tiefenbestandteile** bezeichne ich geweblich gleichartige aber begrenzte Massen, welche aus Zellen oder Teilen solcher (namentlich Axonen) gebildet sind, ohne doch selbst eigentliche Gewebe zu sein.

1. Aus Axonen gebildet.

a) Faserzug (Tractus), eine diffuse Masse ähnlich gerichteter Axonen.

b) Faserbahn (Fasciculus), eine geschlossene Masse ähnlich gerichteter Axonen.

Fig. 2.

Schema der verschiedenen Formen der Gangliosa.
a = G. diffusa, b = G. cumulosa, c = G. nidosa, d = G. stratosa.

c) Faserbüschel (Virga), ungeschlossene Axonenmassen zwischen der Membrana limitans externa und der Nervenwurzel.

d) Nervenwurzel (Radix), geschlossene, durch Bindegewebe vereinigte Axonenmassen zwischen der M. limit. ext. und den Spinalknoten resp. Sinnesorganen.

2. Aus Neuronen gebildet (Fig. 2):

a) Zellschwarm (Turba), diffuse Zellmassen ohne engeren Anschluss der Elemente unter sich.

b) Zellhaufen (Cumulus), geschlossene Zellmassen von grösserer Ausdehnung.

c) Zellnest (Nidus), geschlossene Zellmasse von geringerer Ausdehnung.

d) Zellschicht (Stratum), geschichtete Zellmasse.

V. Als **Gewebe** (Telae) unterscheide ich:

1. Epithelien (Ependyme in partibus) (Epitheliosa), undifferenzierte Epithelzellen, sofern sie zu einem Gewebe verbunden und funktionell nicht differenziert sind.

2. Stützzellengewebe (Neurogliosa), differenzierte Epithelzellen mit ausschliesslich stützender Funktion.

a) Pfeilergewebe (Pilosa) (Fig. 3), bestehend aus Zellen mit vorwiegend radiärer Längsachse, ohne erhebliche Fortsätze.

α) Brachypilosa mit kurzer Längsachse.

β) Makropilosa mit langer Längsachse.

b) Als Asteropilosa ist nicht ein Übergangsgewebe mit annähernd gleicher Mischung von Pilocyten und Asterocyten zu bezeichnen, sondern dasjenige, welches vorwiegend von Übergangsformen zwischen beiden Zellarten gebildet wird. Denn jenes können wir ruhig als Asterosa bezeichnen, da diese ja fast nie ganz ohne Pfeilerzellen auftritt.

c) Sterngewebe (Asterosa) mit vorwiegend sternförmig gebauten, also nicht radiär-axialen Stützzellen. Die Pfeilerzellen, die daneben in geringer Zahl vorhanden sein können, sind entweder von der Membrana limitans externa abgelöst: Ependym (in partibus); oder von der Membrana limitans interna: Peridym.

3. Nervenzellengewebe (Gangliosa) differenzierte ausschliesslich nervöser Funktion dienende Epithelzellen. Es kann unterschieden werden nach zwei Gesichtspunkten:

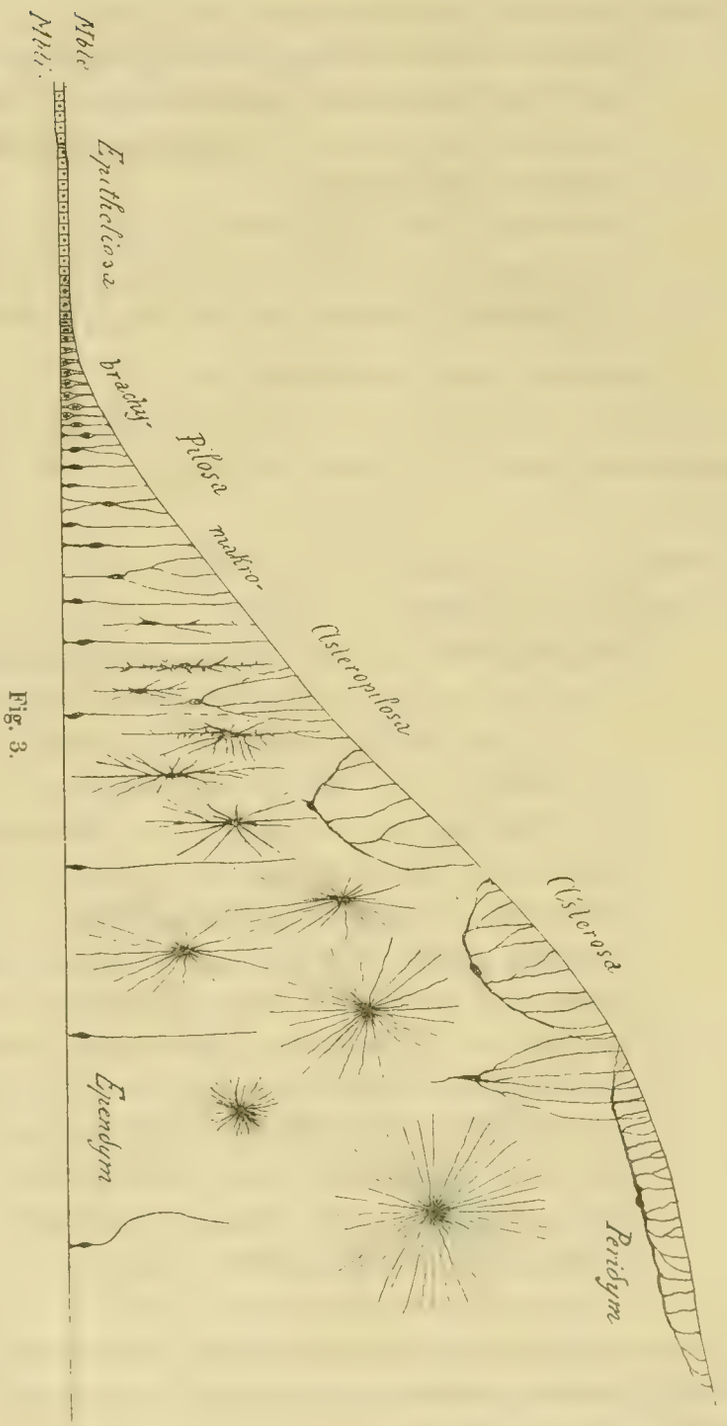


Fig. 3.

Schematischer Querschnitt durch die Nervensubstanz zur Darstellung der verschiedenen Differenzierungsgrade des Stützgewebes.

a) Nach der Anordnung und Masse der Elemente als G. turbosa, cumulosa, nidosa, stratosa (vgl. IV 2a—d) oder

b) Nach dem Grade der Differenzierung der Elemente, welcher nach Grösse und Form der letzteren so sehr schwankt, dass einstweilen auf besondere Bezeichnung besser verzichtet wird.

Für eine mechanische Betrachtung des Nervengewebes sind aber neben den Geweben noch die Substanzmassen zu berücksichtigen, gleichviel, von welchem Gewebe sie stammen. Denn es ist leicht einzusehen, dass eine vorwiegend markige Struktur, also eine solche bei der das Gewebe vielseitig mechanisch gleichwertig ist, sich bei Massenverschiebungen anders verhält, als eine fibrilläre, an der Zug und Druck einseitig oder bipolar orientiert ist. So gut, wie also von einer Substantia gelatinosa geredet wird, unterscheiden wir

VI. Als **Substanzen**:

1. S. cellulosa, Zellsubstanz, welche aus Zellmassen gebildet wird.

2. S. medullosa, Marksubstanz, vorwiegend aus Ausscheidungsprodukten der Zellen bestehend, mechanisch allseitig gleichwertig.

3. S. fibrosa, Fasersubstanz, ebenfalls vorwiegend aus Zellteilen bestehend, mechanisch polarisiert.

4. S. mixta, gemischte Substanz, die häufigste Form zugleich die Vorstufe der obigen.

Diejenigen Bezeichnungen, die wir speziell für das Selachierhirn brauchen, sollen bei der Darstellung des Scymnushirns ihre Stelle finden.

Erster Teil.

Das Gehirn der Paläoselachier.

Vorbemerkungen.

Gemäss dem Gesamtplan unserer Arbeit werden unsere beiden ersten Teile die Beschreibung derjenigen Selachiergehirne umfassen, denen sich auch gewisse gemeinsame Schlussfolgerungen abgewinnen lassen. Ich fasse nämlich unter der Bezeichnung Paläoselachier diejenigen Familien der Haie zusammen, welche vermöge ihres anatomischen Baues und der paläontologischen Urkunden als solche Formen zu beurteilen sind, die dem ursprünglichen Grundstock am nächsten gestanden haben. Es sei aber ausdrücklich gesagt, dass hierbei nicht ein durchgreifender Charakter anzugeben ist, der die Paläoselachier kennzeichnen und von den Neoselachiern scharf abtrennen würde, etwa wie die Merkmale, auf Grund deren früher Paläichthyes und Neichthyes geschieden werden sollten. Einmal gehen die Paläoselachier allmählich in die Neoselachier über und wir könnten über manche Familie im Zweifel sein, wo wir sie unterbringen sollten. Auch gibt es unter den Paläoselachiern Gattungen und Arten, die wir sicher als erdgeschichtlich neu zu taxieren haben, auch wenn sie nur in ihrem Gesamthabitus abweichen und dabei an alte Formen anschliessen.

Paläoselachier und Neoselachier sind also gewissermassen Grenzfälle, die entsprechend dem wirklichen Ablauf der Stammesentwicklung ineinander übergehen.

Zu den Paläoselachiern zähle ich, abgesehen von den primitiven ausgestorbenen Selachiern die Familien der Cladodidae, Notidanidae, Scymnidae, Laemargidae, Spinacidae, Echinorhinidae, Cestraciontidae, Pristiophoridae, Squatinidae und Scyllidae.

Scymnus bietet uns den zweckmässigsten Ausgangspunkt, da bei relativ grosser, bereits von C. G. Carus,[1]) Gegenbaur[2]) und T. J. Parker[3]) betonter Primitivität dieser Gattung, das Material relativ leicht zu beschaffen war. Ausserdem sind die bei Scymnus vorhandenen Abweichungen vom Bauplan des Selachierhirns geringfügig und durchsichtig. An Scymnus schliesst sich der nächst verwandte Laemargus rostratus an und die zu ihm gehörende Endform, Laemargus borealis. Ihnen lasse ich die Notidaniden folgen, nebst einigen Bemerkungen über Chlamydoselachus. Sodann die Spinaciden, welche eigentlich den drei ersten Formen am nächsten stehen, wobei sich von selbst die Reihenfolge: Centrina, Acanthias, Spinax, Centroscymnus, Centrophorus ergibt. Fernerhin eine Reihe von aberranten Typen, die sich da und dort an den Grundstock der Spinaciden (im weiteren Sinne Günthers) anlehnt, nämlich Pristiophorus, Echinorhinus, Isistius, Squatina. Cestracion und die Holocephalen beschliessen die Reihe der im zweiten Teil zu beschreibenden Gattungen.

Man erwarte jedoch nicht, dass wir schon bei Scymnus alle typischen Zustände schildern, Zustände des N. terminalis bei Heptanchus, des Acusticofacialis-complexes bei Laemargus, der Blutgefässe bei Spinax, der Arachnoidea bei Chimaera, welche, dank der besonderen Konservierung oder Präparation bei Scymnus nicht ebenso nachweisbar waren, werden bei diesen Gattungen zur Sprache kommen. Dennoch wird man sie als typisch betrachten dürfen. Ausserdem werden die Besonderheiten des Scymnushirns, die generischen oder familiären Wert haben, erst aus der Vergleichung mit den übrigen Paläoselachiern hervorspringen. Nur für die Histologie und Embryologie habe ich eine Ausnahme gemacht und Beobachtungen, die an anderen Gattungen gewonnen, aber typisch sind, in die Schilderung von Scymnus einbezogen.

[1]) C. G. Carus, Erläuterungstafeln der vergl. Anat. 1826—40.

[2]) C. Gegenbaur, Untersuchungen zur vergl. Anatomie der Wirbelthiere. 1872.

[3]) T. J. Parker, Notes on the anatomy and embryology of Scymnus lichia. Trans. New. Zeal. Inst. XV. 1882.

Erste Abteilung.

Scymnus lichia in erwachsenem Zustande.

I. Chronologie der Erforschung des Hirns.

Das Hirn von Scymnus lichia ist schon mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen. Vier Autoren haben ihm bereits in ausgedehnterem Masse ihre Aufmerksamkeit geschenkt. Busch[1]) vermutete auf Grund der Abbildungen von Blasius[2]) (1681), dieser sei der erste, der das Hirn von Scymnus beschreibe. Doch kopiert hier Blasius bloss N. Steno[3]) (1669), der, seiner Figur 4 sowie den Gewichtsangaben nach zu schliessen, Laemargus borealis vor sich hatte. Immerhin möchte ich hier schon aus Stenos Beschreibung hervorheben, dass er den vierten Ventrikel richtig bestimmt, auch den Zusammenhang zwischen dem Mittelhirn und dem Opticus richtig beobachtet, dass er aber für das Cerebellum einen falschen Buchstaben im Text angibt. Er sah die Lobi optici innen hohl, die Höhlen in Verbindung mit den übrigen Ventrikeln. Sodann betont er, dass der Opticus ungekreuzt aus dem Gehirn austritt. Das gesamte Vorderhirn betrachtet er als homolog den Lobi olfactorii. Die Decke des dritten Ventrikels entfernt er nicht, wie so oft weniger sorgfältige Präparatoren späterhin, sondern beschreibt ihre von den Gefässen herrührende Längsstreifung als Hemisphaerium membranosum, die Längsstreifen sieht er jedoch als Lamellen an, die zur Oberflächenvergrösserung

[1]) W. Busch, De selachiorum et ganoideorum encephalo. 1848. Berlin.

[2]) G. Blasii, Anatome animalium. Amstelod. 1681.

[3]) N. Stenonis, Element. myol. specimen .... Dissectus piscis ex canum genere, Amstelodami 1669.

dieser Hirngegend dienen, der eine beliebige Funktion zukommen könne. Man sieht, dass bereits bei Steno eine Menge zutreffender Bemerkungen und Vergleiche sich vorfinden. Mangelhaft ist allerdings die die Beschreibung begleitende Abbildung.

Die zweite Beschreibung gibt Joh. Müllers Schüler Busch. Nach seiner Abbildung fehlten dem von ihm gesehenen Objekte die Tractus und Bulbi olfactorii, ferner die Decken des dritten und des vierten Ventrikels. Nur angedeutet ist der Komplex der neunten und zehnten Hirnnerven, sowie der sensible Trigeminofacialis, alle anderen Nerven fehlen. Während das Innere der Rautengrube leidlich dargestellt ist, ist der Rand ungenau behandelt. Das Kleinhirn ist zu kurz und zu sehr elliptisch ausgefallen; infolge dessen tritt das Mittelhirn zu viel hervor. Busch betont die Einfachheit der Rautenohren (Corpora restiformia); auch hat er eine Wulstung an der Basis der Rautengrube beobachtet, die offenbar durch den Verlauf des hinteren Längsbündels hervorgerufen ist. Endlich bemerkt er von dieser Gegend, der Ventrikel sei so breit, dass die kaudalwärts dünn auslaufenden „Corpora restiformia" den Bau der Innenfläche nicht verdecken. Das Hinterhirn sei im Verhältnis zu dem anderer Selachier, bei denen es ähnlichen Bau aufweise, klein zu nennen. Das Unterhirn dagegen sei stark entwickelt. Dieses wird denn auch, als für die Selachier typisch, des Näheren beschrieben und seine Teile im ganzen richtig dargestellt: die dreiteilige Hypophyse, die Lobi inferiores und kaudal von ihnen wenigstens ein paar der vorhandenen Körper. Dagegen ist Busch entgangen der getrennte Austritt der Optici und die Decke des dritten Ventrikels. Von systematischer Bedeutung erscheint ihm die Streckung der Pedunculi cerebri. Wahrscheinlich rührt dieses Urteil von Joh. Müller her, der mit Henle[1]) an der generischen Zusammengehörigkeit von Scymnus lichia und Laemargus borealis zweifelte und daher begreiflicherweise nach Charakteren suchte, die eine Trennung beider rechtfertigten. Am Vorderhirn betont Busch das tiefe Einschneiden der Medianfurche. Alles in allem hat Busch immerhin verstanden, eine respektable Ernte von Tatsachen einzuheimsen.

[1]) J. Müller und Henle, Systematische Beschreibung der Plagiostomen. Berlin 1841.

Miclucho-Maclay[1]) fand das embryonale Hirn von Scymnus dem von Heptanchus so ähnlich, dass es keiner weiteren Beschreibung bedürfe. Auch das erwachsene weiche wenig von der „Grundform" ab, es sei denn durch Entfaltung des Nachhirns und Streckung der Pedunculi cerebri. Im übrigen ergeht er sich bei Anlass des Scymnusgehirns über das Unterhirn im allgemeinen ohne neues zu bringen. Seiner Beschreibung des Hirns von Scymnus lichia schliesst er einige Zeilen über das Gehirn einer angeblich anderen Spezies an, die er auf den Canaren erbeutet hat. Die spezifische Verschiedenheit dieser Form soll bewiesen werden durch die Abweichungen im Bau des Gehirns, über den er, unter Hinweis auf die Abbildungen, Worte nicht verliert. Unterschiede finden sich nun allerdings in seinen beiden Zeichnungen, aber keineswegs solche, denen irgend eine Bedeutung zukäme. Wie im allgemeinen, so auch in diesem speziellen Falle, lassen seine Figuren die Beobachtung selbst der gröbsten Formen vermissen, sowie auch die Wiedergabe dessen, was Busch bereits sorgfältiger dargestellt hatte. Das einzige Plus im Vergleich zu Busch's Figur ist die Anwesenheit der dritten und vierten Hirnnerven. Miclucho zählt Scymnus zu seiner ersten Gruppe der Selachier und vindiziert ihm die Andeutung einer Trennung des Vorderhirns in zwei Hemisphären.

W. Müller[2]) hat unter anderem auch die Hypophyse von Scymnus lichia beschrieben, ohne dass seine Angaben weiterhin wertvoll geworden wären.

T. J. Parker hat Scymnus lichia in den antarktischen Meeren entdeckt und in Verbindung mit anderen anatomischen Mitteilungen auch das Nervensystem beschrieben und abgebildet. Sonderbarerweise bestreitet er die Existenz der Lobi inferiores. Die Weite des vierten Ventrikels, die Grösse des Mittelhirns, welche im Verhältnis der der übrigen Hirnteile ähnlich sei, das dünnwandige hinten unpaare Vorderhirn, der allmähliche Übergang des letzteren nach den Lobi und Tractus olfactorii, die Weite sämtlicher Höhlen und die Dünnwandigkeit des Gehirns überhaupt, das

[1]) N. Miclucho-Maclay, Beiträge zur vergleichenden Neurologie der Wirbeltiere. Leipzig 1870.

[2]) W. Müller, Ueber Entwicklung und Bau der Hypophysis und des Proc. infundibuli cerebri. Jen. Zeitschr. Med. Naturw. Bd. VI. 1871. p. 396.

alles betont Parker als Charaktere, welche dem Scymnusgehirn den Stempel eines wahrhaft schematischen Vertebratenhirns aufdrücken.

Von gelegentlichen Besprechungen des Scymnushirns ist zu erwähnen, dass Fürbringer[1]) für Scymnus zwei occipitale und zwei occipitospinale Nerven notiert.

Endlich habe ich selbst[2]) das Scymnusgehirn der Vergleichung des Ceratodusgehirns mit dem der Selachier zu Grunde gelegt. In neuester Zeit hat W. Locy[3]) den N. terminalis von Scymnus beschrieben.

Die Arbeiten, die für Kenntnis der übrigen Kopfteile in Betracht kommen, werden hier nicht aufgeführt.

Es ist nicht meine Absicht, eine alle Einzelheiten erschöpfende Monographie von Scymnus lichia zu geben; aber ich kann nicht umhin, gewisse rein äussere Formverhältnisse der Organe des ganzen Körpers und des Kopfes eingehender darzustellen als man vielleicht für nötig erachten möchte, da sie in irgend welchen Beziehungen zum Bau des Zentral-Nervensystems stehen, oder wenigstens zu stehen verdächtig sind. Wie ich mir diese Beziehungen denke, das wird später in einem besonderen Abschnitte erörtert werden.

[1]) M. Fürbringer, Über die spino-occipitalen Nerven der Selachier und Holocephalen und ihre vergleichende Morphologie. Festschr. Gegenbaur. 1897.

[2]) R. Bing und R. Burckhardt, Das Centralnervensystem von Ceratodus forsteri, Semon Zool. Forschungsreisen I. 1905.

[3]) W. Locy, A footnote to the ancestral history of the Vertebrate brain, Science 1905.

II. Körperform von Scymnus.

Die Körperform von Scymnus erhellt aus der nebenstehenden Textfigur (Fig. 4), die streng nach der Natur entworfen ist. Wie bei allen Selachiern, die wir als Haie zu bezeichnen pflegen, ist sie die einer Spindel oder eines Torpedos, genau auf den geringsten Widerstand eingerichtet. Von letztgenannter Eigenschaft kann man sich am besten überzeugen, wenn man ein totes Exemplar unter Wasser an der Schwanzflosse fasst und ihm einen leisen Stoss nach vorne versetzt. Beinahe ohne Widerstand gleitet der leblose Körper durch weite Strecken rasch dahin. Der Querschnitt

Fig. 4.
Linearer Umriss von Scymnus lichia. $^1/_6$ nat. Gr.

des ganzen Körpers ist etwa drehrund und bleibt sich über den Rumpf und den Schwanz hin bis zur Schwanzflosse ziemlich gleich. Nur schwach sind die Hohlrinnen an der Seite des Körpers ausgebildet, in denen die Seitenlinie verläuft und unter denen die Seitenrumpfmuskeln sich in eine dorsale und eine ventrale Portion zerlegen. Ausserdem behält auch der erwachsene Rumpf noch auf lange Zeit hinaus Uberreste der seitwärts vom Bauch verlaufenden Kanten (vgl. H. Helbing, p. 360). Die drehrunde Gestalt, die gleichmässig braune Farbe und endlich die Beschaffenheit des Gebisses deuten darauf hin, dass Scymnus, über dessen Lebensgewohnheiten

wir nichts zuverlässiges wissen, nach Art mancher verwandter Selachier, bald auf dem Rücken, bald auf dem Bauche schwimmt und wahrscheinlich, wie etwa Laemargus, gerne seine Opfer von unten her anfällt.

Die Länge der zahlreichen Exemplare, die ich untersuchte, war eine relativ konstante; schon wegen der Grössenkonstanz verdiente diese Art vor anderen, von denen man oft schwer eine grössere Zahl ähnlich grosser Exemplare erhält, den Vorzug. Die etwa 15 erwachsenen Exemplare, deren Hirn ich sah, schwankten in ihrer Länge zwischen 75 cm und 90 cm, wie auch durchschnittlich die Länge von Scymnus von den Autoren angegeben wird. Auf Exemplare dieser Länge beziehen sich auch meine Angaben, wo nichts anderes hervorgehoben ist. Ein besonders stattliches Exemplar mass allerdings 105 cm, ein kleineres nur 68 cm. Von da an abwärts verfügte ich über je ein Exemplar von 44 cm, eines von 41 cm, fünf eben zur Geburt reife von 30 cm, (für das Nähere über dieses seltsame Grössenverhältnis zwischen Föten und Erwachsenen s. Helbing a. a. O. p. 511); eine weitere Tracht fötaler Exemplare von 18 cm, eine solche von 10 cm und endlich eine von 4,2 cm ergänzten das an und für sich seltene Material aufs Beste. Die jüngeren Stadien erhielt ich nicht; es konnte auch bei den vielen, solche bei anderen Selachiern behandelten Untersuchungen füglich davon abgesehen werden, auch sind bereits die Embryonen von 4,2 cm so ähnlich denen der übrigen Paläoselachier, dass noch nicht einmal bei ihnen bereits Familienmerkmale zum Vorschein kämen. Andererseits konnte ich keines noch grösseren Exemplares habhaft werden, als meines grössten, so sehr es erwünscht wäre, eine solche Rarität auf das Gehirn hin untersuchen zu können. Von rein praktischem Wert für die Grössenbestimmung erwachsener Exemplare ist hier noch zu erwähnen, dass der Abstand Schnauzenspitze—Spritzloch etwa $^1/_{10}$ der Gesamtlänge des Tieres beträgt.

III. Kopf und dessen Organe.

1. Äussere Form des Kopfes.

Besondere Beachtung erfordert die äussere Form des Kopfes, denn sie steht sowohl im Gegensatz zu der des übrigen Körpers, als auch ist sie für die Gattung Scymnus im Vergleich zu anderen Selachiern eine durchaus eigenartige und daher auch nicht ohne Einfluss auf die Konfiguration des Gehirns. Der runde Querschnitt des Rumpfes setzt sich wohl noch über die Kiemenregion fort, verändert sich aber in rostraler Richtung und zwar so, dass die ventrale Wölbung zunimmt, dorsal aber zwischen den Spritzlöchern und dem rostralen Ende eine beinahe ebene Fläche entsteht. Auch im Profil zeigt der Kopf ausgesprochene Eigentümlichkeiten. So tritt zwischen der vordersten Kiemenspalte und dem Spritzloch eine sanfte Einschnürung auf, die sich wie ein Hals ansieht. Dorsal setzt sich die vom Rücken her zu verfolgende Linie ziemlich gerade fort, mit leichter Wölbung über dem Auge. Dann biegt sie am Rostrum unter einem Winkel von 50—60° um, verläuft mit leichtem Bogen über die Nasenregion, wölbt sich zur Oberlippe, um vom Munde unterbrochen zu werden. In dieser Richtung setzt sie jenseits der Unterlippe fort und biegt nur noch einmal hinter dem Unterkiefer etwas aufwärts, um endlich in die ventrale Rumpflinie auszulaufen.

2. Massen des Kopfes.

Was die Massen der Organe betrifft, welche am Aufbau des Kopfes teilnehmen, so bin ich durch Messung ihres Volumens an einem Kopfe zu folgenden Verhältniszahlen gelangt, die auch bei Schwankungen, welche verschiedene Messungen ergeben würden, immerhin annähernd gleich bleiben werden:

Schädel (incl. Gebiss) . .	25	%
Hirn	4	„
Augen	9	„
Integument	14,5	„
Muskeln	35	„
Höhlen	10	„
Nasenbecher	2,5	„

Etwaige Differenzen werden auf die bei einer Bestimmung der Volumina nicht zu vermeidenden Fehlerquellen entfallen. Jedenfalls drücken die Zahlen deutlich aus, dass der Masse nach dominieren die Muskulatur und der Schädel, dass ferner die Masse des Hirns, auch wenn wir die Ventrikel mit einbeziehen, nur etwa ein Drittel der Masse des Integuments erreicht, von der aber der Augen ums Doppelte übertroffen wird. In der Totalmasse des Kopfes ist inbegriffen das viscerale Cranium und seine Muskulatur. Wenn wir diesen Komplex annähernd abschätzen sollen, so dürfte ihm allein schon etwa 35 % der gesamten Kopfmasse anheimfallen. Diese quantitativen Verhältnisse der verschiedenen Kopforgane werden uns später in Verbindung mit der Entwicklungsgeschichte des Hirns wieder beschäftigen.

3. Oberflächliche Organe des Kopfes.

a) Integument.

Das Integument von Scymnus teilt seine allgemeine Beschaffenheit mit dem anderer niederer Selachier. Die Schuppen liegen einander nicht direkt an, sondern sind durch Hautstreifen getrennt. Immerhin wechselt ihre Grösse und Form ziemlich erheblich und so finden wir sie denn besonders kräftig auf der Unterseite des Rostrums ausgebildet, wo sie auch nicht wie anderwärts drei oder fünf Kiele, sondern ganze rhombische Flächen an der Oberfläche der Schuppenspitze tragen. Dorsal von der Spitze des Rostrums liegt der Nabel des Schuppenkleides, von dem ausgehend die Schuppen ihre Spitzen nach allen Seiten hin richten. Auf die vielseitigen Modifikationen des Schuppenkleides einzutreten, ist hier nicht der Ort.

b) Öffnungen des Integuments.

Dagegen interessieren uns die Stellen, wo das Integument durchbrochen wird (Taf. I Fig. 1) und wo seine Elemente plötzlich aufhören oder

nur in rudimentären Formen vorhanden sind, die Öffnungen, deren Lage und Grösse die Konfiguration des Kopfes wesentlich beeinflusst. Von diesen unterscheiden wir zweierlei, solche die mit den Eingeweiden in Beziehung stehen (intestinale), die Kiemenspalten, das Spritzloch, den Mund, und solche, die den Sinnesorganen als Pforten dienen: die Öffnungen der Seitenlinie, der Lorenzinischen Ampullen, des Gehörorgans, des Auges und der Nase.

Die Kiemenspalten liegen in beträchtlicher Entfernung von dem uns angehenden Teile des Kopfes. Die erste zirka 14 cm, die letzte zirka 19 cm von der Schnauzenspitze. Das Spritzloch ist von ihnen weitab und rostralwärts gerückt und liegt bei halbwüchsigen und erwachsenen Tieren, wie oben erwähnt, in $^1/_{10}$ der gesamten Körperlänge am Kopf, in demselben Querschnitt wie die Mundwinkel, hinter und über dem Auge dorsalwärts gerichtet. Seine innere Öffnung besitzt einen Querdurchmesser von 1,4 cm in transversaler und 0,5 cm in axialer Richtung. Der Abstand beider medialen Spritzlochränder von einander misst 4,2 cm. Grösser ist die äussere Öffnung, sie ist halbmondförmig, mit rostral konvexem Bogen und misst $1{,}7 \times 1$ cm. Sie wird begrenzt durch einen beweglichen Querwall; oralwärts von diesem dehnen sich durch Hautfalten begrenzte Divertikel aus, von denen wir einen kleineren lateralwärts gerichteten von 0,5 cm Tiefe und einen medialen von 1 cm Tiefe unterscheiden können. Diesem Querwall liegen die Spritzlochknorpel zu Grunde. Er ist auch mit winzigen atypischen Hautzähnchen besetzt, während die Spritzlochdivertikel von nackter Haut bekleidet sind.

Die Mundöffnung verläuft auf der Unterseite des Kopfes in einem parabolischen Bogen, dessen kleinster Abstand von der Spitze des Rostrums 5 cm, dessen grösster 9 cm misst. Die Mundwinkel sind zirka 7 cm von einander entfernt. Abgesehen von dem eigentümlichen Schnitt des Mundes ziehen vor allem die mannigfaltigen Lippenbildungen die Aufmerksamkeit auf sich. Bei geschlossenem Munde sieht man zunächst nur die Unterlippe, welche sich wie die übrigen Lippenbildungen durch schmutzig weisse Farbe und durch Mangel an Hautzähnen auszeichnet. Innerhalb des Oberlippenbogens bildet die Haut tiefe äussere Lippentaschen, die sich über die Labialknorpel einbiegen, ohne jedoch in der Medianebene zusammenzufliessen. Sie spitzen sich vielmehr etwa 1 cm vor ihr aus. Von dieser Verbindungsbrücke

der Schleimhaut aus erstreckt sich gegen die Zahnreihe hin, dann aber auch die Labialknorpel rostral überkleidend, die dorsale Innenlippe, eine zweite Schleimhautfalte, die jedoch nicht glatt, sondern mit blumenkohlartigen Papillen überdeckt ist, die an manche Formen von Carcinom erinnern. Zwischen Oberkiefer und Labialbogen ist abermals eine tiefe Furche, von glatter Schleimhaut ausgekleidet und an den inneren Lippenwinkeln in die Mundschleimhaut übergehend. Ebenso wie dorsal, verläuft eine ventrale innere Lippenfurche, sodass die Papillenmassen des Unterkiefers in eine solche der Unterlippe und eine solche des Labialbogens gespalten wird; doch ist die Spaltung nicht eine ganz durchgreifende. Auch ist die „Blumenkohlmasse" des unteren Lippenbogens nach ihrer Umgebung hin durch eine scharfe Furche abgesetzt und geht nicht wie an der eigentlichen Lippe allmählich in die glatte Schleimhaut über.

Die Öffnungen der Seitenlinie verteilen sich entsprechend dem später darzustellenden Verlaufe dieses Organs. Sie sind kleine, wie mit einer Nadel gestochene Löcher, die regelmässig von einem etwas erhöhten und dunkler pigmentierten Walle umgeben sind. Dadurch unterscheiden sie sich sofort von den Öffnungen der Ampullenkanäle, die eines solchen Walles entbehren. Die Öffnungen der Gehörorgane sind etwas trichterartig eingesenkte winzige Löcher. Sie liegen etwa 0,5 cm vor der auralen Seitenlinie und von einander in einem Abstand von 1 cm entfernt. In einem Abstande von 1,5 cm hinter der Nasenöffnung und zirka 3 cm hinter der Spitze des Rostrums beginnt die schlitzartig gestaltete Augenöffnung, die genau 3 cm in der Längsrichtung und 1,5 cm in dorsoventraler Richtung misst. Eine Hautfalte, die etwa 3 mm vom dorsalen Augenlochrande verläuft, ohne jedoch vom Orbitalrande des Schädels erzeugt zu sein, gehört zum charakteristischen Bilde des Scymnuskopfes.

Die Nasenlöcher bilden schräg gestellte Schlitze von 1,2 cm Länge. Ihr oberer Rand fällt genau in die Mitte zwischen Rostralspitze und Augenöffnung. Wie bei allen Selachiern wird sie durch zwei Hautvorsprünge, die sich über einander legen, funktionell in zwei Teile zerlegt, einen oberen rundlichen Teil, welcher das einströmende Wasser aufnimmt und durch einen Vorsprung der kaudalen Falte in einem Wirbel über die Nasenschleimhaut gleiten lässt und einen unteren, mehr spaltenförmigen Teil, aus dem das Wasser austritt und kaudalwärts gerichtet wird.

c) Organe des Integuments.

α) Seitenlinie.

Das Seitenliniensystem (Taf. I Fig. 1) stimmt in seinen wesentlichen Zügen mit demjenigen von Laemargus borealis überein, wie es uns Ewart[1]) so musterhaft beschrieben hat. Ewart benannte die verschiedenen Teile desselben je nach der Versorgung mit den Ästen der zugehörigen Nerven. Diese Nomenklatur verdient nicht nur, weil sie die neuere ist, vor der Garmans[2]) den Vorzug. Garman hat zwar eine grosse Zahl von Selachiern auf den Verlauf der Seitenlinie hin untersucht und beschrieben, aber ohne Berücksichtigung der Innervation. Als typisch hat er das Seitenliniensystem von Isurus, einem Lamniden, gewählt und die dort aufgestellten Bezeichnungen auf andere Selachier übertragen. Nun grenzen sich seine Teile der Seitenlinie nicht natürlich, sondern höchstens konventionell ab und da sie an einem höheren Selachier gewonnen sind, können sie keineswegs Anspruch darauf erheben, typisch zu sein. Ich werde mich daher Ewart in der Bezeichnung des Seitenliniensystems anschliessen. Beide Autoren haben übrigens darauf verzichtet, die Röhren, die zum Seitenlinienkanal führen, darzustellen, wenigstens hat dies Garman nur für die höheren Selachier getan. Allis[3]) hat dagegen auf die Röhren Rücksicht genommen und auch ich lege im Gegensatz zu beiden Autoren gerade Wert darauf, diese zu berücksichtigen, da mir ihre anatomische Beschaffenheit etwelche Schlüsse auf ihre Funktion zuzulassen scheint.

In Bezug auf die Topographie der Seitenlinie ist zu bemerken, dass sich dieses Organ bis in die unmittelbare Nähe der Schwanzflosse auf der Hohlrinne bewegt, welche dorsale und ventrale Massen des Seitenrumpfmuskels trennen. Erst etwa 10 cm hinter Beginn des unteren Lappens der Schwanzflosse senkt sie sich ventralwärts, um bald nach Ausführung der charakteristischen, wenn auch schwachen S-förmigen Biegung zu

[1]) J. C. Ewart, The lateral Sense Organs of Elasmobranchs. Trans. R. Soc. Edinburgh. XXXVII. 1892.

[2]) S. Garman, On the lateral canal system of the Selachia and Holocephala. Bull. Mus. Comp. Zool. XVII. 1888.

[3]) E. Phelps Allis, The lateral Sensory Canals etc. of Mustelus laevis. Quart. Journ. Micr. Sc. Vol. 45. 1901.

erlöschen. Rostralwärts steigt sie sanft gegen das Hinterhaupt dorsalwärts. Bis zu der Vereinigung mit anderen Zweigen zähle ich an ihr zirka 200 Röhren. Auf diesem ganzen lateralen Abschnitt wird sie vom Lateralis versorgt, mit Ausnahme des vordersten Teiles, der vom Glossopharyngeus versorgt wird. Dorsal vom Spritzloch bildet sie mit der antimeren Seitenlinie die Kommunikation, welche als auraler Abschnitt (Taf. I Fig. 1 *au*) bezeichnet, seine Nerven weithin zum Lateralis entsendet. Dieses Stück öffnet sich mit ziemlich gestreckten kaudal gerichteten Röhren auf einer Seite, etwa fünf an der Zahl. Vom Abgang des auralen Abschnitts an folgt ein kleines Stück, das in der geraden Verlängerung der Rumpfseitenlinie liegt und bereits, wie alle rostral von ihm gelegenen Teile, vom Trigeminus versorgt wird. Nach diesem zweigt ventralwärts ab der erste, infraorbitale (*ifo*) Abschnitt mit 17 kaudalwärts, in seinem unteren Teile aber sechs gegen das Auge hin gerichteten Röhren. Bevor wir das trigeminale Gebiet der Seitenlinie weiter verfolgen, ist noch das faciale zu erledigen, welches aus einem der Wangengegend horizontal entlang laufenden Abschnitte besteht, mit 13 kaudal und fünf mundwärts (*fa*) gerichteten Röhren, und dem mandibularen Stück (*md*), das hier abweichend von dem Verhalten bei Laemargus von dem Wangenteil völlig abgetrennt ist. Ich zähle an ihm sechs nach dem Munde und fünf in entgegengesetzter Richtung verlaufende Röhren. Zum infraorbitalen Abschnitt zähle ich mit Ewart alle Gebiete, die vom Ramus buccalis des Trigeminus versorgt werden; also die rostrale Fortsetzung der Wangenlinie und ihre Windungen ventral von der Nase und dem kaudal von ihr absteigenden Ast der Supraorbitallinie. Es enthält dieses Gebiet die längsten Röhren und zwar zunächst fünf gegen den Mund hin gerichtete, dann fünf dorsal-kaudal verlaufende, am subnasalen Abschnitt zehn nach dem Mund hin und sechs, welche ziemlich kurz und gerade rostralwärts gerichtet sind. Ziemlich senkrecht ventral von den Nasenöffnungen findet eine Vereinigung der beidseitigen subnasalen Abschnitte (*sn*) der Infraorbitallinie in der Medianebene auf eine Strecke von 0,5 cm statt. Der subnasale Abschnitt endet rostral blind und nie gelang es mir, eine Verbindung mit der so nahe an dieses Ende herantretenden Supraorbitallinie zu konstatieren. Die gesamte Supraorbitallinie (*so*) ist das Gebiet des Ramus superficialis ophthalmicus, sie verläuft dorsal unter welligen Biegungen als

Fortsetzung der Rumpfseitenlinie bis über die Nasengegend, biegt hier um und geht in die Infraorbitallinie über, wo ihr subnasaler Abschnitt anhebt. Ihre Röhren richten sich nach verschiedenen Seiten, die zwei ersten mediodorsalwärts, die folgenden 20 gegen die Augenöffnung, 28 gegen die Nasenöffnung und drei genau gegen das Rostrum. Zusammenfassend sei hier bemerkt, dass somit die Seitenlinie von Scymnus in ihrer Gesamtheit zirka 330 Röhren enthält. Ferner verdient im Anschluss hieran erwähnt zu werden, dass etwa jeder Nervenröhre ein Sinneshügel der Seitenlinie zu entsprechen scheint, da die Nerven, die jedesmal zu einem Hügel verlaufen, in ähnlicher, wenn auch nicht durchgreifend gleicher Anzahl vorhanden sind, wie die Röhren. Ist es erlaubt, auf Grund der Beobachtungen an Scymnus allein Schlüsse zu ziehen über die Bedingungen für die Konfiguration dieses Sinnessystems, so sind als solche etwa folgende anzunehmen:

1. Die Sinneslinie verteilt sich so, dass sie an den Orten stärksten Widerstandes des Körpers gegen das umgebende Medium konzentriert ist.

2. Inneren Widerständen weicht sie nach Möglichkeit aus; denn a) die Laterallinie verläuft längs der Linie geringster Muskelaktion des Rumpfes und Schwanzes; b) die Mandibularlinie löst sich infolge der gewaltigen Lippenbildungen von der übrigen Hyomandibularlinie ab; c) die Supra- und Infraorbitallinie weicht Auge und Nase aus, ebenso wird die Nähe der Ohröffnung und der Mundöffnung gemieden.

Was sodann die Richtung der Röhren betrifft, so zeigt sich, dass, wenn wir die ganze Sinneslinie ins Auge fassen, die grosse Mehrzahl derselben kaudalwärts gerichtet ist. Ferner aber, dass die Röhren der verschiedenen Abschnitte nach den von ihnen umgebenen Öffnungen konvergieren, so die der Mandibular- und der Infraorbitallinie gegen den Mund hin, die der Supraorbitallinie teils gegen die Nase, teils gegen die Augenöffnung hin.

β) Lorenzinische Ampullen.

Die Lorenzinischen Ampullen finden sich gleichzeitig mit der Seitenlinie auf Taf. I Fig. 1 dargestellt. Auch ihre Verteilung weicht von

derjenigen, wie sie Ewart für Laemargus borealis und Minckert[1]) und Klinkhardt[2]) für Spinax niger gegeben hat, in einigen Punkten ab. Ewart unterscheidet nämlich fünf Ampullengruppen: eine hyoide, eine mandibulare, eine innere, eine äussere bukale Gruppe und eine supraorbitale. Minckert ausserdem noch eine spirakulare. Hiervon fehlen bei Scymnus die mandibulare und die spirakulare, ferner sind die beiden bukalen so nahe aufeinander gerückt, dass sie sich ebenso wenig wie die supraorbitale trennen lassen. Ja sogar zwischen der supraorbitalen und der bukalen Gruppe ist eine Trennung nur auf Grund der Nerven möglich, da sie beide am Rostrum zusammenstossen. Die Zählung ergab bei einem erwachsenen Exemplar von Scymnus für die Hyoidgruppe zirka 111, für die Bukalgruppe zirka 67, für die Supraorbitalgruppe zirka 100, für beide Körperhälften zusammen demnach zirka 550 Ampullen. Minckert zählte bei einem Spinaxembryo zirka 610 Ampullen und nimmt an, es finde keine Zunahme ihrer Anzahl im späteren Leben statt. Zählen wir nun von der Zahl der von Minckert angegebenen Ampullen von Spinax diejenige ab, die auf die spirakularen und die mandibularen Gruppen entfallen, weil diese bei Scymnus fehlen, also zirka 50, so erhalten wir eine sehr ähnliche Ampullenzahl, nämlich zirka 560. Es würde daraus erstens hervorgehen, dass die Annahme Minckerts richtig ist, wonach die Zahl der Ampullen schon früh festgestellt werde und zweitens würde sich ergeben, dass, wo solche Übereinstimmung in den peripheren Organen herrscht, ihre Zentren nicht wesentlichem Wechsel unterworfen sei. Indirekt werden jedoch diese eigenartigen Sinnesorgane den Kopfbau beeinflussen, namentlich da, wo sie zu grossen Massen anschwellend, gleichzeitig mit den Einflüssen lokomotorischer Art die Bildung eines Rostrums veranlassen helfen.

Nicht ganz gleichgültig sind die topographischen Beziehungen zwischen Ampullen und Seitenlinie. Diese weicht augenscheinlich (Taf. I Fig. 1) der hyoiden Ampullengruppe aus; auch wird ihr rostraler Verlauf nicht ausschliesslich, aber zugleich mit den höheren Sinnesorganen auch von den

[1]) W. Minckert, Zur Topographie und Entwicklungsgeschichte der Lorenzinischen Ampullen. Anat. Anz. XIX. 1901. Daselbst auch das Historische.

[2]) W. Klinkhardt, Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Kopfganglien und Sinneslinien der Selachier. Jen. Zeitschr. f. Naturwiss. Bd. XL. 1905.

Ampullengruppen beeinflusst. So wird die Supraorbitallinie durch die supraorbitalen Ampullen seitwärts abgedrängt.

γ) Nase.

Der Nasenbecher, der sich hinter den oben beschriebenen Öffnungen birgt, bildet ein äusserlich unvollständiges Ellipsoid, dessen längste Achse etwas unter und lateral von der Rostralspitze beginnend, schräg nach hinten und ziemlich genau gegen den vordersten Winkel der Augenöffnung verläuft. In dieser Richtung wird auch der Hohlraum des Nasenbechers geteilt durch ein bindegewebiges Septum, das in der Mitte am breitesten nach beiden Seiten hin sich ausspitzt. Von ihm entspringen senkrecht, die Nasenhöhle in weitere enge Kammern zerlegend, Lamellen, insgesamt etwa 70, die ebenfalls in der Mitte am stärksten, nach den Seiten hin kleiner werden und auch immer mehr sich schräg stellen. Jede einzelne Lamelle ist von zahlreichen senkrecht zu ihrer Berührungslinie mit der Wand des Nasenbechers verlaufenden feinen Längsfalten bedeckt. Die Längsfalten konvergieren in einer ungefähr rechtwinklig vorspringenden Spitze auf der Mitte der Lamellen. Die Nasenbecher beider Seiten nähern sich gegenseitig median bis auf eine Entfernung von 3 mm (Fig. 5). In ihrer Längsachse messen sie zirka 21 mm, senkrecht dazu 15 mm, ihre kaudale Circumferenz steht von der rostralen der Augen etwa 4 mm ab. Hieraus, sowie aus dem Umstande, dass der Nasenbecher an Volumen etwa ein Drittel des Augapfels erreicht, ist der Einfluss dieser Organe auf die Konfiguration des gesamten Kopfes zu entnehmen. In dem Gebiete, wo der Nasenbecher nur durch eine sehr dünne Knorpelwand vom Integument getrennt ist, weichen auch die integumentalen Sinnesorgane, die Seitenlinie und die Lorenzinischen Ampullen, diesen höher spezialisierten Sinnesorganen, aus.

δ) Auge.

Der Augapfel misst in seiner längsten rostral-kaudal verlaufenden Achse 3,5 cm; dorsoventral 2,8 cm und transversal 2,5 cm (Taf. I Fig. 3). Die gewaltige Massenentfaltung dieser Organe steht offenbar in Zusammenhang mit der Lebensweise von Scymnus. Wir wissen zwar von dieser sehr wenig, doch da die Art nur zufälligerweise und meist in mittleren

Tiefen gefangen wird, ist anzunehmen, dass sie im ganzen ein mittelseeischer Bewohner der Meere sei, der vorzugsweise im trächtigen Zustand und bei

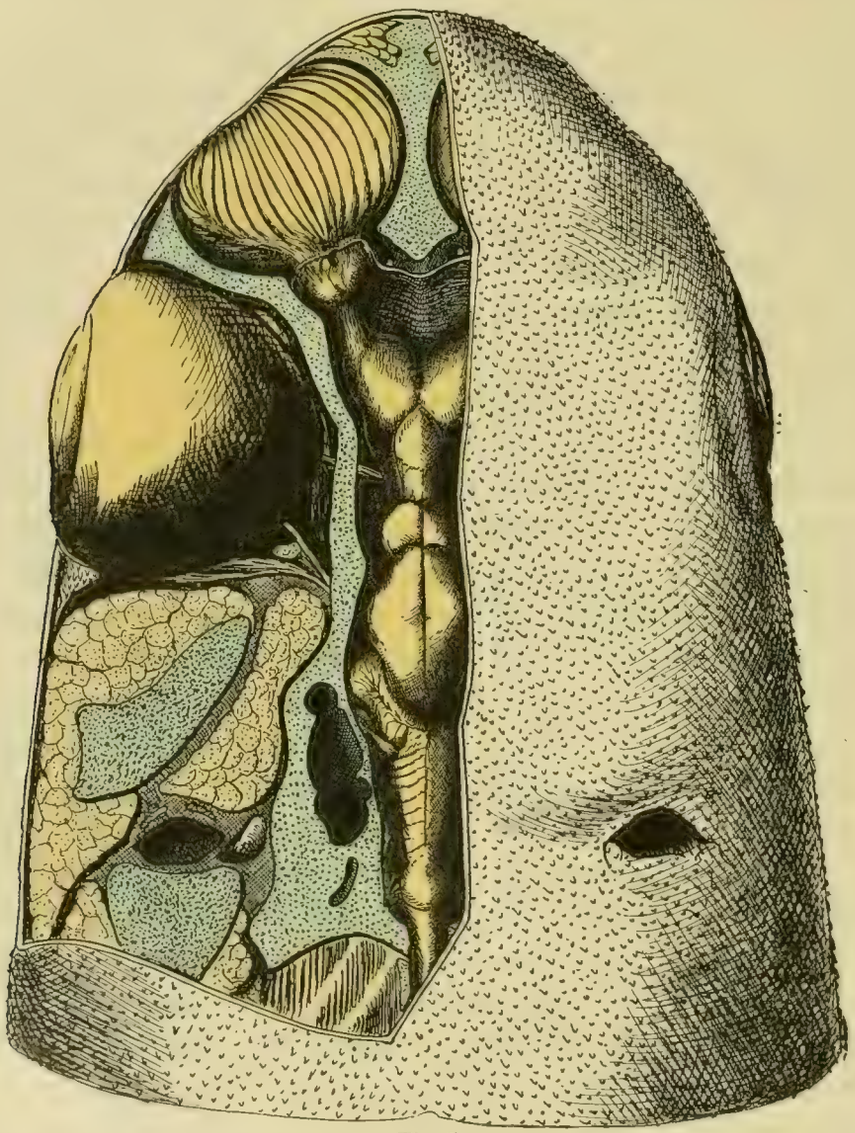


Fig. 5.

Scymnus lichia, Kopf in dorsaler Ansicht, links bis über die Mitte sind das Hirn und die angrenzenden Organe blossgelegt. $1^1/_2$fach vergr.

blau = Knorpel, rot = Muskulatur, braun = Nervensystem und Sinnesorgane.

Nacht sich mehr der Oberfläche nähert. Infolge dessen sind auch die grossen Augen als sekundäre Erwerbungen in Anpassung an mittlere Meerestiefen

zu betrachten im Vergleich zu den normalen verwandter Formen. Die Entfernung beider Augäpfel voneinander beträgt im Minimum nur 19 mm, ist also im Vergleich zum Durchmesser des Kopfes an derselben Stelle gemessen eine sehr geringe zu nennen. Auch der Augapfel wirkt auf die integumentalen Sinnesorgane, sowie auf die zu ihnen verlaufenden Nerven nur verdrängend ein.

Ganz besonders stark erscheint aber, wie aus den weiteren Ausführungen hervorgehen wird, sein Einfluss auf die Gestaltung von Schädelhöhle und Gehirn.

ε) Gehörorgan.

Das Gehörorgan ist von den anderen höheren Sinnesorganen weit getrennt. Seiner Masse nach bildet es nur ein unbedeutendes Füllsel in der Schädelwand der Labyrinthregion, deren äussere Form von ihm weit weniger beeinflusst wird als von der Bildung der Ansatzflächen für die gewaltigen Massen der Kiefer und der vorderen Rumpfmuskulatur. Der vorderste Rand des gesamten Labyrinths fällt etwa mit der Austrittsstelle des Trigeminofacialis in denselben Querschnitt, der hinterste mit den vorderen kleinen Vaguswurzeln. Im Gebiet der vorderen Vaguswurzeln nähern sich die beidseitigen Labyrinthe bis auf 9 mm, wodurch der Medulla oblongata kein Spielraum zur Verbreiterung vergönnt wird. Diese Annäherung beruht jedoch nicht auf speziellen Modifikationen des Labyrinths sowohl, als auf der mächtigen Entfaltung der Kiefermuskeln. In der Längsachse misst das gesamte Labyrinth 2,4 cm in der Transversalachse nur 0,7 cm (Taf. I Fig. 3).

4. Muskulatur des Kopfes.

Die Muskulatur kommt für uns nur in ihrer Massenverteilung in Betracht und macht sich nur insofern am Bau des Gehirns bemerkbar, als sie dazu beiträgt, die allgemeine Konfiguration des Kopfes zu bestimmen (Taf. I Fig. 2, 3). Ihrer Funktion nach sind die Muskeln alle in Beziehung zu den Funktionen des Kiefers und daher bei Scymnus entsprechend kräftig ausgebildet. Dies gilt insbesondere für die Muskeln, welche als Masseteren bezeichnet werden und eigentlich ein ganzes kompliziertes System von

Muskelbündeln vorstellen. Ihr Schwergewicht fällt jedoch hinter den Postorbitalfortsatz und wirkt daher höchstens auf den Bau der Medulla oblongata zurück. Die Unterfläche des Kranialschädels wird vom System des Infraorbitalis bedeckt, das sie aber bloss in ihrer oberflächlichen Konfiguration beeinflusst. In welcher Weise sonst die Muskulatur zur Füllung des gesamten Kopfes beiträgt, geht aus Taf. I Fig. 2 u. 3 hervor. Die Muskeläste der Nerven sind im Vergleich zu den sensiblen so gering ausgebildet, dass sie in ihrer quantitativen Bedeutung für das Gehirn und seine Veränderungen belanglos sind; auch wo die Muskulatur gegenüber den primitiveren Formen bedeutende Veränderungen erfahren hat, werden sie mit grosser Konstanz beibehalten. Spezielle Modifikationen sollen an Ort und Stelle besprochen werden, ebenso die zoologisch-systematische Bedeutung der Muskulatur im Vergleich zu anderen Charakteren für die Selachier.

5. Schädel.

Der viscerale Teil des Schädels kommt mit Ausnahme der Kiefer nicht in Betracht, dagegen interessiert uns jetzt der Kranialschädel, der gleichzeitig die Einflüsse der anderen Kopfteile aufnimmt, dem Gehirn übermittelt und so zu seiner Gestaltung mit beiträgt, wie er selbst unter dem Banne des Gehirns steht und von seiner Form beherrscht wird (Fig. 5). Fürs erste verweise ich auf die Beschreibung und Abbildung des Scymnusschädels durch Gegenbaur, der ich die nachfolgenden Einzelheiten entnehmen will. In der Occipitalregion besteht (im Gegensatz zu den Notidaniden) bereits eine Trennung zwischen Occipitalregion und Wirbelsäule. Aber die Flächen sind noch eben und durch einen Hohlraum getrennt, der als Gelenkhöhle kaum angesehen werden kann. Die Crista occipitalis, ein übrigens sehr schwankender Charakter, ist im Vergleich zu Notidaniden schwach ausgebildet. Von Kanälchen für die ventralen Vaguswurzeln (die Occipitospinalnerven) sind zwei vorhanden, während bei Notidaniden deren mehrere sich nachweisen lassen. Die Labyrinthregion reicht vom Vagusaustritt bis zum Trigeminusaustritt. Die Bogengänge des Labyrinths erzeugen äusserlich nur leichte Erhabenheiten und die Basalfläche stellt mit derjenigen der Occipitalregion zusammen eine kontinuierliche Ebene vor.

Der Facialis tritt ziemlich weit hinten aus. Dorsal imponiert die Parietalgrube (Fig. 6 *Fpar*), die die Ductus endolymphatici aufnimmt. Sodann ist das Hyoidgelenk an der Aussenfläche bemerkbar. Diese ganze Schädelgegend erweist sich als in hohem Masse abhängig vom Labyrinth, wogegen die Beziehungen des Visceralskeletts nur untergeordnete sind. Die Orbitalregion wird hinten begrenzt durch einen bedeutenden, hakenartig seitwärts und abwärts reichenden Postorbitalfortsatz, auch die vordere Begrenzung, die Präorbitalleiste, ist bei Scymnus ziemlich bedeutend.

Die Unterfläche des Schädels erfährt hier eine Knickung. In der Mitte der Orbitalregion nämlich springt eine bedeutende Prominenz vor, die Basalecke, wie bei den Notidaniden, aber weniger mächtig. Wie die Öffnung für den Facialis, so ist auch die für den Trigeminus etwas weiter nach hinten verlagert, als bei den anderen primitiven Selachiern. In Bezug auf das Verhalten der ethmoidalen und orbitalen Kanäle herrscht Übereinstimmung mit den Notidaniden. Bemerkenswert ist die Lage des Opticusaustritts: während er bei den Notidaniden im Querschnitt der Basalecke liegt, ist er hier nach vorn verschoben. Auch der Transversalkanal, durch den die Sinus der beiden Orbitae kommunizieren und die Carotidenkanäle an der Basis werden beschrieben. Von den Orbitae findet sich ein bedeutender Präsphenoidvorsprung. In der Ethmoidalgegend verdient besondere Hervorhebung die Präfrontallücke und der knorplige Vorsprung vor und zwischen den Nasenkapseln, die die Nasenbecher fast völlig einschliessen. Die Präfrontallücke, die mit Bindegewebe erfüllt ist, wird durch eine Membran abgeschlossen.

Diesen Angaben Gegenbaurs über den Kranialschädel (Taf. II Fig. 4) habe ich einige Ergänzungen beizufügen, in einem Punkte ihnen auch zu widersprechen. Um dies zuerst zu erledigen, muss ich mitteilen, dass ich das Verhalten der Wirbelsäule zur Occipitalregion anders antraf, als es Gegenbaur angibt. Nach ihm sollen nämlich die occipitale und die vertebrale Fläche des Occipitalgelenkes „noch eben“ sein, erst bei vorgeschritteneren Selachiern ein Gelenk entstehen und zwar durch laterale Gelenkköpfe (p. 31). Ich finde aber ein median wohl ausgebildetes Gelenk vor, bei dem sich der occipitale Teil konvex vorwölbt und in den konkaven, vertebralen eingreift; ja noch mehr, es ist sogar ein besonderer halbkugeliger

Gelenkkopf auf der occipitalen Seite wohl ausgebildet als ein besonderes Knorpelstück (Fig. 6 *Cro*). Sodann möchte ich die Gegenbaursche Darstellung der Präfrontallücke dahin erweitern, dass diese Grube an ihrem kaudalen Rande die Zirbel beherbergt, und trichterförmig, mit sulzigem Bindegewebe erfüllt, hinabreicht zwischen den Nasenkapseln, um in zwei ziemlich weiten Kanälen zwischen den Nasenkapseln und dem mesethmoidalen Knorpel zu münden.

Was die verschiedenen Verschiebungen im Orbitalgebiet betrifft, so unterliegt es kaum einem Zweifel, dass sie auf zweierlei zurückzuführen sind, einesteils auf das starke Hereingepresstwerden der Augen gegen den Schädel und andernteils auf die mächtige Entfaltung des Visceralskeletts, die auch dem Kranialschädel ihre modifizierenden Eindrücke aufpresst, in Gestalt zweier grosser Gelenkgruben, deren eine vor den Basalecken liegend, in Gegenbaurs Bildern etwas schwach ausgeprägt ist, deren andere die laterale Wand der Occipitalregion gestalten hilft.

6. Schädelhöhle.

Die Schädelhöhle haben wir in zweierlei Richtung zu studieren. Einmal nach ihrer Gesamtkonfiguration und ihrem Verhältnis zum Gehirn, zweitens nach der speziellen Beschaffenheit der Wand und ihren Beziehungen zu den Nervendurchtritten.

a) Gesamtform.

Die Gesamtkonfiguration ist überaus abhängig von dem Grade der individuellen Entwicklung. So lange überhaupt das Tier wächst, verändert sie sich noch beständig und zwar im Sinne einer zunehmenden Verflachung des auf jüngeren spätembryonalen Stadien vorhandenen Reliefs. Zum speziellen Studium standen mir zwei Schädelhöhlen zu Gebote: eine solche von einem sehr grossen Exemplar (zirka 105 cm) (Fig. 6) und eine solche von einem kleineren (zirka 70 cm) (Fig. 7). Vom letzteren stellte ich auch einen Wachsausguss her, um seine Gestalt mit der des Hirns direkt zu vergleichen. An diesem Objekte ist zunächst zu konstatieren, dass der Unterschied zwischen Schädelhöhlenausguss und Gehirnmasse sehr gering ist. An vielen Stellen liegt das Hirn direkt an, ausgenommen natürlich da, wo tiefere Furchen einschneiden und an der dorsalen Seite, wo ein Ab-

stand von zirka 2 mm den dorsalen Kontur des Hirns vom Schädeldach trennt. Als Präcerebralraum (*Cpc*) bezeichnen wir denjenigen Teil des Cavum cranii, der vor dem Vorderhirn liegt. Es ist naturgemäss nicht genau zu umschreiben, aber seine Grösse doch für Altersstadien und verschiedene Arten sehr charakteristisch. Dieser Raum nun ist hier noch relativ sehr gering und da wir bei einem Exemplar von 44 cm das Vorderhirn der Schädelwand direkt anliegen sahen, wird man sich nicht wundern, wenn hier der Raum noch nicht die Hälfte des Volumens erreicht hat, den er bei einem ganz grossen Exemplar besitzt. Er mag etwa einen halben Kubikzentimeter fassen. Eine zweite grosse Differenz zwischen dem Kontur des Hirns und dem Schädelraum besteht über der Decke des dritten Ventrikels, indem der Ursprung des Zirbelstiels vom Dach der Schädelhöhle etwa 5 mm misst. In ähnlicher Weise folgt auch der occipitale Teil des Schädeldaches unter dem Einfluss des Zuges der Rumpfmuskulatur nicht dem Hirnkontur, sondern nimmt von ihm einen Abstand von etwa 4 mm. Allseitig umgibt die Schädelhöhle das Hirn nur an der Stelle, wo die noch mässig ausgebildeten Tractus olfactorii verlaufen und in der Umgebung des intrakranialen Opticus. Abgesehen von diesen letztgenannten Stellen, entspricht auch die Konfiguration des Schädelhöhlenbodens ziemlich genau der Basis des Hirns. Sogar der medioventrale Teil der Präcerebralfurche drückt sich in Gestalt eines deutlich hervorspringenden Kammes aus. Die nahen Beziehungen zwischen der Form des Hirns und des Schädelausgusses kommen im übrigen besonders in der Wiederholung der grossen Massen zum Ausdruck, da das Hirn noch bei einer unserem Stadium wenig vorangehenden Grösse, jedenfalls aber nach dem Stadium von 44 cm Länge des Fisches noch allseitig der Schädelwand anliegt und sich, abgesehen von den erwähnten weiteren Distanzen auf dem Schädelinneren abdrückt.

Wenn wir sodann weiterhin den Boden des Schädelraumes betrachten, so lässt sich an ihm als besonders tiefe Grube diejenige für das Unterhirn unterscheiden. Hinter ihr zieht ein median scharfer Querkamm vorbei, der sich nach vorn in den lateralen Wänden verbreitert und endlich ganz ausflacht.

Während das Schädelinnere sonst allseitig knorpelig abgeschlossen ist, wird es nach der Präfrontallücke des Schädels hin von einer soliden bindegewebigen Membran abgeschlossen (*Mbpf*).

Vergleichen wir hiermit das Schädelinnere eines Exemplares von zirka 105 cm. Die vorhin erwähnten Distanzen zwischen Hirn und Wand sind überall grösser geworden (Fig. 6). Der Präcerebralraum misst reichlich 2 Kubikzentimeter, der Abstand des Zirbelursprunges von der dorsal an ihr befindlichen Schädelhöhlenwand 15 mm.

Auch die Medulla oblongata hat sich vom Boden bis auf eine Entfernung von 4 mm abgehoben und schwebt zwischen den Nervendurchtritten.

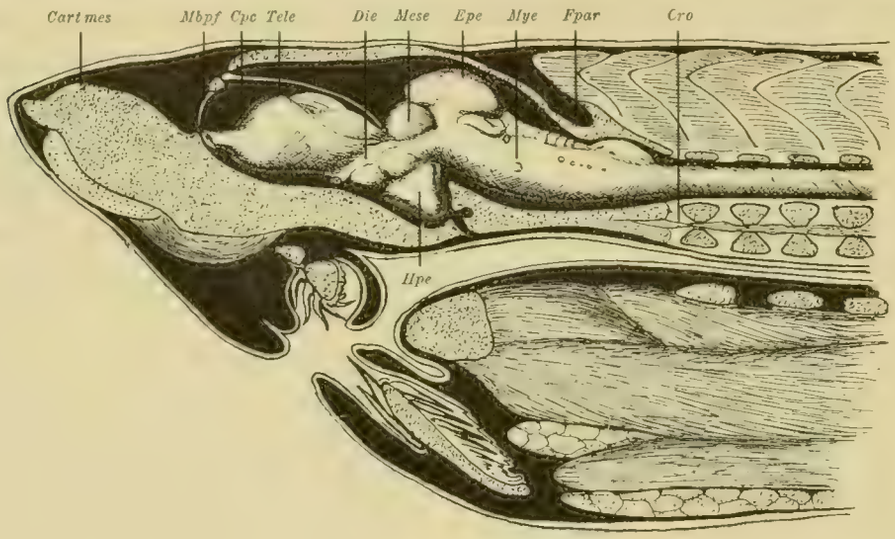


Fig. 6.

Scymnus lichia, Medianschnitt durch den Kopf eines grossen Exemplars, das Gehirn ist nicht zerlegt sondern in toto dargestellt. $^3/_4$ nat. Gr.

Cart mes = Cartilago mesethmoidea,
Cpc = Cavum praecerebrale,
Cro = Articulatio cranico-occipitalis,
Die = Diencephalon,
Epe = Epencephalon,
Fpar = Fossa parietalis,
Hpe = Hypencephalon,
Mbpf = Membrana praefrontalis,
Mese = Mesencephalon,
Mye = Myelencephalon,
Tele = Telencephalon.

Lateral dringt das Cavum cranii tief zwischen Hirn und Schädelwand ein. Durch die Vergrösserung des Präcerebralraumes und Streckung der Tractus olfactorii kommen diese mit der lateralen Wand des Cavum cranii in beinahe direkte Berührung (Fig. 7). Und doch, trotz all diesen Änderungen der gegenseitigen Lagebeziehungen haben sich nur einige ausgeprägte Kämme etwas abgeflacht, sonst aber hat sich der Cavum cranii nur durch allseitig gleichmässiges Wachstum erweitert, aber nicht verändert, während anderer-

seits das Hirn nicht im allgemeinen gewachsen, sondern nur an bestimmten Stellen gestreckt und dadurch eigentümlich verändert worden ist. Ein Vergleich der Proportionen der Schädelhöhle zwischen diesen beiden Stadien ergibt nur ein völliges Gleichbleiben dieser Proportionen.

Es mag hier gleich erwähnt werden, dass der Schädelausguss auf früheren Stadien noch mehr dem Gehirn ähnlich sieht, namentlich ist die räumliche Übereinstimmung eine vollkommene auf dem Stadium von 18 cm (Fig. 8).

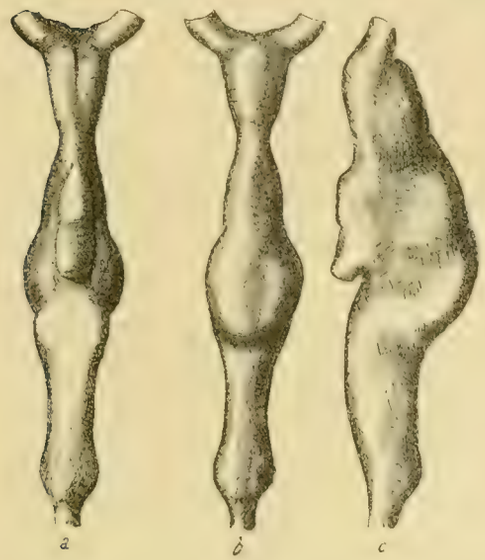


Fig. 7.

Scymnus lichia, Wachsausguss der Schädelhöhle eines Exemplars von zirka 70 cm in ventraler (*a*), dorsaler (*b*) und lateraler (*c*) Ansicht. Nat. Gr.

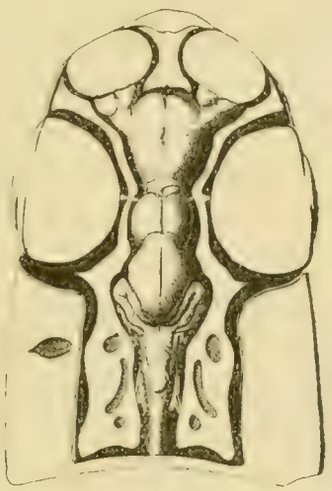


Fig. 8.

Scymnus lichia, Embryo 18 cm. Gehirn in situ von oben. 2 fach vergr.

Hier entspricht besonders auch die ganze knorpelige Umgebung des Vorderhirns diesem genau und die hier erreichte Konfiguration ist es auch, die da entstanden ist und von da an durchs ganze Leben beibehalten wird (Fig. 8). Sie entspricht also, abgesehen von den Dimensionen, dem am Ende des Embryonallebens erreichten Zustande oder: das Schädelinnere entspricht der embryonalen Hirnform und sein weiteres Wachstum vollzieht sich ausschliesslich durch gleichmässige allseitige Ausdehnung. Auch eine Messung der Längenproportionen an den ver-

schiedenen Teilen des embryonalen Schädelinnern und eine Vergleichung derselben mit den Massen des Erwachsenen erweisen dies.

Ferner wird uns diese Tatsache noch bei den Laemargi (II. Teil) beschäftigen.

b) Dura mater.

Die Schädelhöhle ist überall mit einer perlmutterglänzenden Dura mater ausgekleidet, die gleichzeitig als Perichondrium funktioniert. An gewissen Stellen erscheint sie etwas stärker entfaltet, so besonders an den Rändern der Unterhirngrube, am medioventralen Präcerebralkamm, in der Umgebung von Nervendurchtrittsöffnungen, an der Stelle, wo sie den Präcerebralraum gegen die Frontallücke hin begrenzt. Von hier setzt sie sich beiderseits fort, um einen ovalen Ring zu bilden, welcher die vom Bulbus nach der Riechschleimhaut durchtretenden Fila olfactoria an ihrer Basis umgreift. Die Öffnungen für die Nervendurchtritte sind aus unserer Taf. III Fig. 5 ersichtlich, ebenso die Austrittsstellen für die Venae cerebrales anterior und posterior. Dagegen muss noch auf die Innervation der Dura hingewiesen werden, da wahrscheinlich die Beobachtung solcher Duralnerven zu der Annahme neuer, vom Gehirn aus entspringender Nerven führen könnte. Ein feines Nervenzweigchen geht vom hintersten Occipitospinalnerven ab. Ein weiteres vom Glossopharyngeus. Facialis und Trigeminus innervieren die dorsal von ihnen sich erstreckende Seitenwand. Sogar vom Trochlearis scheinen einzelne Fasern sich der Dura zuzuwenden. Endlich tritt ein ziemlich starker Trigeminusast mit der Carotis zusammen ein, entsendet Zweige ventralwärts zur Unterhirngrube und versieht im übrigen den vorderen Teil der Schädelinnenwand.

c) Arachnoidea.

Die Arachnoidea besteht aus einem unregelmässig schwammigen, zarten, weitmaschigen Bindegewebe. In einzelnen Fällen fand ich sie den ganzen Zwischenraum zwischen Hirn und Schädel ausfüllend und es scheint, dass dies der normale Zustand bei genügender Frische der Exemplare sei. Meist aber finden sich nur einzelne Überreste des gesamten Maschenwerkes, etwa über der Decke des dritten Ventrikels oder im Präcerebralraum.

7. Gefässe des Hirns.

a) Arterien.

Von den Gefässen des Hirns (Taf. III Fig. 6 u. 7) sind die Arterien mit Teichmannscher Masse injiziert worden; von den Venen konnte ich keine Injektionspräparate anfertigen und bin daher auch nur über ihre Hauptäste unterrichtet. Die Cerebralarterien treten neben den Lobi inferiores in die Schädelhöhle ein und an das Gehirn heran. Eine jede teilt sich in zwei Hauptstämme, deren einer kaudal, deren anderer oral gerichtet ist. Den ersteren hat Hyrtl[1]) bei den Rochen als Arteria cerebri profunda bezeichnet; wir ziehen vor, ihn als Arteria cerebri posterior (Cer. post.) aufzuführen, wogegen für den oral gerichteten Ast die Bezeichnung Vorderhirnarterie, Arteria cerebri anterior (Cer. ant.) belassen werden kann. Wie Hyrtl angibt, anastomosieren die beiden Arteriae cerebri posteriores mit der Arteria spinalis impar (Sp. imp.) und zwar indem sie sich mit dieser unmittelbar hinter dem Unterhirn vereinigen (Com.)

Die Arteria spinalis impar behält nicht auf der ganzen Strecke ihres Verlaufes den unpaarigen Charakter bei. Innerhalb des Gebietes der Medulla oblongata, worauf die Vagus-Glossopharyngeuswurzeln entfallen, teilt sie sich auf eine kurze Strecke, in deren Mitte eine Anastomose der beiden Teiläste schräg verläuft (Ast. sp. i.). Im Gebiete der Abducenswurzeln gibt sie feine kaudal gerichtete Zweige ab, die unter dem Hauptarteriensystem verlaufend unter sich anastomosieren, sich stellenweise vereinigen und vereinigt auch mit dem einen Teilast der Hauptarterie anastomosieren. Von der Spinalis impar entspringen, vom Rückenmark her an Grösse zunehmend, zahlreiche zu den Seitenwandungen der Medulla oblongata verlaufende, geschlängelte und Schleifen bildende Äste (Sp. i. ram. o.) die nach Massgabe des Anschwellens der Medulla oblongata auch successive grösser werden.

Die Cerebralis posterior gibt ab:

---

[1]) J. Hyrtl, Das arterielle Gefässsystem der Rochen und die Kopfarterien der Haifische. Denkschr. Akad. Wissensch. Wien, math.-nat. Classe. Bd. XV. 1858 und Bd. XXXII. 1872.

1. Eine hintere Kleinhirnarterie, die sich in die Furche, welche Kleinhirn und Rautenohr trennt, verliert. Von ihr geht ein kleiner Zweig an die vordere Circumferenz der Rautenohren (Cerebellaris posterior, Cbp).

2. Eine vordere Hinterhirnarterie, die den grössten Teil der Hinterhirnwand versorgt und nur oralwärts Äste abgibt, während der Hauptast kaudalwärts umbiegt (Cerebellaris anterior, Cba).

3. Eine grössere Mittelhirnarterie, die unmittelbar vor dem Oculomotorius abgeht und den grössten Teil der Lobi optici versieht (Lobi optici, Lo).

4. Eine kleinere Mittelhirnarterie, die gegen die Commissura posterior hin gerichtet ist (Commissurae posterioris, Cps).

5. Am Ursprung der Cerebralis posterior ventral und kaudal gerichtet entspringt als zarter Zweig eine Arteria lobi inferioris (Li).

6. Ebenfalls mit ventraler Richtung entspringt zwischen dem Ursprung der beiden Mittelhirnarterien eine sehr feine Arteria sacci vasculosi (Sv).

Von der Carotis geht der zweitstärkste Ast, die grosse Vorderhirnarterie rostral ab (Hemisphaerica major, Hmj) mit seiner Hauptrichtung nach dem Bulbus olfactorius. Ein dorsaler kleiner Zweig strebt gegen das Velum (Vel), zwei ebensolche verbleiben hinter dem Tuberculum dorsale (Td). Der stärkste jedoch, die Hemisphaerica dorsalis (Hmd) verläuft dorsal vom Tractus olfactorius, um ungeteilt ventral median abzubiegen und sich mit dem Ramus olfactorius (Ramo) zu verbinden. Etwas vor dem Opticusaustritt zweigt von einer mit dem folgenden Ast gemeinsamen Hemisphaerica lateralis (Hl) ein ventraler Ast ab (Ramo) der das Tuberculum laterale versieht und ohne weitere Verzweigung der Riechschleimhaut zueilt. Ein dritter, ebenso stattlicher Ast senkt sich direkt in die ventrale Grube der Bulbi olfactorii ein (Bo).

Wo die grosse Vorderhirnarterie (Hmj) von der Cerebralarterie abgeht, entspringt ventral von ihr, gegenüber der Arteria lobi inferioris die kleine Vorderhirnarterie (Hmr). Sie verläuft parallel der grossen, der Ventralfläche des Vorderhirns entlang. Auf der linken Seite des von uns abgebildeten Falles bildet sie mit der Hemisphaerica lateralis und zwar

speziell der Arterie des Bulbus olfactorius eine Anastomose (Asth), auf der rechten dagegen nicht. Im Mediansulcus nähern sich die beiden kleinen Arterien, steigen hinauf und treten am Recessus neuroporicus zusammen, um sich definitiv in Kapillaren aufzulösen.

Die Arteria ophthalmica (O) zweigt von der grossen Vorderhirnarterie unmittelbar vor der Arteria veli ventral ab (Vel).

Sämtliche dorsalen Teile des Gehirns besitzen nur feinste Arterienverzweigungen und Kapillaren. Die Gehirnarterien verlaufen durchweg nicht gestreckt, sondern unter vielfachen Windungen und Schleifenbildungen. Ihr Umfang ist bei Injektion stärker als auf unseren Figuren der Übersichtlichkeit halber dargestellt worden ist. Noch in neuester Zeit hatte ich Gelegenheit, eine Arterieninjektion an Scymnus lichia vorzunehmen und die vorstehenden Angaben zu prüfen. Von Variationen habe ich hervorzuheben, dass die Cerebrales posteriores nur auf eine ganz kurze Strecke im Bereich des Acusticofacialis-Komplexes verschmolzen sind und erst wieder kaudal vom Occiput in eine A. spinalis zusammenfliessen. Ferner sind an der Cerebralis anterior, speziell der hemisphaerica Variationen im Abgang der langen Gefässe nachzuweisen, wenn auch nicht in deren Verlauf.

Es gelang mir, auch die Duralgefässe zu injizieren (Taf. III Fig. 5) und dabei fand sich erstens ein Ast der zugleich mit dem Duralzweig des Trigeminus austritt, zweitens ein Ast, der in ähnlicher Weise wie der Hauptast des Trigeminus verläuft, ein oral gerichteter entlang dem Unterhirn und drittens ein kaudal gerichteter, der durch die präcerebrale Wand eindringt.

b) Venen.

Ein Exemplar, bei dem die Venen injiziert waren, besitze ich nicht; doch liess sich an einem in Müllerscher Flüssigkeit konservierten Gehirn, bei dem die Venen durch Stauung gefüllt waren, manches feststellen. Die Venen der Medulla oblongata vereinigen sich vom Querschnitt des Glossopharyngeuseintrittes bis dorsal von der Hypophyse zu einem einzigen Längsgefäss. Von der Gabelungsstelle der Arteria cerebri posterior weichen die beiden verschmolzenen Stämme wieder auseinander um bald einen starken Stamm aufzunehmen, der vom Hinterhirn und der kaudalen Partien des

Mittelhirns kommt. Auch eine vordere Mittelhirnvene ist vorhanden. Vor ihr tritt ein ventral gegen die Hypophyse gerichteter Ast aus, ein weiterer steigt seitwärts von der Decke des dritten Ventrikels auf und nimmt einen venösen Stamm aus ihr auf. Die Vena dextra des dritten Ventrikels ist auch hier unpaarig ausgebildet und reicht bis zum Mittelhirn. Aus der Verbindung zwischen der Vena basilaris und der Vena cerebri anterior entspringt auch eine Vene, welche besonders rechts stark ausgebildet ist und zum anteromedianen Sulcus sich richtet. In sie münden beide Venen, welche in den Tubercula ventralia anteriora S-förmige Eindrücke hinterlassen. Eine eingehendere Beschreibung eines typischen Venensystems folgt bei Spinax niger (II. Teil).

IV. Zentral-Nervensystem, Anatomie.

1. Messungen.

Der Beschreibung des Gehirns schicke ich, um den Zusammenhang derDarstellung von diesen notwendigen aber schwerfällig wirkenden Apparat zu entlasten, eine Tabelle der wichtigsten Masse voraus. Ich habe in ihr alle diejenigen Messungen eingetragen, die mir am Ende meiner ersten Durcharbeitung des gesamten Stoffes und bei dem zweiten Gang der Untersuchung als kürzester Ausdruck der Proportionen und zugleich als Grundlage für die Vergleichung weiterer Formen erschienen. Ein Verfahren, das in anderen Gebieten der vergleichenden Anatomie, z. B. der Osteologie höherer Wirbeltiere so wertvoll ist, sollte auch in der Hirnanatomie ausgiebigere Verwertung finden. Der Fehlerquellen dürfen wir uns hierbei schon bewusst sein. Aber auch, wenn die Fehler da und dort unvermeidlich sind und auf vielen Nebenumständen, wie Grad der Konservierung, Verzerrungen u. s. w. beruhen, so ist doch andererseits aus Messungen ein Einblick in die grossen Massenbeziehungen und eine Unterlage für alle vergleichenden Urteile: lang, kurz, dick, dünn u. s. w. zu gewinnen, mit denen sonst allzu leichtfertig umgegangen wird, wo man sich selbst der Begründung des Urteils durch die Kontrolle der Messung entzieht.

Es versteht sich von selbst, dass die Messungen nicht nur nicht an allen Objekten durchgeführt werden konnten, da ich von vornherein nicht wissen konnte, welche Masse von entscheidendem Werte seien, sondern ebenso, dass auch eine Durchführung der Messungen für alle einzelnen Formen ein zweckloser Ballast wäre. Es kann sich also nur darum handeln, auf die vom erwachsenen Scymnus gegebenen Masse, die der Embryonalentwicklung und von der Reihe der Selachierhirne und der Fischhirne

überhaupt Masse, deren Vergleichung mit denen von Scymnus zur Begründung allgemeiner Schlussfolgerungen erforderlich sind, zu beziehen.

Die Messungen wurden gewonnen an einem Exemplar von 75 cm Länge, das in Müllerscher Flüssigkeit konserviert war, und zwar teilweise mit dem Zentimeterbande, teilweise mit einem Kaliber, dessen Nonius noch $^1/_{10}$ mm angibt. Für die Gehirnmessungen kam mir zu Gute, dass ich ein topographisch präpariertes Gehirn eines gleich grossen Exemplares in Formol und ein in Medianschnitte zerlegtes Gehirn eines grösseren Exemplars, das aber infolge der technischen Behandlung für mikroskopische Zwecke genau auf dieselben Dimensionen geschrumpft war, zur Vergleichung und Kontrolle des Normalgehirns verwenden konnte.

Die Volumenbestimmungen unternahm ich durch Verdrängung messbarer Mengen von Wasser und erhielt bei wiederholter Prüfung Bestimmungen, die nicht weit voneinander differierten und jedenfalls für den vorläufigen Zweck unserer Arbeit genügen dürften.

Scymnus lichia, Exemplar von 75 cm.

Übersicht der Proportionen des Kopfes.

I. Oberflächenmasse des Kopfes.

1.	Schnauzenspitze bis erste Kiemenspalte	14 cm
2.	„ „ Spritzloch	7,5 „
3.	„ „ Oberlippe (median gemessen)	5 „
4.	„ „ Mündung der Ductus endolymphatici	6,8 „
5.	„ „ Länge der quantitativ bestimmten Kopfmasse	11 „
6.	„ „ Mitte der Cornea	5,2 „
7.	„ „ medialer Nasenrand	1,7 „
8.	„ „ Zirbel	3,2 „
9.	Länge der Augenöffnung	2,9 „
10.	Breite des Kopfes am Occiput	9,0 „
11.	Höhe des Kopfes am Occiput	6,0 „
12.	Länge des Zirbelstiels	2,6 „

II. Tiefenmasse des Kopfes.

1.	Schnauzenspitze bis Occiput	8,8 cm
2.	Schnauzenspitze bis Verbindungslinie der Cornealmittelpunkte	4 „
3.	Schnauzenspitze bis vordere Schädelhöhlenwand	2,3 „
4.	Breite der Schädelhöhle am Austritt der Fila olfactoria	2,1 „

5.	Breite der Schädelhöhle am Opticusaustritt	0,7 cm
6.	„ „ „ „ Trigeminusaustritt	1,3 „
7.	„ „ „ „ Acusticusaustritt	0,9 „
8.	„ „ „ „ Foramen occipitale	0,6 „
9.	Vorderer Rand der Schädelhöhle bis Hypophysis	3,6 „
10.	Hypophysis bis Occiput	3,2 „
11.	Entfernung des Vena-cerebri-anterior-Austritts bis Vorderrand der Schädelhöhle	1,1 „
12.	Entfernung des Vena-cerebri-posterior-Austritts bis zum Occiput	0,5 „

III. Masse der Sinnesorgane.

1.	Maximale Länge der Nasenlöcher	1,2 cm
2.	„ „ „ Nasenbecher	2,0 „
3.	„ Höhe „ „	1,7 „
4.	Entfernung der Nasenbecher voneinander	0,28 „
5.	„ „ „ vom Auge	0,3 „
6.	Auge in der Längsachse gemessen	3,0 „
7.	„ „ „ Vertikalachse gemessen	2,5 „
8.	Cornealmittelpunkt bis Retinahintergrund	2,6 „
9.	Abstand der Cornealmittelpunkte beider Seiten	6,3 „
10.	„ „ hinteren Augenwand „ „	1,7 „
11.	„ „ „ „ vom Gehirn	0,4 „
12.	Labyrinth in der Längsachse gemessen	2,2 „
13.	„ „ „ Querachse „	0,7 „
14.	Abstand der Labyrinthe voneinander	0,8 „

IV. Volumina der Organmassen.

1.	Gesamte Kopfmasse bis zum Hinterrande des Spritzlochs (Occiput)	220 ccm	100 %
2.	Masse beider Augen	20 „	9 „
3.	„ „ Nasenbecher	5 „	2,5 „
4.	„ des Integuments	32 „	14,5 „
5.	„ „ Gehirns inkl. der Ventrikel	9 „	3,7 „
6.	„ „ Schädels	(schätzungsw.) 28	„
7.	„ der Muskulatur	„ 43	„
8.	„ des Visceralschädels und seiner Muskeln	140 „	63,7 „

V. Proportionen des Gehirns und seiner Teile.

1.	Breite des Rückenmarks am Occiput	0,30 cm
2.	Höhe „ „ „	0,24 „
3.	Dicke der Nervenwurzeln	
	a) Spinooccipitale Nerven	0,06 „
	b) Vagus	0,16 „
	c) Glossopharyngeus	0,13 „

	d) Acusticus	0,08 cm
	e) Facialis dorsalis	0,12 „
	f) Trigeminus II	0,08 „
	g) Trigeminus I	0,06 „
	h) Abducens	0,05 „
	i) Trochlearis	0,04 „
	k) Oculomotorius	0,07 „
	l) Opticus	0,14 „
4.	Calamus scriptorius bis Recessus neuroporicus	5,1 „
5.	„ „ „ Vorderrand der Decke des vierten Ventrikels, median gemessen	1,9 „
6.	Breite der Decke des vierten Ventrikels	1,2 „
7.	„ des Hinterhirns	0,95 „
8.	Länge „ „	1,3 „
9.	Höhe des Gehirns vom Hinterhirn zur Hypophysis	2,3 „
10.	Trochlearisursprung bis Commissura posterior	1,0 „
11.	Breite der Decke des dritten Ventrikels	0,8 „
12.	Länge „ „ „ „ „ vom Zirbelursprung bis zur Paraphysis	1,4 „
13.	Commissura superior bis Velum, median gemessen	0,7 „
14.	Lamina supraneuroporica	0,5 „
15.	Recessus neuroporicus bis Recessus praeopticus	1,5 „
16.	Recessus praeopticus bis postopticus	0,4 „
17.	Recessus postopticus bis Trichterspitze	0,9 „
18.	Recessus neuroporicus bis Trichterspitze	2,7 „
19.	Trichterspitze bis Haube	0,5 „
20.	Haube bis Sulcus interencephalicus	0,9 „

VI. Volumina der Hirnteile.

		Anderes, kleineres Exemplar.
1.	Medulla oblongata bis zum Sulcus interencephalicus	33 %
2.	Hinterhirn	13 „
3.	Mittelhirn	11 „
4.	Lobi inferiores und Trichter	17 „
5.	Vorderhirn inkl. Bulbi olfactorii	26 „

VII. Wanddicke verschiedener Hirnteile.

1.	Maximale Dicke des Bodens der Medulla oblongata (median gemessen)	0,33 cm
2.	„ „ der Lateralwand des Hinterhirns	0,15 „
3.	„ „ „ Lobi optici	0,12 „
4.	„ „ „ seitlichen Vorderhirnwand	0,16 „
5.	„ „ „ Lamina supraneuroporica	0,1 „
6.	„ „ „ Lamina infraneuroporica	0,18 „
7.	„ „ des Opticus (median gemessen)	0,22 „

2. Beschreibung der äusseren Topographie.

a) Rückenmark.

Das Rückenmark erleidet sofort bei seinem Eintritt in die Schädelhöhle eine allmähliche aber merkliche Verbreiterung, etwa 7 mm hinter dem Calamus scriptorius und schwillt hier etwas an, seitlich stärker als in dorsoventraler Richtung, ja dorsal gegen den Calamus hin eher wiederum etwas abschüssig verlaufend. Im Bereiche dieses hintersten Abschnittes des verlängerten Markes beginnen die seitlich verlaufenden Faserbündel sich ventral abzusenken, um sich allmählich der Mittellinie zu nähern. Ferner treten in ihm dorsolateral die feinsten hinteren Vaguswurzeln durch, während sich die zwischen ihren Eintrittsstellen liegenden Hinterstränge, je mehr wir uns dem Calamus nähern, sanft verbreitern. Auch im Innern ist dieser Abschnitt charakterisiert durch eine deutliche Erweiterung des Zentralkanals, bevor er am Calamus sich in den eigentlichen vierten Ventrikel öffnet. Diese Erweiterung des Zentralkanals ist der Recessus occipitalis. Etwas hiervon findet sich bei B. Haller angegeben. Eine zweite beträchtlich deutlichere Verbreiterung der gesamten Oblongata fällt genau mit der Spitze des Calamus scriptorius zusammen. Aber auch hier geht die Volumverbreiterung stärker in transversaler Richtung, als in dorsoventraler, wo sie sich nur dorsal und hier schwächer als transversal erkennen lässt (Fig. 9). Während der ventrale Kontur der Oblongata in ungestört schwachem Bogen gegen die Sattelspalte aufsteigt, und der dorsale, die Decke des vierten Ventrikels, in einem schwachen spitzen Winkel vom Calamus bis unter die hintere Kuppe des Hinterhirns ziemlich gerade verläuft, beschreibt der seitliche Kontur eine Linie, die durch den Durchtritt des Acusticofacialiskomplexes bedingt ist und in dessen Gebiet konvexe mit konkaven Wölbungen abwechseln.

b) Verlängertes Mark.

Werfen wir nun einen Blick auf die Decke des vierten Ventrikels oder die Rautendecke (Tegmen myelencephali). An ihr können wir vier Abschnitte unterscheiden: die Endblase (Vesica terminalis, *Vt*), das Mittelstück (Pars media, *Pmt*) und die beiden Ohrenklappen (Pars auricularis,

Pat); so zu benennen, weil sie die beiden von His als Rautenohren bezeichneten Divertikel des vierten Ventrikels bedecken. Die wichtigsten Organisationsverhältnisse der Rautendecke erhellen aus Fig. 9a, wo die

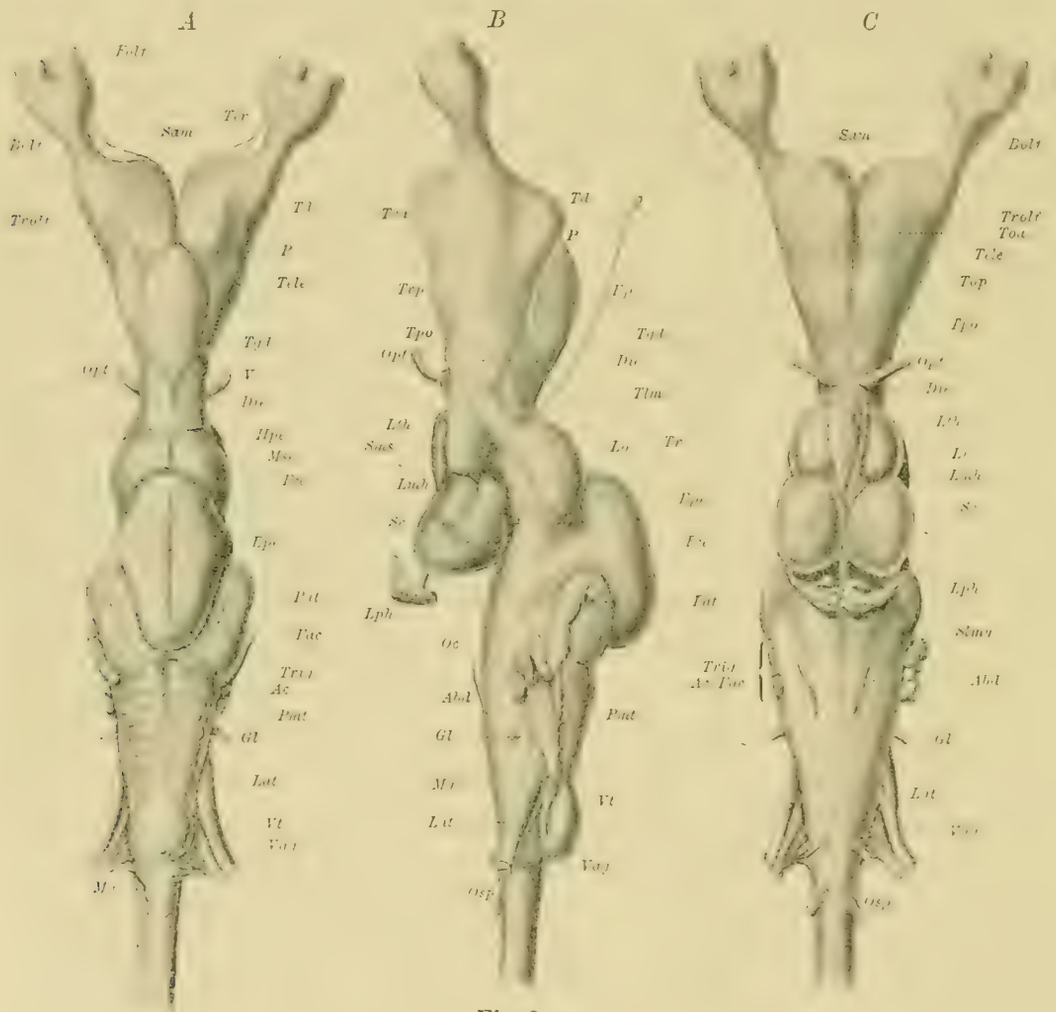


Fig. 9.

Scymnus lichia, Gehirn in dorsaler (*A*), lateraler (*B*) und ventraler (*C*) Ansicht. $1^1/_2$ fach vergr. (Erklärung der Abkürzungen nebenstehend.)

Decke durchschimmernd gedacht ist. Die Endblase ist ein äusserst zarter, busenartig kaudal herabhängender Epithelsack. Nahe dem Calamus besitzt er eine eigentümliche, warzenartige Spitze, der im Innern ein kleiner Divertikel entspricht. Das Mittelstück ist charakterisiert durch eine median

verlaufende Längsrinne, die genau median selbst in gerader Linie verläuft, von der aber schräg lateralwärts jederseits etwa 15 Seitenrinnen abgehen, zwischen denen und der Medianrinne der Ventrikel die Decke dorsalwärts in Kammern vertreibt. Schneidet man daher nicht absolut genau median, so erhält man regelmässig diese Kammern in Gestalt von Falten, die aber dem Medianschnitt selbst in Wirklichkeit nicht angehören. In diesen Rinnen

Erklärung der Abkürzungen zu Fig. 9.

Abd = N. abducens (VI),
Ac = N. acusticus (VIII),
Bolf = Bulbus olfactorius,
Dic = Diencephalon (Zwischenhirn),
Ep = Epiphysis (Zirbel),
Epe = Epencephalon (Hinterhirn),
Fac = N. facialis (VII).
Fce = Fovea culminis epencephali,
Folf = Fila olfactoria,
Gl = N. glossopharyngeus (IX),
H = Hypophysis,
Hpe = Hypencephalon (Unterhirn),
Lat = N. lateralis (vagi X),
Li = Lobus inferior hypencephali,
Lmh = Lobus medianus (anterior) hypophyseos,
Lo = Lobus opticus mesencephali,
Lph = Lobus posterior hypophyseos,
Lth = Lobus terminalis hypophyseos,
Msc = Mesencephalon (Mittelhirn),
My = Myelencephalon (Medulla oblongata, verlängertes Mark).
P = Paraphysis,
Pat = Pars auricularis tegminis myelencephali,
Pmt = Pars media tegminis myelencephali,
Oc = N. oculomotorius III,
Opt = N. opticus (II),
Osp = N. occipitospinales,
Sam = Sulcus anteromedianus,
Slmy = Sulcus longitudinalis myelencephali,
Slms = Sulcus lateralis mesencephali,
Sv = Saccus vasculosus,
Td = Tuberculum dorsale telencephali,
Tele = Telencephalon (Vorderhirn),
Tgd = Tegmendiencephali,
Tlm = Tuberculum laterale mesencephali,
Tlt = Tuberculum laterale telencephali,
Tpo = Tuberculum praeopticum,
Tr = N. trochlearis (IV),
Trig = N. trigeminus (V),
Trolf = Tractus olfactorius,
Tva = Tubercul. ventrale anterius telencephali,
Tvp = Tuberculum ventrale posterius telen-
V = Velum,
Vag = N. vagus X,
Vt = Vesica terminalis tegminis myelencephali.

Für die spezielle Nomenklatur der Decke des dritten Ventrikels ist auf Fig. 13 zu verweisen, für die der Oberflächenskulptur auf Fig. 16.

verlaufen grobe und zahlreiche Gefässe, die teils am oralen Ende der Medianrinne sich in einem oft pigmentierten Nabel vereinigen, teils seitlich in der Vena cerebri posterior münden. Vom Durchtritt des sensiblen Facialis ab sind die wiederum dünnwandigen und von feineren Gefässen durchzogenen Ohrenklappen zu unterscheiden, deren Mittelfurchen von beiden Seiten her mit der Medianfurche des Mittelstücks zusammentreffen, aber keine Kammern des Ventrikels beherbergen. Beide Ohrenklappen sind jedoch nur äusserlich voneinander getrennt, da das sie verbindende Stück unter der hinteren Kuppe des Hinterhirns versteckt liegt.

Das Endgebiet des Vagus beginnt hinter dem Calamus scriptorius und zwar sehr weit hinter ihm, zirka 1 cm, treten die feinsten und kaudalsten Wurzeln ein. Ebensowenig, wie bei anderen Haien, herrscht in Bezug auf Zahl und Anordnung der Fasern zu feineren oder gröberen Wurzeln Konstanz. Die genauere Untersuchung eines Scymnushirns ergab folgendes Verhalten der Vaguswurzeln auf der linken Seite (Fig. 10). Die letzte Vagusfaser tritt etwa so weit kaudalwärts von einer Linie aus, welche die

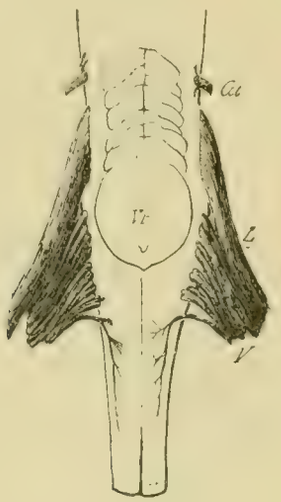


Fig. 10.

Scymnus lichia, Ursprung des Vagus und Glossopharyngeus, in dorsaler Ansicht. 3fach vergr.

Gl = Glossopharyngeus,
V = Vagus,
L = Lateralis,
Vt = Vesica terminalis der Rautendecke.

3fach vergr.

Stellen verbindet, wo der Vagus in die Schädelhöhle eintritt, als die vorderste Wurzel vor ihr liegt. Auch hier macht sich eine fortwährende Steigerung der Ansammlung von Büscheln zu Wurzeln in kaudal-rostraler Richtung geltend, nur verteilt sie sich auf ein länger ausgestrecktes Verbreiterungsgebiet und ist daher auch weniger merklich von einer Wurzel zur anderen, als bei Haien mit gedrängter Oblongata. Der hinterste Vagusstamm entsendet also zunächst eine feine Faser, vor ihr in gleicher Weise eine zweite

und eine dritte, dann folgt eine zweifasrige Wurzel, auf sie eine vierfasrige und endlich eine dreifasrige. Rechts entspringt derselbe Vagusast mit drei einfasrigen, zwei zweifasrigen und einer mehr- (5—6)fasrigen Wurzel, um sich zu einem, dem hintersten Aste zu vereinigen. Der zweite Ast besitzt links drei, rechts zwei getrennte Wurzeln und mindestens zwei stärkere, einander näher liegende. Rechts hinwiederum folgen auf den zweiwurzligen Ast kleine, einander eng anliegende Äste und ein grösserer Komplex, von dem sich oral wieder eine Portion abtrennt. Ebenso wie hier die antimeren Wurzeln variieren, so variieren sie auch von Individuum zu Individuum.

Um hier gerade noch die Occipitospinalnerven (*Osp*) zu erledigen, sei erwähnt, dass ich dieselbe Anzahl von Nerven antreffe, welche Fürbringer angibt, nämlich zwei, wovon der vordere, ziemlich im Querschnitt des Calamus scriptorius austritt und zwar beiderseits mit vier Wurzeln, während der hintere auf der rechten Seite mit fünf, auf der linken aber mit vier Wurzeln die Medulla oblongata verlässt und in ihrer Gesamtheit stärker ausgebildet ist als der vordere.

Fig. 11.

Scymnus lichia, Komplex der Wurzeln des Acusticofacialis und des Trigeminus. 5fach vergr.

Vm = motorischer Trigeminus,
Vs = sensibler Trigeminus,
VI = Abducens,
VIIm = motorischer Facialis,
VIIs = sensibler Facialis,
VIII = Acusticus.

Der Glossopharyngeus (*Gl IX*) tritt als dünner Ast mit mehreren Wurzeln rostral vom Vagus aus. Auch seine Faserbüschel sind unregelmässig. Meist jedoch ist eine grössere Wurzel vorhanden, die den Grundstock bildet und zwei kleinere. In dem von uns beschriebenen Falle lagen beide kleinere Wurzeln vor der Hauptwurzel auf der linken Seite, eine vor und eine hinter ihr auf der rechten Seite. Auch beobachtete ich einen Fall, wo der Glossopharyngeus direkt nach dem Durchtritt durch die Limitans externa ein Faserbüschel an den Vagus (nicht Lateralis) abgab.

Um den Acusticofacialis-trigeminus-komplex (Fig. 11) richtig zu studieren, habe ich mich nicht auf Schnitte beschränkt, sondern die Nervenwurzeln, von ihrem Durchtritt bis zum Austritt präpariert. Hierbei ist zu sehen, dass über den beiden grossen Acusticuswurzeln (*Ac VIII*),

zwei kleinere, wohl zum Teil motorische des Facialis (*VII m*) unmittelbar anschliessen. Erst hoch über ihnen tritt der sensible Facialis aus (*VII s*), um ventral herabsteigend seine Faserbündel teils mit denen des ventralen Facialis verschlungen peripheriewärts zu entsenden, teils direkt gegen den Acusticusursprung in zentripetaler Richtung, teils in einem gesonderten Nervenstamm, der gleichzeitig mit denen des Trigeminus die Schädelhöhle verlässt. Am Trigeminus selbst hebt sich ab ein dorsaler (*Vs*) und ein ventraler (*Vm*) Ast. Der erstere empfängt aber auch noch Wurzeln, welche, wie die Finger einer Hand eine Papierrolle, so den ventralen Ast des Trigeminus umgreifen. Unmittelbar hinter dem Trigeminus (*X*) verläuft der Abducens (*Abd VI*). Man ersieht hieraus, dass die Verteilung der Nervenwurzeln im wesentlichen dieselbe ist, wie sie Ewart für Laemargus borealis beschrieben hat.

Am gleichmässigsten verläuft die Ventralfläche der Medulla oblongata, median kaum gefurcht, durch den wenig tiefen Sulcus longitudinalis (*Slm*). Der Abducens tritt mit jederseits fünf Wurzeln am Ende einer Längsfurche aus, welche die Fasciculi longitudinales lateral begrenzt.

Am kompliziertesten gestalten sich die Lateralwandungen. Ihre Konfiguration wird durch mehrere Längswülste bedingt, deren Verlauf wir zunächst rein topographisch zu schildern haben. Wir beginnen mit dem kompliziertesten Längswulst, der sogenannten Rautenlippe (*Rl*), also der lateral an die Decke des vierten Ventrikels anschliessenden Partie der Seitenwand (Fig. 11). Der Calamus scriptorius wird median durch eine Querkommissur begrenzt, die lateral rasch in den übrigen Massen der Wand untertaucht und etwa 0,2 mm Querschnitt misst. Kaudal von diesem Querwulst befindet sich eine etwas vertiefte Dreieckfläche, Trigonum calami (*Trig. cal.*), die durch das Auseinanderweichen der sie lateral begrenzenden Faserbündel bedingt zu sein scheint. Vor und unter dem Querwulst seitlich ausbiegend und sich rasch verbreiternd, umgreifen zwei Wülste (*a*) den hintersten von der Endblase überdeckten Teil der Rautengrube; diese Wülste tauchen jedoch, sobald sie ihre grösste Distanz voneinander erreicht haben (Fig. 12), unter, und zwar unter einem neu an der grössten Breite der Endblase entspringenden zweiten Wulstpaar (*b*), das bis zum hintersten Drittel der Rautengrube nur schwach entwickelt ist, von hier aber keilförmig anschwellend und das zweite

Drittel der Rautengrube begrenzend bis zum Austritt des sensiblen Facialis ansteigt. Das erste untertauchende Wulstpaar bildet alsdann die bekannten fünf als Lobi vagales (*L. vag.*) bezeichneten Anschwellungen, deren vorderste jedoch oralwärts nicht deutlich abgesondert ist, sondern als Wulst weiter verläuft. Von der Stelle aus, wo das zweite Wulstpaar entsprang, nimmt noch ein drittes, mächtigeres, aber durch seichtere Furchen abgegrenztes Paar seinen Ursprung (*c*) und verliert sich zwischen den Durchtrittsstellen

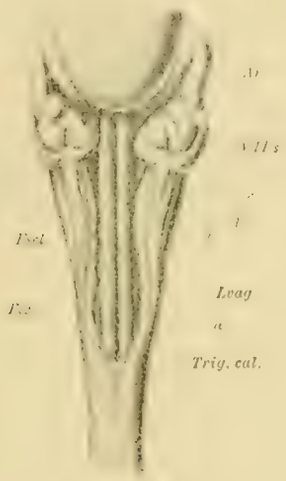


Fig. 12.

Rautengrube nach Entfernung der Rautendecke in dorsaler Ansicht. 2fach vergr.

a—d = die vier Wulstpaare,
Ar = Auriculi rhombencephali, Rautenohren,
Flv = Fossa lateroventralis,
Fscl = Fasciculus longitudinalis,
Lvag = Lobi vagales,
VIIs = sensibler Facialis,
Trig. cal. = Trigonum calami.

des sensiblen Facialis und der übrigen Durchtrittsstellen des Facialis-trigeminus-komplexes. Zu diesen Längswülsten kommt nun hinzu, dass, wo das zweite Wulstpaar dem sensiblen Facialis nahe tritt, auf seiner dorsalen Wölbung ein neuer, sich ebenfalls keilförmig verbreiternder Längswulst (*d*) einsetzt und nun über der Durchtrittsstelle des sensiblen Facialis leicht eingeschnürt, in die als Rautenohren (*Ar*) bezeichneten Wülste überzugehen. Dorsal betrachtet, gestaltet sich der Verlauf der Rautenohren wie

Fig. 11 zeigt, wie sich aber nicht kurz beschreiben lässt. Die stärkste Krümmung erfährt der Wulst unmittelbar vor dem Facialis, eine leichtere noch an der Seitenwand der Rautenohren; diesen Windungen passt sich der mediale Schenkel des Rautenohres unmittelbar an. Aber die Rautenohren erzeugen auch an der Lateralwand der Oblongata eine erkerartig vorragende Ausladung, die sich vor dem Trigeminusaustritt in der übrigen Lateralwand verliert.

Bei Entfernung der Rautendecke kommen auf die ganze Länge der Rautengrube hin ausser den erwähnten Wulstpaaren noch andere Bildungen zum Vorschein, nämlich der Fasciculus longitudinalis (*Fscl*) beiderseits von der Mittellinie, und zwischen ihm eine, ihn vom oben erwähnten zweiten Wulstpaar trennende Längsgrube, die Fossa lateroventralis (*Flv*). Für eine nähere Beschreibung dieser Wülste verweisen wir auf das Kapitel über Oberflächenskulptur.

c) Hinterhirn.

Das Hinterhirn (*Epe*) präsentiert sich an ganz frischen Exemplaren als einen im ganzen ovoiden Körper. Dorsal betrachtet, entspricht sein Horizontalkontur einem an den Ecken abgestumpftem Deltoid mit zwei kürzeren oralen Seiten, die sich zu den kaudalen längeren etwa verhalten wie 2 : 3. Lateral setzen sich die runden Ecken des Deltoids in die Seitenwandungen fort, während oral und kaudal je eine Kuppe die unter ihr gelegenen Hirnteile überragt. An Gehirnen aus Müllerscher Flüssigkeit ist der ganzen Medianlinie nach ein schmales, heller gefärbtes Band zu erkennen, die Dorsomedianzone. Zu beiden Seiten der Medianfurche erzeugen die Dorsolateralzonen Vorwölbungen, namentlich im mittleren Teil des Hinterhirns. Mit diesen flachen Wülsten verbinden sich diejenigen, welche von den lateralen Ecken aufsteigen. Nicht an ganz frischen Gehirnen, wohl aber an solchen, die in Alkohol oder Formol konserviert sind, macht sich noch eine weitere Teilung bemerkbar. Sie besteht in einer Einsenkung, die sich etwas hinter der Mitte quer über die dorsale Wölbung hinzieht; von einer Furche zu reden, wäre zu viel gesagt. Diese Grube (Fovea culminis epencephali, *Fce*), die besonders im Medianschnitt stets deutlich zu sehen ist, ist für die Beurteilung des Hinterhirns von allergrösster

Wichtigkeit. Hier will ich darauf verweisen, dass sie für die vergleichende Betrachtung des Selachierhirns, aber auch schon im embryonalen Hirn von Scymnus eine bedeutungsvolle Grenzmarke abgiebt.

Noch verdient Beachtung, dass der Nervus lateralis nicht nur mit einer starken, sondern mit zwei kleineren rostral gelegenen Wurzeln durchtritt. Dass auch der Komplex des Acusticofacialis-trigeminus eine wesentliche Rolle bei der Topographie der Seitenwand spielt, mag hier nur angedeutet und später ausführlicher erwogen werden.

d) Mittelhirn.

Das Mittelhirn (*Mse*) erscheint lateral betrachtet von einem beinahe kreisförmigen, doch elliptischen Kontur begrenzt. Ohne weitere Präparation bleibt die Dorsalfurche nur schwach, aber immerhin noch so, dass sie die beiden Lobi optici als getrennte Bildungen hervortreten lässt. Etwa dem Durchmesser des oben erwähnten elliptischen Konturs entspricht eine Furche, die laterale Grenzfurche des Mittelhirns (*Slms*), die schräg vom Austritt des Trochlearis ventralwärts verläuft, alsdann eine leichte Knickung erfährt und auf ihrem weiteren Verlauf ein etwas tiefer gelegenes, breites, helles Band des Mittelhirns gegen den Lobus inferior hin scheidet. Unterhalb der vorderen Hälfte dieser Furche macht sich eine schwache laterale Vorwölbung bemerkbar, die nur durch eine sehr seichte Grube kaudal begrenzt wird (Tuberculum laterale mesencephali, *Tlm*). Der Opticus (*Opt*) zeigt eine rein makroskopisch schon erkennbare Eigentümlichkeit; er besteht nämlich aus einem innerhalb eines runden Querschnittes doppelt zusammengelegten Bande. Der Durchtritt beider Optici durch die Membrana limitans externa ist von einem zirka 1 mm breiten Damm geschieden.

e) Zwischenhirn.

Die Decke des dritten Ventrikels (Tegmen diencephali, Fig. 13 u. 14) wird gebildet von einer dünnen, aus Epitheliosa bestehenden Membran, die mit Gefässen, namentlich venösen Wundernetzen reichlich übersponnen wird. In seiner Gesamtheit hat dieses Gebilde etwa die Gestalt einer Zunge, deren Basis kaudal abgestutzt ist, an der Commissura posterior endet und deren Spitze

sich bis zur Paraphysenfalte erstreckt. In Wirklichkeit reicht sie aber bis zum Recessus neuroporicus. Die Fläche, welche wir in dorsaler Ansicht bei guter Konservierung gewahren, ist keine einfache, sie bildet rostral eine ovoide, etwas zugespitzte Kuppe, den prävelaren Abschnitt, kaudal geht sie über in eine Sattelfläche, den postvelaren Abschnitt. Beide so zu unterscheidenden Teile sind voneinander etwas abgesetzt durch das Dazwischentreten paariger Kontraktionsstellen, welche wie Narben den ruhigen Über-

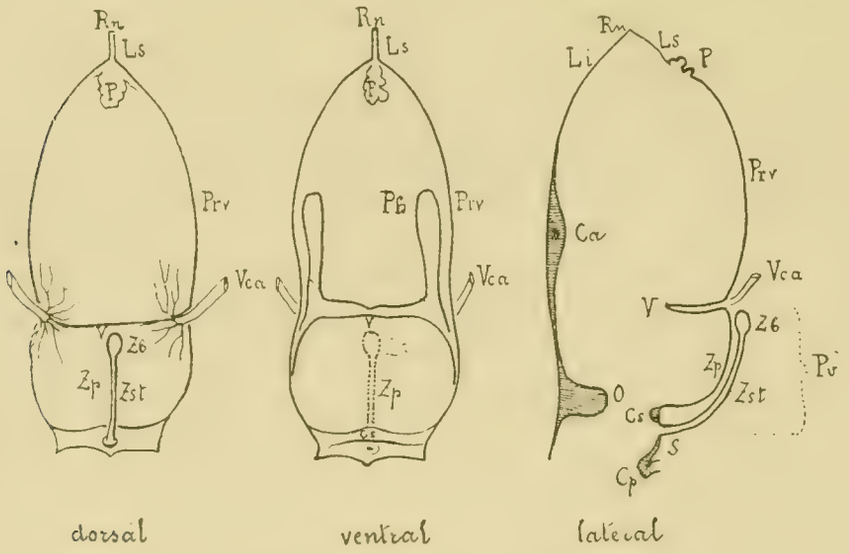


Fig. 13.

Schematische Übersicht der Decke des dritten Ventrikels und ihrer Teile.

Ca = Commissura anterior,	*P* = Paraphyse (?),	*V* = Velum transversum,
Cp = Commissura posterior,	*Ph* = Plexus hemisphaerium,	*Vca* = Vena cerebri anterior,
Cs = Commissura superior,	*Prv* = prävelarer Abschnitt,	*Zb* = Zirbelbläschen,
Li = Lamina infraneuroporica,	*Pv* = postvelarer Abschnitt,	*Zp* = Zirbelpolster,
Ls = Laminasupraneuroporica,	*Rn* = Recessus neuroporicus,	*Zst* = Zirbelstiel.
O = Opticus,	*S* = Schaltstück,	

gang zu stören scheinen und welche auch an dem sonst gleichmässig verlaufenden Rande, durch den die Decke des dritten Ventrikels mit den seitlichen Hirnpartien in Verbindung steht, eine leichte Einkerbung hervorrufen. Diese Kontraktionsstellen sind es auch, an denen sich die Venen sammeln, um von der Decke des Ventrikels weg und in die Vena cerebri anterior überzutreten. Die also entstehende Querfalte wird als Velum transversum bezeichnet, vor ihr reichen paarig und halskrausenartig

gewunden bis zur Mitte des prävelaren Abschnittes die Plexus hemisphaerium. Die dorsale Ansicht dieser Hirnpartie ist aber nicht im stande, uns ein Bild von ihrer wirklichen Beschaffenheit zu geben. Hierzu ist vielmehr nötig, dass wir sie aus ihrem Verbande lösen, umdrehen und von der ventralen Seite betrachten (Fig. 14). In dieser Lage stellt sie bei dreifacher Vergrösserung unsere Figur dar. Auf den ersten Blick nimmt man eine gewaltige bogenförmige Falte wahr, welche an ihrer Seite nur schwache

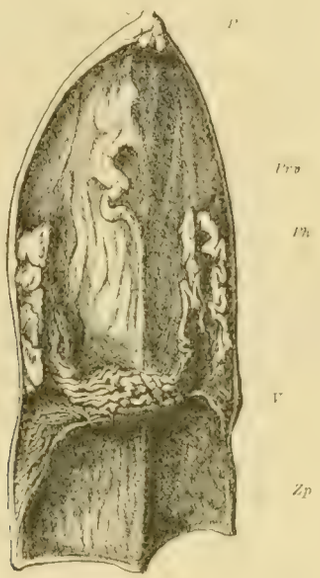


Fig. 14.

Scymnus lichia, Decke des dritten Ventrikels in ventraler Ansicht.
Die linke (in der Figur rechte) Hälfte ist etwas rückwärts gebogen (wodurch die Falten in der Mitte des prävelaren und postvelaren Abschnittes entstehen), um das Faltensystem der Plexus hemisphaerium zu zeigen. Vom postvelaren Abschnitt ist nur das Zirbelpolster dargestellt. 3fach vergr.
Bezeichnungen siehe Fig. 13.

Wülste aufweist und sich sofort als eine ventral gerichtete Falte der Decke des dritten Ventrikels herausstellt, die etwas kaudalwärts geneigt ist, das Velum (*V*). Zu beiden Seiten ist der Ursprung des vorderen Teiles der Falte verkleidet durch unregelmässig gewundene, lappenartige Krausen der seitlichen Wandungen der Decke, welche rostral etwas abrupt auftreten, während sie kaudal in sanftere, in der Längsrichtung auslaufende Falten übergehen. Durch eine etwas tiefere Furche scheinen die vorderen Lappen

sich von den hinteren, mehr in Verbindung mit der queren Bogenfalte stehenden Faltenmassen zu trennen (*Ph*). Endlich umsäumt ein im Doppelbogen geschweifter Rand das kaudale Ende des gesamten Gebildes und von diesem nimmt mit einer querovalen Öffnung der Zirbelstiel seinen Ursprung. In dem also beschriebenen Rahmen spannen sich die glatten Membranen der Decke des dritten Ventrikels aus und zwar rostral der ovoid gewölbte, mit reichlich anastomosierenden und weiten unregelmässig verlaufenden Venen übersponnene prävelare Abschnitt, kaudal aber der sattelförmige postvelare Teil, dessen Venen eng, ein kapillares Wundernetz bildend, vorzugsweise in lateral konkaven Bogen verlaufen. Die Zirbel, deren Ursprung oben angedeutet wurde, besteht aus einem 2,6 cm langem Stiele (*Zst*), der gerade verläuft, hohl ist und mit einem in der Schädeldecke in einer besonderen Knorpellücke eingelassenen Bläschen (*Zb*) endigt. Dem Abschnitte des postvelaren Teiles, welcher zwischen Velum und Commissura superior liegt, belassen wir die Bezeichnung Zirbelpolster (*Zp*).

Für die Epiphyse ist auf die zusammenfassende Arbeit von Studnicka[1]) zu verweisen. Er notiert als erste Erwähnung der Selachierepiphyse die von Jackson und Clarke (1875) für Echinorhinus und gibt als einzigen, der auch der zellulären Struktur Rechnung getragen habe, Galeotti (1897) an. Studnicka selbst unterwarf eine ganze Reihe von Gattungen (zehn) spezieller Untersuchung. Nach ihm „stellt sich uns das Pinealorgan der Selachier (Holocephali und Elasmobranchier) immer nur als ein einfach schlauchförmiges, überall von annähernd gleich dicken Wänden umgrenztes und mit einer terminalen Erweiterung, einer „Endblase“ endigendes Hohlgebilde dar“. Die Endblase ist in Bezug auf Struktur vom Stiel nicht unterschieden, sie kann kugelförmig oder abgeflacht sein. Von der Commissura posterior her sollen Nervenfassern in Gestalt eines Tractus pinealis dem Stiel der Zirbel zu ziehen. Nach ihm ist die Mehrzahl der Zellen als Ependymzellen zu deuten, ausserdem kommen plasmareiche Ganglienzellen vor. In Bezug auf den Tractus pinealis möchte ich einstweilen Zweifel äussern. Da Studnicka ihn nicht abbildet, aber angibt, er teile sich bald in mehrere Stränge, halte ich ihn einstweilen für einen Gefässnerven, der

[1]) K. Studnicka, Die Parietalorgane. Handbuch der vergl. Histologie von K. Oppel. 1906.

die reichlichen, die Epiphyse begleitenden Gefässe versehen dürfte. Unsere Fig. 16 stellt einen Querschnitt durch den Zirbelstiel dar. Im ganzen scheint von dem von Studnicka geschilderten Verhalten insofern bei Scymnus wenigstens eine Abweichung zu bestehen, als hier eine grössere Zahl von Zellen als Ganglienzellen zu deuten sein dürfte. Für uns kommt besonders in Betracht, dass die Struktur des Stützgewebes eine brachypilöse ist. Die Einzelheiten des Überganges vom Zirbelstiel zu den angrenzenden Hirnpartien sind aus Fig. 15 zu entnehmen. Ich möchte nur noch hervorheben, dass unmittelbar vor der Commissura superior das Zirbelpolster aus Pflasterepithel besteht. Am Zirbelstiel selbst (Fig. 16) sowie übrigens auch am Zirbelbläschen ist peripher markiges Gewebe, ventrikulär nidös angeordnete

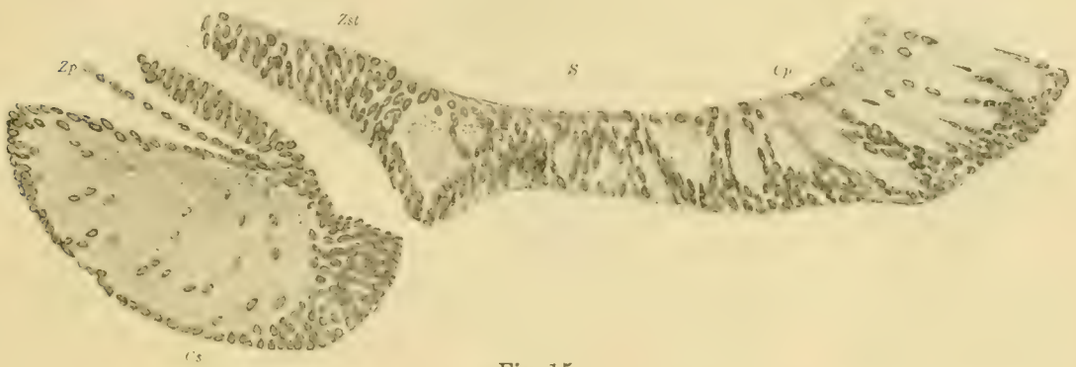


Fig. 15.

Spinax niger, Ursprung der Zirbel, Medianschnitt. 60fach vergr. Bezeichnungen wie in Fig. 13.

Brachypilosa und kleine Ganglienzellen untermischt mit einigen grosskernigen Ganglienzellen.

f) Unterhirn.

Eine eigenartige Ausbildung erfährt, wie auch bei anderen Selachiern, die gesamte Region, der wir in Anschluss an Miclucho-Maclay den Namen Unterhirn (*Hpe*), der leider nicht durch andere Autoren von ihm übernommen worden ist, wieder beilegen. Sie umfasst die Lobi inferiores, den Trichter und die Bildungen der Hypophysen. Dass, wie von gewissen Autoren angegeben wurde, die Lobi inferiores bei Scymnus fehlen sollen, ist eine durchaus grundlose Annahme, die höchstens aus mangelhafter Konservierung des beobachteten Materials zu erklären ist. Dagegen sind aller-

dings die Lobi inferiores sehr klein, höchstens dem Viertel des Volumens eines Lobus opticus entsprechend. Kaudal sind sie etwas abgeplattet, dorsal von einer seicht auslaufenden Furche, nach den übrigen Richtungen kaum abgegrenzt. Von ähnlicher Grösse und äusserer Form, aber sehr dünnwandig, erscheinen hinter ihnen die Sacci vasculosi (Fig. 17).

Zur besseren Orientierung über die Topographie des Unterhirns dient ein Horizontalschnitt (Fig. 17), der so angelegt ist, dass er die Lobi inferiores halbiert, dann schräg aufsteigend nach der oberen Spitze des Saccus vasculosus verläuft. Alsdann gewahrt man den Ventrikel des Unterhirns rostral eng und mit verdickter, kaudal weit und mit dünnwandiger Substanz umgeben. An jenem Abschnitt ist deutlich zu unterscheiden die eigentliche Wand des Lobus inferior (*Li*), kaudal davon und mit ihr durch Faserbahnen, die eine rostähnliche Skulptur erzeugen, verbunden, die Haubenregion (*Hr*), die wieder allmählich sich zu einem Gebilde verbreitert, das einem halbierten Saugnapf ähnlich sieht, mit transversal verlaufendem Rande und einer Reihe von etwa zwölf Einkerbungen, die durch zwischen ihnen vorspringende Faserbahnen getrennt sind, der Torus interpeduncularis (*Tip*). Der kaudale Abschnitt zerlegt sich durch paarige stark gegen den Ventrikel vorspringende Längsfalten, die vom Rande der Haubenregion gegen die Spitze des Saccus vasculosus verlaufen in drei Gruben, deren mittlere (*Fm*) besonders reichlich mit Venen vaskularisiert erscheint. Die Vaskularisation erstreckt sich auch auf die seitlichen (*Fl*), tritt aber hier, da die Substanz etwas solider ist, nicht so deutlich hervor. Die seitlichen Gruben hat man sich ventral tief hinabgreifend zu denken. Die ventrale Begrenzung des Ventrikels ist flach und legt sich im Gebiet des Saccus vasculosus der dorsalen nahe an. Auf ihrer Mitte bezeichnet eine kleine Öffnung die Stelle, von welcher aus der infundibulare Teil der Hypophyse eingestülpt wurde. Die Hypophysengegend von Scymnus — das muss hier schon späterer Begründung vorgreifend gesagt werden — kann nicht als für die Selachier typisch betrachtet werden. Sie ist durch Massenzuwachs und Komplikation verändert, wenn auch die diesen Veränderungen zu Grunde liegenden Prozesse relativ einfacher Art sind. Bei

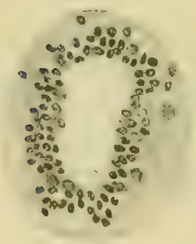


Fig. 16.
Scymnus lichia, Querschnitt des Zirbelstiels. 60fach vergr.

Laemargus rostratus werden wir im definitiven Zustande einen Bau dieser Gegend kennen lernen, der dem von U. Rossi[1]) für Embryonen von Selachiern geschilderten weit mehr entspricht und der eher typisch zu nennen ist, als der von Scymnus. Bei seitlicher Ansicht des Scymnusgehirns (Fig. 9) gewahren wir unmittelbar hinter den Lobi inferiores den dünnwandigen Saccus vasculosus, der je nach dem Turgor der Gehirnventrikel

Fig. 17.

Scymnus lichia, Unterhirn, rechte Hälfte in ventraler Ansicht nach Abtragung des Bodens durch einen Horizontalschnitt. 3fach vergr.

Fm = Fossa medialis,
Fl = Fossa lateralis sacci vasculosi,
Hr = Haubenregion,
Li = Lobus inferior,
Tip = Torus interpeduncularis.

und folglich auch nach dem Konservierungsgrade sich lateralwärts stärker vorwölbt als die Lobi inferiores selber und bei voller Prallheit auch eine einheitlich gewölbte Blase bildet, die in ihrer Gesamtheit etwa dem Volumen des Mittelhirns entspricht und den Wänden der Schädelhöhle anliegt. Selten gelangen jedoch Gehirne in diesem vollkommenen Zustand zur Beobachtung. An konservierten trennt sich meist die gesamte Blase durch Kollaps in

[1]) Sopra i lobi laterali della Ipofisi, Arch. di Anat. e. di Embr. Vol. I. 1902.

zwei ungleiche Teile, einen kleinen häutigen birnkernartig nach hinten zugespitzten und einen grösseren, bei welchem der drüsige Bau auch oberflächlich hervortritt und welcher die Spitze des ersteren umlagert. An der oben erwähnten Blase sind indes zwei auch oberflächlich deutlich unterschiedene Teile vorhanden: ein durchsichtiger rein epithelialer und ein gegen die Spitze hin gelegener opaker von drüsigem Bau, der auf der Mitte seiner Oberfläche eine leichte Einkerbung der Drüsenmasse erkennen lässt. Eine mediane Grube trennt besonders scharf an der Trichterspitze und bei kollabiertem Zustand die Gebilde beider Seiten, die jedoch über der Trichterspitze durch eine transversal verlaufende Wand schon äusserlich nicht mehr geschieden sind. Bei ventraler Ansicht aber sind die beiden Drüsenteile des Trichters nicht nur durch eine Einsenkung an der Trichterspitze getrennt, sondern auch durch die reich entwickelte Hypophysendrüse, welche sich von der Rathkeschen Tasche ableitet. Diese Hypophysendrüse zerfällt in folgende Abschnitte: 1. den Lobus terminalis (*Lth*), einen birnkernartigen Körper, der sich ventral den Lobi inferiores anlegt und schon oberflächlich die für Drüsen charakteristischen Kerben zeigt; 2. den Lobus medianus (*Lmh*) mit vorigem durch einen schmalen Hals an der hinteren Circumferenz der Lobi inferiores verbunden, einen kleineren herzförmigen Körper mit ebenfalls drüsenartiger Oberfläche und ventral median in eine Rinne konvergierenden Furchen. Kaudalwärts spitzt sich dieser Teil in einen feinen, ventral von der Infundibulardrüse verlaufenden Gang aus, der ventral-kaudalwärts verläuft und in das Bindegewebe der Sella turcica eindringt, wo er bei der Präparation pflegt abgeschnitten zu werden. Verfolgen wir ihn aber dort hinein, so erweitert er sich zu einem paarigen quergestellten mondförmigen Körper, dem dritten Teil der Hypophysendrüse, dem Lobus posterior (*Lph*), wie ihn Sterzi für Mustelus beschrieben hat. Dieser Teil besteht aus paarigen Divertikeln, ebenfalls von drüsiger Struktur, die sich schon oberflächlich erkennen lässt.

Der Lobus anterior nun, der äusserlich am wenigsten hervortritt, ist es, der mit dem drüsigen Teil des Trichters zusammen jenes dicht sich verfilzende Drüsengebilde erzeugt, das gemeinhin als Hypophyse bezeichnet wird.

Am ausgebildeten Gehirn bestehen in Bezug auf Grösse des gesamten Hypophysenkörpers erhebliche Unterschiede. Das Exemplar, dem unsere

Figuren entstammen, besass einen relativ kleinen ausschliesslich drüsigen Teil, wogegen andere Exemplare, meist auch grössere ihn in ausgebildeterer Weise besitzen. Ich kann jedoch nicht entscheiden, ob diese stärkere Ausbildung mit dem Wachstum in späterem Alter des Tieres Schritt hält, oder ob sie, wie indess weniger wahrscheinlich ist, zeitweise periodisch auftritt. Man vergleiche hierzu noch die Figuren im histologischen Abschnitt.

Von den oben erwähnten Verdickungen der lateralen Mittelhirnwand, sowie von derjenigen ventralen Wand, die von den Optici durchbrochen, ohne andere Abgrenzung ventral die Fortsetzung der Lobi inferiores bilden, setzt sich das Vorderhirn in keinerlei scharf begrenzter Weise ab. Am allerwenigsten auch rechtfertigt es sich, hier gar noch ein Zwischenhirn abgrenzen zu wollen und wenn wir, der Konvention zu liebe, noch diese und ähnliche Bezeichnungen brauchen, so geschieht es mit der Reserve der Einsicht in ihre gänzliche Haltlosigkeit und ausdrücklich nur unter der Zubilligung, dass sie Regionalbezeichnungen für ganz heterogene, nur der naivsten Anschauungsweise dienende Hirnabschnitte sind. Die Unterscheidung so und so vieler weiterer „Hirne", die besonders v. Kupffer kultiviert hat, erscheint uns als höchst unzweckmässig, z. B. wenn er aus dem von mir als Schaltstück bezeichneten Abschnitt des Amphibienhirns, der ausschliesslich der Dorsomedianzone angehört, ein „Schalthirn" gemacht hat. Solche Aufstellungen werden mit dem höchst fatalen Erfolg erkauft, dass sich die Vorstellung festsetzt, als handle es sich bei diesen verschiedenen „Hirnen" um Teile von morphologischem oder physiologischem Wert, wovon gar keine Rede sein kann, da sie lediglich regionalen Wert haben. Die Zahl der Regionen ist aber nicht unnötig zu vermehren.

g) Vorderhirn.

Das Vorderhirn erscheint als eine stark seitlich komprimierte Keule mit paarigen Verlängerungen. Das Relief ist ein sehr kompliziertes. Ventral vor den Optici springt zunächst ein medianer unpaarer Höcker vor, das Tuberculum praeopticum (*Tpo*). Vor ihm verläuft die Hirnmasse noch auf eine kleine Strecke ungeteilt. Dann beginnt der Sulcus anteromedianus (*Sam*) die Vorderhirnmasse in zwei oral gegen einander abgeplattete Massen zu zerlegen, die sich in vier flachen Höckern ausprägen und die wir als

Tubercula ventralia anteriora und posteriora unterscheiden. Dorsal zieht, durch eine tiefe Querfurche getrennt und median gespalten, ein Wulst hin, der dem Schaltstück entspricht, von der Decke des dritten Ventrikels umsäumt wird und sich lateral und oral in einen als Rahmen für die Decke des dritten Ventrikels dienenden Wulst fortsetzt, der sich gegen die durch das Tuberculum dorsale bewirkte Knickung verliert, um nochmals vor dem Velum zu einem prävelaren Wulst sich rasch zu erheben und gegen das vordere Ende des dritten Ventrikels abzuschwellen (Fig. 19 zeigt am besten den der Decke des dritten Ventrikels entblössten Rand). Der auf der Unterseite beginnende Sulcus anteromedianus vertieft sich an der oralen Vorderhirnfläche merklich und setzt sich bis zum Ende der Decke des dritten Ventrikels fort, hier die beiden mächtigsten Höcker des Vorderhirns, die Tubercula dorsalia (*Td*) voneinander scheidend. Zwischen diesen und den ventralia anteriora erhebt sich die Seitenwand ohne scharfe Begrenzung in axialer Richtung. Im Anschluss an die Autoren könnte man sie als Tubercula olfactoria ansprechen, aber dieser Name involviert eine Funktion, die ihnen kaum in höherem Masse zukommt, als anderen Teilen des Vorderhirns. Ich bezeichne sie daher lediglich als Tubercula lateralia (*Tlt*). Aus ihnen vor allem gehen durch Abschnürung und Verdünnung der Wand oralwärts die Tractus olfactorii hervor und führen zu den Bulbi olfactorii über, die beiderseits zweiteilig ausgebildet und durch die Fila olfactoria mit den Nasenbechern verbunden sind, für diese Bulbi ist der Besitz von Glomeruli olfactorii charakteristisch.

Manche der hier geschilderten Verhältnisse erhalten ihre ergänzende Illustration in dem nachfolgenden Abschnitt Histologie, wo wir bei Anlass der Schilderung von Strukturformen auch Übersichtsbilder einzelner Hirnpartien geben werden.

N. terminalis.

W. Locy[1]) hat diesen Nerv ebenso wie bei anderen Selachiern auch bei Scymnus beschrieben. Die betreffende Stelle lautet: „I have had a

[1]) Bing u. Burckhardt, a. a. O. Vergl. dazu die neueste Kritik von Pinkus, Über den zwischen Olfactorius und Opticusvorsprung das Vorderhirn (Zwischenhirn) verlassenden Hirnnerven der Dipnoër und Selachier. Verh. physiol. Ges. Berlin 1905.

single specimen of this archaic form. The brain is elongated and similar to that of Heptanchus. The new nerve is very slender; its roots lie deep within the median furrow of the prosencephalon. In front, it passes in almost a direct line to the bulbus and dips into the fissure between the median and lateral divisions of the olfactori nerve".

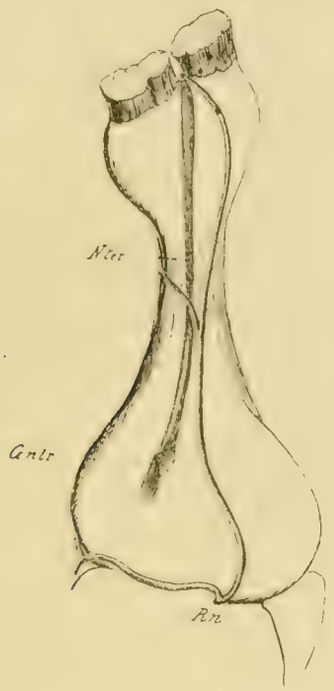


Fig. 18.

Nervus terminalis der rechten Seite von der Medianebene her gesehen.

N.ter = Nervus terminalis,
Gntr. = Ganglion des Nervus terminalis,
Rn. = Recessus neuroporicus.

3fach vergr.

Umso mehr, da Locy gerade die beschriebenen Verhältnisse von Scymnus nicht abbildet, gebe ich in Fig. 18 eine Skizze des rechtseitigen N. terminalis. Ich habe ihm nach Osmiumbehandlung aus seinem Zusammenhange genommen und muss, entgegen meiner früheren Ansicht, der Eintritt der kaudalen Wurzel ins Vorderhirn sei nicht erwiesen, bekennen, dass dieser Eintritt bei Selachiern wenigstens deutlich zu konstatieren ist. Er

geschieht vermittelst einer rasch hinter dem Ganglion fächerartig ausgebreiteten Wurzel, die ausser den das Ganglion verlassenden Fasern noch solche enthält, die am Ganglion vorbei, den an ihm teilnehmenden Nerven parallel laufen. Ich möchte daher auch nicht unbedingt dafür eintreten, dass alle Fasern des N. terminalis sensibel seien, sondern die Möglichkeit, dass auch motorische Elemente ihm beigemischt sind, betonen. Da aber der Nerv innerhalb der Selachier nach Locys Darstellung beträchtlicher Variation ausgesetzt ist, mag die ventrale motorische Wurzel, wenn nicht Totalpräparation erfolgt, leicht übersehen werden.

3. Oberflächenskulptur.

Die Oberflächenskulptur tritt kaum irgendwo deutlicher zu tage, als bei unserem Objekte. Wer einen Blick auf unsere Fig. 19 wirft, wird nicht begreifen können, dass ein sofort als so wesentlich in die Augen springendes Strukturverhältnis bisher ignoriert worden ist. Ebenso wird sofort klar, dass in der Oberflächenskulptur nicht nur ein rein äusserliches Detail enthalten ist, sondern dass in ihr der strukturelle Zusammenhang der hier ja so wenig verdickten Hirnwand in Erscheinung tritt und zwar in einer Form, die durch keine Analyse der Quer- oder Längsschnitte ebenso deutlich darzustellen wäre. Wie unter der zarten Haut eines Aktes die Muskulatur durchschimmert, so unter der Membrana limitans externa die oberflächlichen Faserzüge und tiefen Schichtenmassen. Wie wir aber auch nicht die Mechanik der Muskelmassen aus der histologischen Struktur der Muskelfibrille zu erklären suchen, so kommt uns auch hier handgreiflich zum Bewusstsein, dass die Struktur der Formen des gesamten Hirns nur aus seiner Wachstumsmechanik und aus dem Studium der an seinem Aufbau beteiligten Massen erklärt werden kann, nicht aus der Struktur der Einzelzelle. Eigentümlicherweise haben die Faserbahnforscher gerade auf die oberflächlich verlaufenden Faserbahnen wenig Wert gelegt und die Art, wie die Faserbahnen unmittelbar unter der Oberfläche sich verhalten, mit Ausnahme der Schilderung der sogenannten Fibrae arcuales, kaum berücksichtigt. Es ist das Verdienst von G. Retzius (Menschenhirn), auf diese

Abd = Abducens,
Ac = Acusticus,
Ar = Auriculum rhombencephali (Rautenohr),
Bolf = Bulbus olfactorius,
Fac. sens = sensibler Facialis,
Fbb = Fibrae basales,
Flim = Fibrae lobi inferioris ad mesencephalum,
Flit = Fibrae lobi inferioris ad telencephalum,
Fce = Fovea culminis epencephali,
Folf = Fila olfactoria,
Gl = Glossopharyngeus,
Lat = Lateralis.
Oc = Oculomotorius,
Opt = Opticus,
Osp = Occipitospinalnerven,
Pd = Pars diencephali tractus tectobulbaris,
Pt = Pars tectalis tractus tectobulbaris,
Slm = Sulcus lateralis mesencephali,
Slmy = Sulcus lateralis myelencephali,
Str = Sulcus triangularis,
Td = Tuberculum dorsale,
Thtsp = Tractus thalamotectospinalis,
Tip = Torus interpeduncularis,
Tlm = Tuberculum laterale mesencephali,
Tpo = Tuberculum praeopticum,
Trcblsp = Tractus cerebellospinalis dorsalis,
Trig = Trigeminus,
Trolf = Tractus olfactorius,
Trsth = Tractus striothalamicus,
Trtb = Tractus tectobulbaris,
Ttelpo = Tractus telencephali ad recessumpraeopticum,
Tva = Tuberculum ventrale anterius,
Tvp = Tuberculum ventrale posterius.

Die Faserbänder des Nachhirns sind entsprechend dem Text in dorsoventraler Richtung mit griechischen Buchstaben bezeichnet: δ, ε, ζ entsprechen *b*, *c*, *d* von Fig. 12.

Fig. 19.

Scymnus lichia erwachsen, Oberflächenskulptur der linken Seite. 2fach vergr.

Strukturverhältnisse aufs neue Wert gelegt zu haben. Von älteren Darstellungen mag diejenige von Treviranus,[1]) die sich auf das Froschhirn bezieht, hier Erwähnung finden. Am meisten sind die oberflächlichen Fasermassen für das Selachierhirn noch von Seiten Edingers auf Querschnitte berücksichtigt worden, dessen Bezeichnungen ich auch, wo immer möglich, folge.

Die Basis der Medulla oblongata zeigt von allen Flächen am ausgedehntesten eine einheitliche Oberflächenskulptur. Diese besteht in mächtigen Faserbandmassen, die zu beiden Seiten des Sulcus longitudinalis der Länge nach verlaufen und abgesehen von vielen näher zu beschreibenden Abweichungen einen mächtigen Strom oberflächlich verlaufender Bahnen verraten, die nur durch eine lateral verlaufende Furche (in B. Hallers Figuren als *lf* bezeichnet) geschieden werden. Es unterliegt keinem Zweifel, dass der ganze ventral von der Lateralfurche verlaufende Faserzug als die Thalamotectospinalbahn zu betrachten ist, deren mächtige Längsbündel auch die grosse Masse der Ventrolateralzone ausmachen (α). So sehen wir denn auch diese Längsbahn Fasern nach dem Hinterhirn, nach dem Mittelhirn und nach den Lobi inferiores entsenden, das Hauptbüschel allerdings taucht unter den mächtigen Mittelhirnbahnen unter, um zugleich mit einigen Faserbündeln, die vom Vorderhirn zu den Lobi inferiores verlaufen, ausschliesslich den Querschnitt des Zwischenhirns zu füllen. Unterbrochen wird der Verlauf dieser Faserbahn durch den schon geschilderten Austritt des Abducens. Als einen Abschnitt derselben, der durch deutliche Längsfurchen abgegrenzt ist, haben wir eine kleine, vulvaartig aussehende Bildung zu betrachten, den Torus interpeduncularis, der unmittelbar über der Hypophyse liegt und Fasern zum Corpus interpedunculare und den Lobi inferiores entsendet. Vor ihm liegt der Durchtritt des Oculomotorius. Die Lateralfurche, welche die grosse Tectothalamospinalbahn seitlich begrenzt, ist wenig tief, stellenweise auch wenig deutlich, die über ihr liegenden, die Seitenwand überziehenden Längsfasermassen (β) entsprechen ungefähr den Seitensträngen, lassen durch sich unter mannigfacher Störung ihres Verlaufes die wichtigsten Nervenwurzeln durchtreten, so an ihrer Basis die occipitospinalen mehr dorsal und, ausgenommen den Lateralis, mit merk-

[1]) Zeitschr. f. Physiol. 1831. Taf. I Fig. 3.

würdig kleinen Wurzeln den Vagus, über dem Abducens den Acusticus, vor ihm den Trigeminofacialis und hinter ihm den Glossopharyngeus. Aber es unterliegt keinem Zweifel, dass das gesamte Faserband ebenfalls vorwiegend Bahnen enthält, die cerebrospinale Verbindungen herstellen, wenn auch im Gegensatz zur Thalamotectospinalbahn mehr mit den hinter dem Hinterhirn gelegenen Zentren. Der Verlauf dieses Faserbandes wird vielfach gekreuzt und durchflochten durch oberflächlich vorwiegend dorsoventral gerichtete Fasern (Fibrae superficiales). Es sind dies Bahnen im Acusticofacialis- und Vagusgebiete, die nach den tiefen Lagen derselben Seite oder kreuzend nach der anderen verlaufen; B. Haller, der (Fig. 50) welche davon abbildet, hält sie für die Fasern, aus deren Konzentration die Bindearme hervorgehen möchten. Jedenfalls ist hier zu konstatieren, dass keine ihrer Fasern die Lateralfurche äusserlich sichtbar überschreitet und darin scheint vor allem ein Grund für die Entstehung dieser sonst in der Struktur nicht deutlich motivierten Furche zu liegen. Ganz besonders setzt sich von diesem Faserband ein solches ab (γ), das schmal ist und dorsal von ihm verläuft. Sein Zusammenhang mit dem Lateralis ist zu evident, einmal durch die Lage dieses Nervendurchtritts mitten in ihm, dann aber auch dadurch, dass direkt die durchtretende Wurzel in dieses Band (Fibrae laterales) hinein zu verfolgen ist, welches sich kaudalwärts ausspitzt, oralwärts am Hinterhirn endet. Etwas weniger scharf ist die Längsfaserung auf dem vierten Bande (δ) ausgesprochen. Dieses verläuft, dorsal besonders durch eine tiefe Furche begrenzt von den Rautenohren mit ventral gerichteten Fasern beginnend kaudalwärts, um sich gegen die Endblase auszuspitzen. Es bildet in seinem oralen Teile die Hauptmasse jener erkerartigen Ausladung, die die Unterlage der Rautenohren ausmacht.

Ebenso verhält sich das fünfte Band (ε), welches wir schon als dritten Wulst der Rautenlippe kennen lernten und welches von dem sehr deutlich bemerkbaren Eintritt des sensiblen Facialis kaudalwärts gerichtet, sich keilförmig ausspitzt. Es ist Edingers Tuberculum acusticofaciale. Ohne Oberflächenskulptur, einen glatten, vielgewundenen Wulst bildend, erscheinen am meisten dorsal die Rautenlippen (ζ), der vierte der bei der Begrenzung der Rautengrube geschilderten Wülste. Zum Hinterhirn übergehend, finden wir ein überraschendes Oberflächenbild. Durch eine nicht

sehr tiefe aber breite Grube setzt sich der Stiel des Hinterhirns von den ventralen Lateralwandungen ab. Die an der Basis quer gerichteten Faserzüge verraten eine gewaltige Störung der ursprünglichen Lageverhältnisse. Nun strahlen aber die vom Rückenmark kommenden Fasern nicht gleichmässig ein, sie tauchen unter der hier entstehenden Schleife unter, um nach dem Hinterhirnrücken flächenartig sich zu verteilen und zwar so, dass der Hauptanteil der oberflächlichen Bahnen, der Tractus cerebellospinalis dorsalis Edingers, sich kaudalwärts wendet, während die oral gerichtete Kuppe des Hinterhirns gewissermassen die tiefsten Strahlen dieses Fächers empfängt. Aus dieser Anordnung wird eine Bildung verständlich, die uns schon bei der rein makroskopischen Betrachtung begegnet ist, nämlich die dreieckige Lücke zwischen der vorderen Hinterhirnkuppe und dem Mittelhirn (Sulcus triangularis). Am deutlichsten gestalten sich die Verhältnisse des Mittelhirns. Hier wird die ganze Oberfläche von der Tectobulbärbahn bedeckt, die je näher wir dem Opticus rücken, um so deutlicher in ein hell schimmerndes Flechtwerk übergeht, das kaudal vom Opticus sich absenkend, zwischen Opticus und Lobi inferiores in die Tiefe taucht, um von einigen Fasern überdeckt zu werden, die zwischen den Lobi inferiores und dem Vorderhirn, die Optici voneinander trennend, durchtreten (*Fbb*). Einige wenige Fasern verlaufen auch vor dem Opticus und endlich ist zu erwähnen, dass auch dorsal hinter der Commissura posterior einige Fasern zu kreuzen scheinen.

Die Hauptmasse der Lobi inferiores sieht sich nicht fasrig an, sondern markig, doch lassen sich Verbindungen sowohl nach dem Zwischenhirn (*Flit*), als nach der Basis des Mittelhirns (*Flim*) konstatieren. Besonders auffallend ist die Zerlegung der Tectobulbärbahn in einen rein tectalen, dem Mittelhirn angehörenden (*Trtb Pt*) und einen ventralen, durch eine breite flache Furche von ihm geschiedenen Abschnitt (*Trtb Pd*). Auch das Vorderhirn ist vorwiegend markig beschaffen, doch sind an ihm einige Faserstrahlungen zu unterscheiden und zwar eine ganz diffuse in ovalem Bogen verlaufende Bahn, die von der Seitenwand mit einem lockeren Faserbüschel beginnend, gegen den Opticus gerichtet, am Recessus praeopticus (*Ttelpo*) umbiegt. Ferner dorsal von ihr ein Tractus (*Trsth*), der wahrscheinlich als striothalamicus zu deuten ist. Sodann der Tractus olfactorius

die einzige hohl verlaufende Bahn (*Trolf*). Endlich ist auf das Relief der Bulbi olfactorii zu verweisen, das uns sofort ihre charakteristische Struktur verrät, während die markigen Ränder, die den Hirnschlitz begrenzen, mit keiner Bahn in Zusammenhang zu bringen sind.

Bei der Oberflächenskulptur ist noch das auffallende Faktum hervorzuheben, dass die Nerven an ihren Durchtrittstellen durch die Membrana limitans externa einen ganz anderen Querschnitt aufweisen, als man ihrer Dicke und ihrer Form während des intercraniellen Verlaufes nach erwarten würde. Sie sind nämlich durchweg auffallend klein und erst ausserhalb der Durchtrittstelle schwellen sie zwiebelartig an; ja manche erleiden nochmals eine beträchtliche Verstärkung durch Bindegewebshüllen ausserhalb des Craniums, besonders die Trigeminusäste. Während so der Glossopharyngeus an der Durchtrittsstelle nur 1,3 mm misst, verbreitert er sich intercraniell bis zu 3,3 mm, um dann allerdings beim Durchtritt durch das Cranium auf 2,0 mm zurückzusinken. Der sensible Facialis misst am Durchtritt 1,2 mm, in 2 mm Entfernung davon bereits 2,5 mm. Aber die verschiedenen Nerven zeigen auch ein verschiedenes Mass der Verdickung und es können daher für genaue Messungen nur die Nervenwurzeln unmittelbar an der Durchtrittstelle verwendet werden. Dies sei in Ergänzung zu unserer Tabelle, welche die speziellen Angaben einzeln enthält, ausdrücklich hervorgehoben.

4. Medianschnitt.

In meiner Studie über den Bauplan des Wirbeltiergehirns habe ich zuerst vom Standpunkte der Hirnphylogenie die Anwendung der Medianschnitttechnik aus der genetischen Bedeutung der median liegenden Bildungen des Hirns begründet, nachdem diese Technik schon wiederholt mehr zu Zwecken topographischer Übersichtlichkeit oder im Glauben an eine geheimnisvolle Bedeutung der „Hirnachse“ verwendet worden war. Seit jener Zeit sind wohl viele Medianschnitte publiziert worden; ich kenne aber keinen, der uns streng nur die medianen Teile wiedergegeben hätte unter kritischer Ausscheidung aller lateralen Zonen. Am nächsten kommen noch einer scharfen Erfassung der Aufgabe manche embryologische Bilder; denn je

jünger Stadien sind, um so leichter ist es, den Medianschnitt auch technisch rein darzustellen, d. h. durch einen oder zwei Schnitte, was für das spätere embryonale Hirn oder gar für das erwachsene nicht so einfach ist. B. Hallers Fig. 80, welche einen „medianen Sagittalschnitt von Scyllium catulus" geben will, stellt nichts weniger vor, als den Medianschnitt. Ebenso v. Kupffers[1]) Fig. 96 u. 97. (Medianschnitt von Acanthias und Spinax) oder Edingers Rochengehirn Fig. 55 A oder Rabl-Rückhards[2]) Fig. 7.

Drei Wege sind es, die wir zur Feststellung des Medianschnittes beschreiten. In Fällen, wo nur einer offen stand, wählte ich als wichtigsten den des sagittalen Schnittes mit Hilfe des Mikrotoms, wobei mit einiger Ubung es auch möglich ist, falls der Schnitt nicht ideal verläuft, ihn aus den benachbarten Schnitten zu ergänzen. Dadurch wird aber, sobald reichlicheres Material vorliegt, keineswegs entbehrlich, dass wir den Medianschnitt durch das zweite Verfahren, das der Querschnitte, in allen Einzelheiten kontrollieren und drittens enthebt uns auch diese doppelte Feststellung keineswegs der Pflicht, durch den Versuch, ein Hirn mit dem Messer zu halbieren, ein weiteres wichtiges Kontrollmittel anzuwenden. Dass im Falle der Asymmetrie dieser dritte Weg überhaupt der einzig zweckmässige ist, allerdings unter Beobachtung des idealen Medianschnittes für das asymmetrische Hinterhirn, wird aus dem dritten Teil unserer Arbeit hervorgehen.

In der Nähe des Foramen occipitale beginnt der Zentralkanal des Rückenmarkes emporzusteigen und sich zu jenem Trichter zu erweitern, den wir als Recessus occipitalis bezeichnet haben und der bereits S. 321 beschrieben ist. Jene Querkommissur, die auch mikroskopisch sichtbar ist, bildet den Abschluss der Dorsomedianzone des Rückenmarks und die eben noch verdickte Substanz geht rapid unter dorsaler Umbiegung in das einschichtige, kubische Epithel der Endblase über. Vor der Endblase steigt dieses sanft gegen das Hinterhirn an, bedeckt mit Blutgefässen

[1]) K. v. Kupffer, Die Morphogenie des Zentral-Nervensystems. Handb. d. Entwicklungslehre von O. Hertwig. XV. 1903.

[2]) Rabl-Rückhard, Das gegenseitige Verhältnis der Chorda, Hypophysis etc. bei Haifischembryonen etc. Morphol. Jahrb. Bd. VI. 1880.

[3]) G. Sterzi, Sulla regio parietalis dei ciclostomi, dei selaci e degli olocefali. Anat. Anz. XXVII. 1905.

und Bindegewebe, bis zur hinteren Kuppe des Hinterhirns. Hier biegt es in ventraler Richtung um und fängt nach kurzem Verlauf an, sich etwa auf das dreifache Volumen zu verdicken. Die Epitheliosa der Rautendecke hat ihr Ende erreicht und verwandelt sich hier in ein aus wenig lang

Ar = Auricula rhombencephali,
Cal = Calamus scriptorius,
Cip = Corpus interpedunculare,
Cp = Commissura postorior,
Cs = Commisura superior,
Die = Diencephalon,
Ep = Epiphysis (Zirbel),
Epe = Epencephalon,
Fcc = Fovea culminis epencephali,
Hpe = Hypencephalon,
Inf = Infundibulum,
Li = Lamina infraneuroporica,
Lmh = Lobus medianus hypophyseos,
Lmsv = Lobus medianus Sacci vasculosi,
Lph = Lobus posterior hypophyseos,
Ls = Lamina supraneuroporica,
Lth = Lobus terminalis hypophyseos,
Mse = Mesencephalon,
Myc = Myelencephalon,
Msp = Medulla spinalis,
Opt = N. opticus,
P = Paraphysis,
Pa = Pars anterior laminae infraneuroporicae,
Pmt = Pars media tegminis rhombencephali,
Pp = Pars posterior laminae infraneuroporicae,
Prv = Prävelarer Abschnitt,
Pvt = Plica ventralis encephali,
Rn = Recessus neuroporicus,
Roc = Recessus occipitalis,
Rpae = Recessus praeopticus,
Rpo = Recessus postopticus,
S = Schaltstück, Pars intercalaris diencephali,
Str = Sulcus triangularis,
Telc = Telencephalon,
V = Velum,
Vt = Vesicula terminalis.

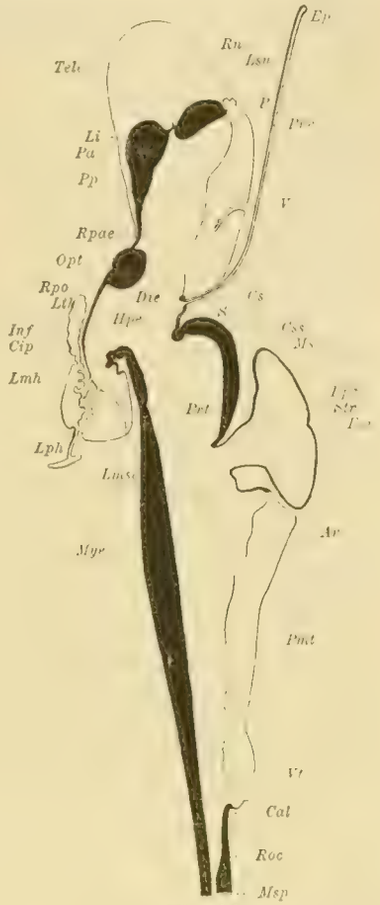


Fig. 20.

Scymnus lichia, Medianschnitt des Hirns, man vergleiche für die histologische Differenzierung desselben Taf. V. $1^1/_2$ fach vergr.

gestreckten Pfeilerzellen bestehendes Stützgewebe, das nur spärlich von Kommissuren der beiden Hinterhirnhälften durchsetzt ist. Wir bezeichnen dieses Gewebe als Pilosa und zwar Brachypilosa (s. S. 281). Während im Bereiche der Rautengrube die Dorsomedianzone, auch transversal stark verbreitert, die Rautendecke gebildet hat (Fig. 20), tritt gleichzeitig mit der

Ausbildung von Brachypilosa eine plötzliche Verengung der Dorsomedianzone auf einen sehr schmalen Streifen, dessen Breite etwa seiner Dicke gleich kommt, ein, indem sich die Dorsolateralzonen plötzlich gegenseitig so dicht als möglich annähern. Hierfür vergleiche man auch die früher von mir (1897) und Edinger[1]) gegebenen Querschnitte. Schon damals betonte ich, dass diese Erscheinung für alle Selachier gilt, die mir zur Verfügung standen und sie hat sich auch an allen weiteren ausnahmslos bestätigt. In Gestalt von Brachypilosa also folgt nun die Dorsomedianzone dem Hinterhirnkontur: ventral-oral-dorsal-kaudal; allerdings so, dass ihr kaudalster Abschnitt, nämlich der von der Decke des vierten Ventrikels ventral gerichtete Streifen an Verdickung das Doppelte und verzweigte Pfeilerzellen aufweist. An der hinteren Kuppe biegt sie oralwärts um und verläuft mit Ausnahme einer kleinen, aber sehr charakteristischen Kerbe (Fovea culminis epencephali) etwas von der Mitte oral zur vorderen Kuppe, von der sie mit zwei leichten Knickungen, deren hintere dem äusserlich sichtbaren Sulcus triangularis entspricht, ventral absteigt. Hier erfährt sie eine leichte Anschwellung, welche gegen den Ventrikel vorspringt und vom Nervus trochlearis herrührt. Davor schwillt sie nach einer Einkerbung vom Ventrikel des Mittelhirns nun mächtig an und geht rasch in ein Stützgewebe von stärkerer Streckung seiner Pfeiler, ja sogar von Asteropilosa in Makropilosa über. In diesem Stützgewebe verlaufen ausser den radiär gerichteten Fasern der Pfeilerzellen selbst Kommissuren der optischen Bahnen. Auch liegt in ihm eingebettet jene Reihe riesiger Zellen, der motorische Mittelhirntrigeminuskern, Dachkern von Rohon[2]). Rasch verkürzen sich vor der Mittelhirnwölbung wiederum die Pilosazellen, obschon sie hier doch die Commissura posterior umschliessen und nach kurzem Verlauf gehen sie wieder auf das Stadium der Brachypilosa herunter, nämlich am Ursprung der Zirbel (vgl. auch Fig. 15). Auf ihrem langen Verlauf folgen wir ihr bis zu dem in der Schädeldecke eingelassenen Zirbelbläschen, welches auch im erwachsenen Zustand sich nie über das Niveau eines rudimentären Organs erhebt, immerhin aber brachypilös ausgebildet ist. Nachdem sich

[1]) L. Edinger, Das Cerebellum von Scyllium canicula. Arch. f. mikr. Anat. Bd. 58. 1901.

[2]) V. Rohon, Das Centralorgan des Nervensystems der Selachier. Denkschr. Akad. Wissensch. Wien. Bd. XXXVIII. 1878.

die Dorsomedianzone auf einen kurzen, kreisrunden Querschnitt, der die Commissura superior beherbergt, verdickt hat, beginnt sie wieder, sich transversal zu verbreitern um die oben (S. 329) beschriebene Decke des dritten Ventrikels zu bilden. Für die spezielle Struktur dieser Gegend sei auf Fig. 15 verwiesen. Hierbei nimmt sie wieder rein epitheliösen Charakter an. Es folgt zunächst das Zirbelpolster. Vor ihm senkt sich das Velum transversum ein und zwar gebildet von zwei Blättern, die nicht nur wie v. Kupffer richtig bemerkt, embryonal dadurch verschieden sind, dass das hintere von dünnerem Epithel gebildet wird, als das vordere, sondern die auch diesen Charakter im erwachsenen Zustand beibehalten, wie denn überhaupt vor der ausgesprochen pilösen Commissura superior das Epithel reines Pflasterepithel wird. Ausserdem zeigt das vordere Blatt regelmässig quer verlaufende Wellen, die nicht nur für Scymnus höchst charakteristisch sind. Zwischen beiden Blättern des Velums dringt Bindegewebe mit Blutgefässen ein. Das vordere Blatt setzt sich in das aus zylindrischem Epithel bestehende Tegmen praevelare fort, welches hoch im Bogen sich oralwärts absenkt um hier nach Bildung einiger Falten (Paraphyse) einen total anderen histologischen Charakter anzunehmen. An jenen Falten finden sich die Dorsolateralzonen, nachdem sie auf eine lange Strecke auseinandergewichen waren, wieder ein und die Dorsomedianzone, auf einen halbmondförmigen Querschnitt anschwellend, nimmt asteropilöse Struktur an, indem sie sich vollständig den Lateralzonen assimiliert. Sie verläuft nunmehr nicht nur ventral, sondern sogar etwas kaudal und schwillt wiederum ab an derjenigen Stelle, die dem Recessus neuroporicus des embryonalen Gehirns entspricht und für die wir, da sie auch im erwachsenen Gehirn den embryonalen Charakter beibehält, auch diese Bezeichnung nicht zu ändern haben.

Ventral vom Recessus neuroporicus beginnt die Ventromedianzone und zwar bildet sie unmittelbar unter dem Recessus neuroporicus die stärkste Verdickung, die in diesem primitiven Gehirn überhaupt im Medianschnitt angetroffen wird. Diese, die Lamina infraneuroporica, ist von gleichem Charakter wie die Lamina supraneuroporica, also asteropilös und mit diffuser Gangliosa besetzt, ohne deutliches Hervortreten von Kommissuren. Sie gliedert sich in zwei voneinander abgesetzte Abschnitte, einen vorderen

dickeren und einen hinteren gegen den Recessus praeopticus keilförmig zugespitzten. Die Grenze beider entspricht der Scheidung der Unterfläche des Vorderhirns in Tubercula anteriora und posteriora. Am Ende des hinteren Abschnittes geht die Ventromedianzone auf brachypilösen Bau herunter und begrenzt so den Recessus praeopticus, den wir an der Unterfläche des Hirns einen unpaaren Höcker bilden sahen (Fig. 9 *Tpo*). Jetzt folgt der Querschnitt des Opticus selbst, ebenfalls eine der stärksten Verdickungen und von dem histologisch eigenartigsten Charakter des ganzen Medianschnittes. In ihm kommt es zu ausschliesslicher Ausbildung von Asterocyten jenes Gepräges, das beim Opticus seine nähere Erläuterung findet, durchflochten von den kreuzenden Fasermassen der Tectobulbärbahnen. Der Recessus postopticus wird im Bereich des vordersten Teiles der Hypophyse von makropilösem Gewebe gebildet und geht dann ziemlich akut in das brachypilöse und allmählich zylindrische Epithel des Trichters über. Zylindrischen Charakter besitzt ja das ganze Infundibulum, vor dessen Übergang in die Haubenregion der Torus interpeduncularis mit einem Recessus im Innern quer hinüberzieht. Hier erhebt sich die Stützensubstanz allmählich wieder bis zu makropilösem Charakter, der von nun an bis ans Ende der Rautengrube, ja bis ins Rückenmark nicht mehr aufgegeben wird, und sich insofern mit der Dicke steigert, als hier neben den Pfeilerzellen auch einfache Asterocyten, wenn auch in spärlicher Anzahl, vorhanden sind. Die Haube wird begrenzt von jener Bucht, die ich zuerst als „hintere Mittelhirngrenze“ bei Vertretern aller Vertebraten nachgewiesen habe. So sehr es mich freuen könnte, dass diesem Nachweis seitens der Forscher Beachtung zu teil wurde — (B. Haller taufte sie Sulcus interencephalicus, v. Kupffer plica ventralis encephali, beide legten ihr fundamentale Bedeutung für die Gliederung des Hirns bei) — so wenig kann ich mich von der von diesen Autoren ihr beigelegten genetischen Wichtigkeit überzeugen. Mir erscheint sie vielmehr als das Produkt der Kreuzung sehr konstanter Faserbahnen an der Unterfläche des Hirns, aber keineswegs als eine Grenze, woran sich prächordales und epichordales Gehirn scheiden sollten. Hinter der Plica ventralis (ich sehe mich genötigt, diese einfache, durch v. Kupffer nunmehr in Hertwigs Handbuch festgelegte Bezeichnung zu adoptieren) erhebt sich der langgestreckte Rautenboden mit stärkster Verdickung im Gebiet des Acusticuseintritts, kaudal sich wieder allmählich absenkend.

Es hiesse der Natur der Sache Gewalt antun, wollten wir nun die Abschnitte der Ventrolateralzone mit denen der Dorsolateralzone zu homodynamen Querringen verbinden, wie es den meisten Hirnmorphologen unter dem Zwange ihrer Vorstellung von Kopfmetameren als unerlässlich gilt. Ich stehe nicht an, alle derartigen Versuche, von denen namentlich die vergleichende Embryologie eine besonders reichhaltige Musterkarte besitzt, und die auch ohne alle Begründung wieder von v. Kupffer im Hertwigschen Handbuch als prototypisch aufgestellt worden sind, als Konstruktionen rein deduktiver Art, beruhend auf falscher Generalisation zu erklären.

5. Innenskulptur.

Die einzelnen Bildungen der Medianzonen können nicht von einer ausserhalb des Hirns gegebenen Abstraktion, der man das Hirn selbst ohne Not unterjochen will, gedeutet werden, vielmehr zuerst und zu oberst sind sie aus der Beschaffenheit des Hirns selbst und zwar seiner Lateralzonen zu verstehen. Bevor aber dies geschehen kann, haben wir diese Lateralzonen und die Innenfläche des Hirns näher ins Auge zu fassen.

Verfolgen wir die Innenfläche des Hirns auf ihrem Verlauf, so können wir dabei den Medianschnitt als schon bekannten Rahmen benützen, nach dessen Abschnitten sich auch gewisse Punkte der Lateralwand fixieren lassen. Die Erweiterung des Zentralkanals vor Eintritt in die Rautengrube hat zunächst zur Folge, dass ein halbzylindrischer Wulst unmittelbar neben der Ventromedianzone hervortritt, den wir auf fast geradem Verlauf bis zur Plica ventralis encephali verfolgen können. Es ist das hintere Längsbündel der Autoren, der Fasciculus longitudinalis posterior. Er nimmt den meist ventral und medial gelegenen Teil der Ventrolateralzone in Anspruch. Weniger konstant ist der lateral neben ihm verlaufende Abschnitt der Ventrolateralzone, der eine grubenartige Einsenkung, die Fossa lateroventralis bildet und der schon die Seitenwand des Occipitalrecessus bildete. Er verbreitert sich erheblich im Gebiet der Endblase, verschmälert sich alsdann wieder und läuft halbwegs zwischen dem Calamus scriptorius und der Plica encephali ventralis spitz in einen Recessus aus, dem wir den Namen

Recessus acusticus (*Rac*) geben und an dem wir noch andere Bildungen werden enden sehen. Über und lateral von dieser Grube zieht sich nämlich zwischen dem Calamus scriptorius und dem Recessus acusticus ein Wulst hin, den wir bereits oben als ersten beschrieben haben, zunächst die Lippe des hintersten Abschnittes der Rautengrube bildend, dann in die Lobi vagales der Autoren übergehend. Dieser gesamte Wulst endet schräg ventral gerichtet am Recessus acusticus. Über ihm, wiederum mehr als Grube ausgebildet, aber unter Längsstreifung, die durch schwache Faserbahnen hervorgerufen ist, verläuft, sich verbreiternd, bis zum Recessus acusticus ein weiteres den Lateralzonen angehörendes Feld, die Fossa dorsolateralis. Über ihm liegt der keilförmig ausgespitzte oberste Wulst (*c* der Fig. 11 u. 21), dem als letzter Aufsatz die markig ausgebildete Wölbung folgt (*d* der Fig. 11 u. 21), die wir schon bei Betrachtung der äusseren Oberfläche kennen gelernt haben. Es sind somit auf einem Querschnitt unmittelbar vor dem Recessus acusticus nicht weniger als sechs verschiedene Längsdifferenzierungen der inneren Oblongatawand vorhanden. Längsstreifung, die auf Faserbahnen beruht, zeigen von diesen der erste, zweite, vierte und fünfte Wulst, wogegen der dritte und sechste markig erscheinen. Es schwellen alle diese Längsbildungen, mit Ausnahme der dritten, nach dem Recessus acusticus allmählich an. Hier aber greift plötzlich, fast auf demselben Querschnitt, eine ganz andere Konfiguration Platz. Die Fossa ventrolateralis und die über ihr gelegenen Lobi vagales, sowie die Fossa dorsolateralis hören auf, eine deutlich bemerkbare dorsoventral verlaufende Furche schneidet ausserdem die beiden dorsal gelegenen Bildungen ein und eilt, wie sämtliche zwischen allen Längsbildungen verlaufenden Furchen nach dem Recessus acusticus. Auch der Fasciculus longitudinalis posterior zeigt an dieser Stelle eine Veränderung, indem er seine maximale Verbreiterung (in unserer Figur nicht so sehr) erreicht. Vor dem Recessus acusticus tritt wiederum eine ähnliche, aber nicht gleiche Anordnung der Lateralwand auf. Der Fasciculus longitudinalis posterior setzt sich fort, vier Furchen, die nach dem Recessus acusticus konvergieren, teilen die Wand in entsprechende strahlig angeordnete Wülste. Über diese ziehen zahlreiche Rinnen hinweg, die verraten, dass hier ein mächtiger Faserbüschel vom sensiblen Facialis hereinstrahlend seinen Verlauf nimmt, wie denn auch vereinzelte Fasern

hinter dem Recessus acusticus auf diesen Punkt hinzielen. Besonders kondensiert verlaufen diese Büschel, aus den Rautenohren zusammenströmend, schräg und allmählich verflachend gegen die Plica ventralis hin. Nach dieser zielt auch eine S-förmige Furche, welche zum Hinterrand der Lobi optici aufsteigt und einen glatten, hohlen Raum, der in den einzelnen Lobus opticus eindringt, kaudal begrenzt. Die Wand dieses Hohlraumes zeigt keinerlei Längsgliederung, dagegen strahlen vom hinteren Haubenteil in grosser Zahl die Fasern der Tectospinalbahn empor (Tractus tectospinalis). Sie liefern uns auch den zureichenden Grund für die Entstehung der Plica ventralis; denn dadurch, dass sie sich hier kreuzen, wenigstens zum Teil und um den Fasciculus longitudinalis posterior umschlagen, entsteht diese Grube. Und da beide Fasersysteme ein allgemeiner Besitz der Wirbeltiere sind, existiert auch überall die Plica ventralis. Gewiss bezeichnend genug ist sie, trotz v. Kupffers Wertschätzung, auf seinen Figuren des Hirns der halbblinden Myxinoiden nicht zu finden. Zwischen dem Sulcus der Plica ventralis nun und den vordersten Trigeminofacialisfasern liegt ein Feld, von dem wir zunächst einen kleinen Bezirk, als dem Trochlearis (*Trchl*) angehörig, auszuscheiden haben. Dahinter springt ein Wulst vor, dem auch äusserlich ein zwischen dem vordersten Rand der Rautenohren und der aufsteigenden Hinterwand des Hinterhirns entspricht. Dieser Wulst schliesst Bahnen in sich, die sowohl von dieser Region oralwärts verlaufen, als auch kaudal gerichtete; insbesondere aber auch die mächtigen Verbindungszüge des Hinterhirns mit dem Trigeminofacialis (Tractus cerebellospinalis) und dem Rückenmark. Diese Faserbahnen zeigen keine einheitliche Anordnung über das ganze Hinterhirn hin. Das Hinterhirn zerfällt vielmehr bei Betrachtung seiner Innenfläche in zwei total verschiedene Teile, einen vorderen (*Psa*) mit dünnerer Wand und weiterer Höhlung, ohne fasriges Gepräge seiner Oberfläche und einen hinteren (*Psp*) mit dickerer Wand, stark ausgeprägten, gegen den Ventrikel vorspringenden Faserbahnen, welche namentlich längs der kaudalen Wand zu mächtigen, weissglänzenden Zügen vereinigt sind. Der Scheidung dieser beiden Abschnitte des Hinterhirns entspricht auch eine schon innerhalb der Paläoselachier sehr konstante Bucht, die Fovea culminis epencephali, auf dem Scheitel des Hinterhirns. Setzen wir unsere Beobachtung vor dem bereits geschilderten Mittelhirn

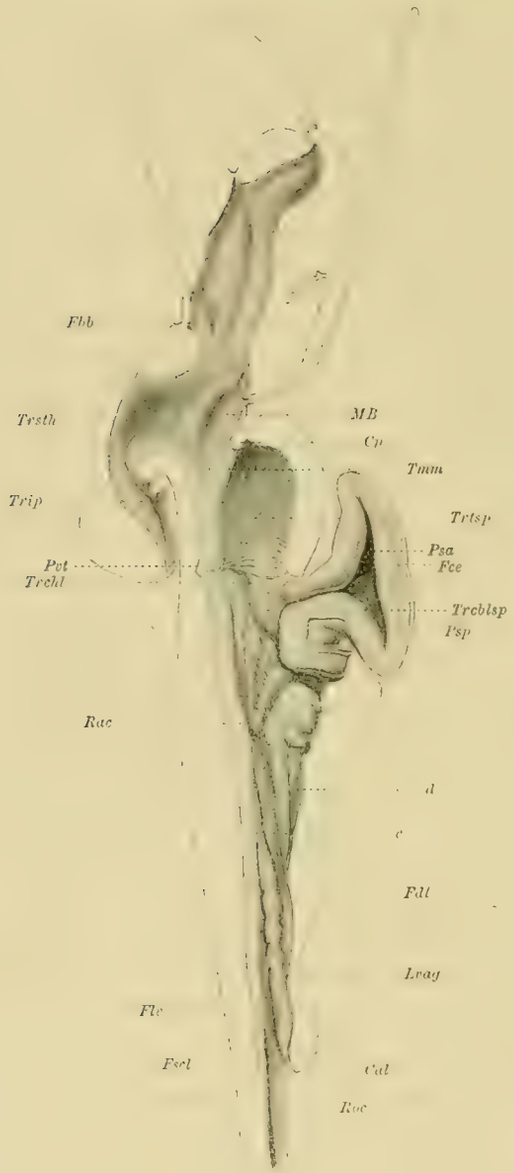


Fig. 21.

Scymnus lichia, Innenfläche des Hirns und deren Skulptur. 2fach vergr.

Cal = Calamus scriptorius,
Cp = Commissura posterior,
Fbb = Fibrae basales,
Fce = Fovea culminis epencephali,
Fdl = Fossa dorsolateralis,
Flv = Fossa lateroventralis,
Fscl = Fasciculus longitudinalis,
Lvag = Lobi vagales,
MB = Meynert'sches Bündel,
Psa = Pars anterior tractus cerebellospinalis,
Psp = Pars posterior,
Pvt = Plica ventralis encephali,
Rac = Recessus acusticus,
Roc = Recessus occipitalis,
Tmm = Tractus thalamomamillaris,
Trchl = Tractus trochlearis,
Trcblsp = Tractus cerebellospinalis,
Trip = Torus interpeduncularis,
Trsth = Tractus striothalamicus,
Trtsp = Tractus tectospinalis.

fort, so sind es die Fasern der Commissura posterior und des Tractus thalamomamillaris (*Tmm*), welche einen mächtig vorspringenden, den Ventrikel auf eine schmale Spalte einengenden Wulst bilden; einen schwächeren erzeugen vor ihm die Meynertschen Bündel (*MB*). Dann gewahren wir einen dreieckigen Wulst, der dem Ursprung der Thalmospinalbahn, dem Nucleus diencephalicus entspricht und wohl unter dem Druck der Tectobulbärbahn stark median vorgewölbt ist; einige wenige Fasern, oberflächlich erkennbar, zweigen sich nach dem Lobi inferiores hin, ab. Nur wenige Spuren hinterlässt auf der Innenfläche der Opticus, abgesehen von dem mächtigen, durch ihn median erzeugten Wulst und wallartiger Vortreibung der umgebenden

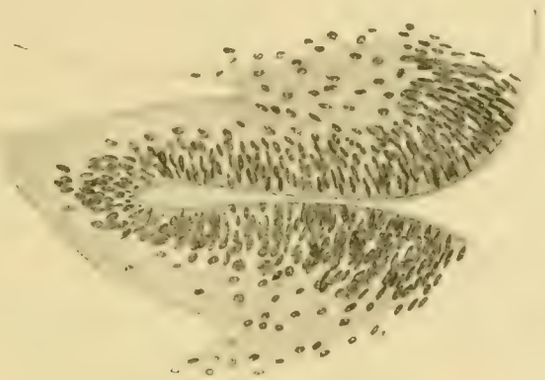


Fig. 22.

Scymnus lichia, Embryo 10 cm. Medianschnitt durch den Recessus neuroporicus. 60fach vergr.

Hirnmassen gegen den Ventrikel hin. Das Vorderhirn ist auch auf seiner Innenfläche markig und lässt deutliche Faserzüge nicht erkennen, mit Ausnahme der hier immer noch paarig verlaufenden basalen Spinalbahn (*Fbb*). Als besondere Wülste treten an ihm die Ränder des Hirnschlitzes hervor, insbesondere der unmittelbar hinter den Tubercula dorsalia gelegene.

Das Unterhirn weist eine lateral tief vordringende Einbuchtung auf im Ventrikel des Lobus inferior. Kaudal geht vom Corpus interpedunculare eine wulstartige Verdickung (Torus interpeduncularis) so ab, dass sie diesen Ventrikel begrenzt und in dessen ventraler Begrenzung sich verliert. Von diesem Querwulst richten sich etwa zwölf sich ausspitzende und gegen ihr

Ende gewundene kleinere Wülste nach der dorsalen Wand der Trichterhöhle. Diese selbst beherbergt einen grossen Hohlraum, der lateral in diejenigen Recessus ausgeht, die über der eigentlichen Infundibulardrüse lagern und die Sacci vasculosi erfüllen. Vor dem Corpus interpedunculare, an der hinteren Circumferenz des Ventriculus lobi inferioris verlaufen Faserzüge, die von der Ventrolateralzone her durch Spalträume voneinander getrennt kaudal-lateral absteigen. Die Hypophyse selbst weist das Bild einer durchschnittenen Drüse auf. Das Hohlraumsystem der Hypophysendrüse entspricht durchaus der äusseren S. 336 geschilderten Konfiguration.

V. Zentral-Nervensystem, Histologie.

1. Einleitung.

Schon eingangs habe ich hervorgehoben, dass mit unseren Mitteln an eine physiologisch präzise Darstellung der Organe innerhalb dieser Gehirne nicht ernstlich kann gedacht werden, dass ich daher darauf verzichte, sie geben zu wollen. Das hindert aber nicht, den Formen des nervösen Gewebes volle Aufmerksamkeit zu schenken, auch wenn wir müssen dahingestellt sein lassen, welches die spezielle Funktion eines jeden Gewebeteiles ist. Bisher hat als vergleichende Anatomie des Nervensystems nur die Bestimmung der Zellhaufen und und Faserbahnen gegolten, entsprechend ihrer physiologisch und nicht genetisch gerichteten Orientierung; daneben die spezielle Beschreibung einzelner Zellen. Wir verfahren anders. Die Organbestimmung mag der Physiologie überlassen bleiben, die schon reichlich vorhandene Zellbeschreibung werden wir ergänzen. Unser Hauptaugenmerk aber wird den Strukturformen des Gewebes zugewandt sein, durch deren Analyse wir allein im stande sein werden, den von der vergleichenden Morphologie längst verlorenen Zusammenhang herzustellen zwischen der äusseren Form des Gehirns einerseits, der Beschaffenheit der Zellen und der Entwicklung des nervösen Gewebes andererseits. Als Ariadnefaden für das Verständnis der fertigen Strukturen, auch schon des primitivsten Gehirns erweist sich die Histologie, sowohl in ihrer genetischen als in ihrer entwicklungsphysiologischen Deutung. Doch werden wir auch hier von den definitiven Zuständen auszugehen haben.

Demgemäss beschreibe ich zunächst Einzelheiten cellulärer Art; sodann einige der wichtigsten und typischen Querschnitte. Daraus wird sich einmal das makroskopisch gewonnene Bild des Hirns ergänzen lassen,

ganz besonders auch für die komplizierten epithelialen Partien. Dann aber mag aus ihnen das eigenartige Bild der Struktur, der Formen des Gewebes und der Substanz ergänzt werden. Auch ich teile die Absicht derjenigen Forscher, welche trachten, die Wiedergabe von Querschnitten, die eben doch immer nur ganz künstliche Bilder erzeugen, auf das Minimum zu reduzieren. Noch sollen, abgesehen vom Medianschnitt, dem eben auch, abgesehen von den technischen, eine toto coelo verschiedene wissenschaftliche Bedeutung zukommt, Längsschnitte zur Verwendung gelangen.

Die Darstellung dieses Kapitels erfordert es, dass wir hier deduktiv vorgehen, nicht induktiv. Aber der Leser möge dabei nicht ausser Acht lassen, dass der Gang dieser Darstellung nicht dem der Untersuchung entspricht, sondern genau entgegengesetzt ist. Liegt hier das komplizierteste Gebiet vor; so ist es nicht nur kompliziert durch die Struktur der zu besprechenden Gebilde, sondern noch mehr durch die Ähnlichkeit dieser Gebilde im einzelnen mit denjenigen anderer Wirbeltiere, die doch als Teile anderer Gesamtheiten bei scheinbar gleicher Beschaffenheit auch anders zu beurteilen sind. Es ist auch kompliziert, weil es deswegen scheint, als liege hier nichts neues vor und weil doch die Art, wie ich diese Teile dem Organismus des Nervensystems eingliedere, eine völlig andere ist, als wir annehmen, wenn wir den Menschen und seine Gewebe einfach in sie hineindeuten. Ich muss auch bemerken, dass dieses Gebiet mir erst die vorliegenden Resultate hervortreten liess, nachdem ich sonst allseitig orientiert war. Aus der Kenntnis des histologischen Tatbestandes beim Menschen und den Fischen allein, vollends auf Grund monographischen Studiums eines einzelnen Gehirns wäre ich niemals zu dieser abweichenden Auffassung gekommen. Resultate, die darauf beruhen, dass man die Einrichtungen des Fischhirns mit denen des Menschenhirns um jeden Preis in Übereinstimmung bringen will, sind erzwungen. Daher stehen die unsrigen auch mit der übrigen zoologischen Systematik besser in Einklang. Ich pflichte hier vollkommen der Ansicht bei, welche J. B. Johnston in seinem vortrefflichen Sammelreferat ausgesprochen hat.[1]) Und wenn endlich nicht auf den ersten Blick und auf die Ausführungen bei Scymnus allein die Sache einleuchtet,

[1]) Das Gehirn und die Cranialnerven der Anamnier, Erg. Anat. u. Entwicklungsgesch. Bd. XI. 1903.

so sei hier von vornherein auf die späteren Kapitel unserer Gesamtarbeit hingewiesen, welche die mir schon an dieser Stelle zu Gebote stehenden Tatsachen enthalten.

Die Nomenklatur für die Gewebe habe ich einleitungsweise aufgeführt. Sie ist das Endresultat von Untersuchungen, die sich ebensowohl an das Studium der Embryonalentwicklung gebunden haben, wie sie sich über die Phylogenie des Nervengewebes erstrecken. Histophyletische Versuche haben charakteristischerweise stets an den Menschen angeknüpft, ich brauche nur an die hypothetische Phylogenese der Pyramidenzelle von Ramon y Cajal[1]) zu erinnern. Jedermann aber wird jene Phylogenese als eine sehr luftige Hypothese erscheinen. Solche Hypothesen sind auch mehr dazu angetan, die Nichtphylogenetiker in ihrer Meinung von der Beliebigkeit und Willkür der Phylogenie zu bestärken, als sie dazu zu verlocken, den mühevolleren und umständlicheren Weg durch die Phylogenie der Wirbeltiere hindurch, die ihrer Gewebe aufzusuchen. Aufgabe der Histophylie des Nervensystems ist nicht, die menschlichen Zustände als letztes Glied von Entwicklungsreihen erscheinen zu lassen, die deswegen auch künstlich und unfruchtbar sind, weil sie einseitig und daher falsch orientiert sind, sondern ein Bild von der mutmasslichen Entwicklung des Nervengewebes zu entwerfen. Die Zustände bei Säugetieren mögen sich dabei einreihen, wie es die Sache erfordert, nicht aber nach dem Bedürfnis veralteter Verallgemeinerung. Anstatt bereits vollständiger Beweisführungen, die uns ungebührlich aufhalten würden, begnüge ich mich, an dieser Stelle einige Sätze über die Histophylie des Nervengewebes aufzustellen, deren Richtigkeit sich aus dem Verlauf der Untersuchung ergeben wird:

1. Die Epitheliosa ist, onto- und phylogenetisch betrachtet, das Grundgewebe des Nervensystems. Auch wo sie zirkulatorischen Zwecken angepasst ist, geschieht dies nie so, dass sie ihren ursprünglichen Formcharakter aufgibt.

2. Die beiden Gewebearten, die sich aus der Epitheliosa entwickeln: das Stützgewebe (Neuroglia) und das eigentliche Nerven-

[1]) S. Ramon y Cajal, Neue Darstellung vom histologischen Bau des Centralnervensystems. Übers. von Held. Arch. f. Anat. u. Entwicklungsgesch. 1893.

gewebe (Gangliosa) besitzen phylogenetisch verschiedenen Wert. Dies beruht darauf, dass das Gangliengewebe allein die spezifische Funktion des Nervensystems erfüllt und damit auch den Ausbildungsgrad des Stützgewebes bestimmt.

3. Demgemäss ist das Gangliengewebe das progressive, leicht veränderliche, starken Modifikationen ausgesetzte Gewebe, das wir uns nicht nur bei Genus und Spezies, sondern wohl auch individuell variabel zu denken haben.

4. Demgemäss ist aber auch das Stützgewebe das konservative, langsamen Umwandlungen unterworfene Gewebe, welches über weite Abteilungen der Wirbeltiere im wesentlichen gleich bleibt.

5. Für den Nachweis von Übereinstimmung nervöser Strukturen ist daher das Stützgewebe das wichtigste, für den von Abänderungen das Gangliengewebe.

6. Die Teile des gesamten Nervengewebes verhalten sich daher genetisch in umgekehrtem Verhältnis zu ihrer nervös-funktionellen Bedeutung.

7. Dasselbe gilt innerhalb der einzelnen Gewebsformen für die primitiveren und die fortgeschritteneren Grade der Gewebsentwicklung.

8. Die primitiven Formen der Neuroglia sind beständiger und daher für den Nachweis von Übereinstimmung bedeutungsvoller als die ausgebildeteren.

9. Die fortgeschritteneren Formen des Gangliengewebes sind am beweglichsten und daher für den Nachweis von Mannigfaltigkeit am geeignetsten.

10. Daher kommen also die geweblichen Eigenschaften in folgender Succession für die Phylogenie in Betracht:

a) Epitheliosa.

b) Neuroglia nach Massgabe des Ausbildungsgrades.

α) Pilosa.

β) Asteropilosa.

γ) Asterosa.

c) Gangliosa.

α) Masse

α_1) der Achsenzylinder,

β_1) der Zellen.

β) Grad der Schichtung.

γ) Ausbildungsgrad der Einzelzelle.

Dieser Succession, die genau in dem umgekehrten Verhältnis zur physiologischen Dignität steht, werden wir folgen, wenn wir nun die Gewebe des Hirns studieren. Ein Unterschied, der bei der von der Nervenfunktion ausgehenden Betrachtung am meisten ins Gewicht fällt, die Abgrenzung der funktionellen Einheiten, der Nervenorgane gegeneinander, kommt dabei nicht nur aus den oben erwähnten praktischen Gründen, sondern schon theoretisch beinahe in Wegfall. So ist es beispielsweise für die Histophylie vollkommen belanglos, wenn an einer histophyletisch zu beurteilenden Stelle eine Faserbahn vorbeizieht, die aus dem Mittelhirn oder aus einer anderen Hirnregion kaudalwärts gerichtet ist. Massgebend für den Differenzierungsgrad ist nur die Masse der betreffenden Faserbahn. Oder es ist vollkommen gleichgültig, ob die Gangliosa aus Elementen besteht, die Riechfunktionen oder psychische Funktionen verrichten. Phylogenetisch beurteilt sich ihr Differenzierungsgrad in erster Linie nach Masse und Anordnung der Elemente. Oder wo einmal die Stützsubstanz auf der Höhe der Asterosa angelangt ist, wird ganz gleichgültig für die genetisch bedeutungsvollen Teile des Gehirns, ob eine Bildung, wie z. B. die Oliven, vorhanden ist oder nicht. Eine so späte Bildung, resp. Vollkommenheit einer Bildung ändert am Bauplan ebensowenig, wie etwa die Existenz oder Nichtexistenz eines funktionell so hohen Gebildes, wie das Vogelauge am Vertebratencharakter des Vogels. Doch genug der vorläufigen Erklärungen. Wenn nicht die einseitig physiologische Betrachtungsweise den Blick für diese rein zoologische Seite der Frage so vollständig getrübt hätte, wie es tatsächlich bei vielen Arbeitern auf diesem Gebiete der Fall zu sein scheint, hätten wir auch auf diese Erklärungen verzichten können. Dass aber unsere Anschuldigung dem gegenwärtigen Stand der Hirnforschung gegenüber nicht ungerecht ist, dafür liessen sich massenhaft Beweise aus der

Hirnliteratur der neueren Zeit erbringen. Statt aller anderen Tatsachen will ich aber nur eine erwähnen. His[1]) hat die Bezirke des erwachsenen Menschenhirns auf das embryonale Menschenhirn übertragen und von diesem wiederum auf das embryonale Hirn von einem Acanthias. Solchem Verfahren ist von keiner Seite widersprochen worden. Ebenso hat die ganze Polemik um die Phylogenie des Palliums eine falsche physiologische Generalisation zur Grundlage, vom Standpunkt der Naturgeschichte des Gehirns aber überhaupt wenig Sinn. Andererseits enthalten so stattliche und in ihrer Art überaus verdienstvolle Darstellungen wie die des Störgehirns von Johnston kaum eine Andeutung über die Stützsubstanz und vollends nichts über die Decke des dritten Ventrikels, deren prinzipieller Wert doch seit Rabl-Rückhards Deutung des Fischgehirns anerkannt ist.

2. Rückenmark.

Auch bei Scymnus treten am Rückenmark die Wurzeln nicht in demselben Querschnitt aus und zwar sind die ventralen Wurzeln beider Seiten um weniges, etwa $^1/_5$—$^1/_6$ des Abstandes zweier Wurzeln gegeneinander verschoben; auch alternieren die sensiblen Wurzeln unter sich sowohl, als auch mit den ventralen.

In den dem Kopfe genäherten Teilen ist das Rückenmark so beschaffen, dass der Zentralkanal dorsal vom Mittelpunkt des Querschnitts zu liegen kommt.

Die Struktur des Rückenmarks von Scymnus weicht in keiner Hinsicht auffallend ab von derjenigen, wie sie für andere Selachier beschrieben ist. Dennoch sind hier einige Einzelheiten wiederzugeben.

Der Rückenmarksquerschnitt ist, wie bei so vielen Fischen, beinahe drehrund mit leicht dorsoventraler Depression und Verschmälerung in der Hinterhirnzone. An den Hüllen vermisse ich jene eigentümlichen longitudinalen Verdickungen, wie ich sie am Rückenmark von Protopterus beschrieben habe, nicht aber auf manchen Querschnitten eine kleine laterale

[1]) His, Ueber das frontale Ende des Gehirnrohres. Arch. f. Anat. u. Physiol. Anat. Abt. 1893.

Zellgruppe, welche denselben Zellen entspricht, die ich einst bei Protopterus fand und die Kölliker[1]) mit seinen Hoffmannschen Kernen homologisiert. Eine weitere Eigentümlichkeit des Rückenmarks besteht in der Abwesenheit einer Mauthnerschen Faser, die sich von den übrigen Fasern des Vorderstranges abheben würde. Einer sehr starken Ausbildung erfreut sich die Substantia gelatinosa Rolando, die in die Substantia reticularis allmählich übergeht. In ihrer Gesamtheit ist die graue Substanz quantitativ ausserordentlich reduziert im Vergleich zur weissen. Die Elemente fand ich in der von v. Lenhossek[2]) und Retzius[3]) beschriebenen Form vor. Von Scymnus konnte ich keine Silberpräparate herstellen, wohl aber von Scyllium. Unsere Fig. 24 gibt die Hälfte eines Querschnittes mit eingetragener Stützsubstanz wieder.

Wichtiger als eine erneute Detailbeschreibung ist uns die Wertung der übereinstimmenden Befunde der Autoren vom Standpunkt der Phylogenie des Zentral-Nervensystems und zwar zunächst speziell des Selachierrückenmarks. Von vornherein wäre man wohl versucht, anzunehmen, das Rückenmark der Selachier müsse primitiv sein und primitive Zustände enthalten, die es sowohl von dem der übrigen Fische als dem der höheren Vertebraten auszeichnen, und zweitens wird man von ihm erwarten, es enthalte gegenüber dem Gehirn der Selachier selbst in ähnlicher Weise primitive Zustände, wie man ihm sie für die höheren Wirbeltiere im Vergleich zum Gehirn zuschreibt. Diese beiden Schlussfolgerungen, die wohl die meisten Autoren ebenso rasch an dieses Objekt herantreten, wie auch wieder aufgeben liessen, sind völlig irrtümlich. Das Rückenmark der Selachier enthält vielmehr wenig primitive Charaktere, sowohl im Vergleich zum Gehirn der Selachier, als auch im Vergleich zum Rückenmark höherer Vertebraten. Die nachfolgenden Argumente werden dies beweisen. Die Primitivität eines Rückenmarks muss danach beurteilt werden, inwiefern sie mit primitiven embryonalen Zuständen übereinstimmt. Ein spaltförmiger Zentralkanal und eine

[1]) A. v. Kölliker, Ueber den oberfl. Nervenkern im Mark der Vögel und Reptilien. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. LXXII. 1902.

[2]) M. v. Lenhossek, Beiträge zur Histologie des Nervensystems und der Sinnesorgane. Anat. Hefte. Wiesbaden 1894.

[3]) G. Retzius, Biolog. Untersuchungen. N. F. Bd. 1.

aus lauter Pilosazellen bestehende Stützsubstanz, wie sie bei Amphioxus vorkommen, das sind primitive Zustände. Finden wir dagegen weitgehende histologische Differenzierung und mechanisch bedingte Regelmässigkeit der Topographie, verbunden mit starker Entfernung von den histogenetisch primitiven Zuständen, so werden wir sie als spezialisiert betrachten, umso eher, wenn wir rein mechanische Bedingungen dafür in Anspruch nehmen können.

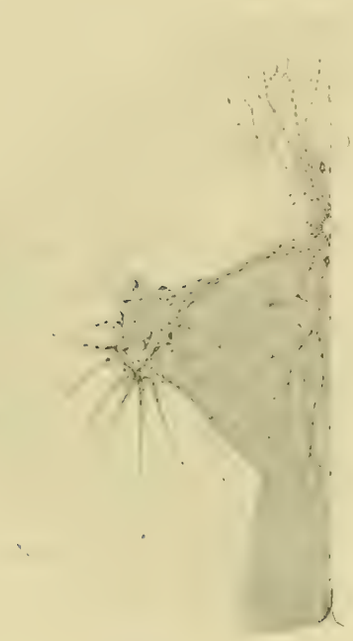


Fig. 23.

Scymnus lichia, Querschnitt durch die linke Seite des Rückenmarks.

Die Achsenzylinder sind nur zum Teil eingetragen, da die Figur wesentlich das Massenverhältnis zwischen grauer und weisser Substanz darstellen soll. 25fach vergr.

In einer Hinsicht ist das Rückenmark der Selachier nicht spezialisiert: es enthält keine äusserlich hervortretenden Anschwellungen im Bereich der Extremitätennerven und keine auffallenden spezifischen Besonderheiten der Struktur. Wenn wir nun auf dem Querschnitt die Bezeichnungen zwischen grauer und weisser Substanz feststellen, so fällt zunächst die Armut an Zellen überhaupt auf im Vergleich zu einem Rückenmark bei höheren Tieren (Fig. 23). Sie erscheint aber nur als sehr relativ, wenn wir dabei berücksichtigen, dass das Rückenmark eines Selachiers im Vergleich zur gesamten Körpermasse viel länger und gleichmässiger verteilt ist. Man hat daher anzunehmen, dass relativ eine ebenso grosse Anzahl von Zellen vorhanden, nur dass sie auf eine längere Strecke verteilt sei. Die Form der grauen Substanz ist nicht die „Schmetterlingsform“. Die ganze Säule bildet vielmehr ein Dreikant mit hohlen Seiten, indem die Hinterhörner einander stark angenähert sind. Diese Form steht mit dem Austritt weder der vorderen, noch der hinteren Wurzeln in Zusammenhang, bei den vorderen schon deswegen nicht, weil sie gar nicht aus der Spitze des Vorderhirns entspringen. Sie hat vielmehr einen anderen Ursprung. Sie entspricht direkt der Druckwirkung, die von den axial verlaufenden Faserbündeln der so überaus mächtigen

weissen Substanz auf die Massen der grauen Substanz ausgeübt wird. Diese füllt gewissermassen nur noch die Orte geringsten Widerstandes zwischen jenen Massen aus. Um sich aber die rein mechanische Wirkung der beiden Massen aufeinander vorzustellen, muss man zwischen den Quantitäten vergleichen. Für den Querschnitt eines menschlichen Rückenmarkes verhält sich die Masse der grauen Substanz zu der der weissen ungefähr wie 5 : 12; für das Rückenmark von Scymnus aber wie 1 : 17. Doch diese Unterschiede der Massen allein würden nicht genügen, eine so bedeutende Präponderanz der weissen Substanz zu rechtfertigen. Es kommt auch die innere Struktur der Massen hinzu. Die graue Substanz nämlich bildet eine relativ weiche und regellose Masse, deren Elemente leicht ausweichen können, wenn Wachtumsprozesse der Umgebung dazu nötigen. Die weisse Substanz dagegen bilden die Markfasern, welche ihrer grossen Mehrzahl nach axial verlaufen und die, eben auch infolge der anderen Verteilung der Zellen über das Rückenmark hin, eine viel kompaktere Massenwirkung ausüben können, als da, wo sie durch zahlreiche und regellos kreuzende Fasern unterbrochen werden, wie im Rückenmark höherer Tiere. Zwischen der Ursprungszelle und der Ausbreitung findet aber zum mindesten, so lange der Organismus wächst, vielleicht auch im erwachsenen Zustand eine gewisse Zugwirkung statt, wie eine solche z. B. in jenem geradlinigen Verlauf der Nerven sich ausdrückt, den His[1]) besonders betont hat. Diese Zugwirkung ist es, die umso stärker sich wird als Druckwirkung geltend machen, je grösser die Zahl parallel verlaufender Nervenfibrillen ist, je nachgiebiger die benachbarte graue Substanz und je mehr endlich auf einem gewissen Stadium des Wachstums eine gleichzeitige Ausbildung der Myelinscheiden stattfinden wird. Das Resultat dieser mechanisch einwirkenden Komponenten ist denn auch die endgültige Verteilung zwischen weisser und grauer Substanz, wie sie im erwachsenen Rückenmark der Selachier und anderer Fische vorliegt. Am deutlichsten aber tritt es hervor, wenn wir nun die Stützsubstanz daraufhin prüfen.

Man beachte, dass Pilosa nur in der dorsalen und ventralen Medianzone auftritt und sogar hier auf ein Minimum reduziert (Fig. 24).

[1]) W. His, Zur Geschichte des Gehirns, sowie die centralen und peripheren Nervenbahnen beim Embryo. Abh. K. sächs. Akad. d. Wiss. Bd. XIV. 1888.

Ausserdem verlaufen Fasern von Pilosazellen genau in der Richtung des Vorderhirns, dagegen sind keine im Gebiet des Vorderstranges und des Seitenstranges zu beobachten. Im Gebiet des Hinterhirns erhebt sich die Neuroglia auf die Stufe von Übergangszellen zwischen Pilosa und Asterosa; echte Asterocyten konnte ich wenigstens nicht finden. Hier ist denn auch der Abstand zwischen Zentralkanal und Membrana limitans externa noch ein weit geringerer als im Vorderhirn, wo er das doppelte erreicht und wo es dann zu reichlicher Entfaltung von Asterocyten kommt. Diese besitzen neben kurzen auch lange Fortsätze, an deren bogenartigem Verlauf vielfach der Einfluss des Wachstums der Faserbahnen sich geltend gemacht hat. Mag es wohl auch gelingen, noch vollständigere Versilberungen zu erhalten, so dürfte doch der Hauptteil des Stützgerüstes innerhalb eines Querschnittes durch diese Elemente bezeichnet sein und die von uns gezogenen Schlussfolgerungen rechtfertigen.

Fig. 24.

Scyllium catulus, Querschnitt durch die linke Hälfte des Rückenmarks. Nur die Elemente der Stützsubstanz sind eingetragen. Silberpräparat. 40fach vergr.

Cc = Canalis centralis,
DL = Dorsolateralzone,
DM = Dorsomedianzone,
VL = Ventrolateralzone,
VM = Ventromedianzone.

Die Zonenbezeichnung gilt für die nachfolgenden Figuren durchgehend und die Erklärung wird dort nicht wiederholt.

Wenn wir nun aber dem Stützgerüst diese hohe physiologische Vollkommenheit zuschreiben müssen, so versteht sich von selbst, dass dadurch kein genetisch primitiver Zustand bezeichnet werden kann. Es besagt aber dieser Zustand gleichzeitig, dass es nicht die Ganglienzellen des Rückenmarks sind, die ihm den Charakter verleihen. Speziell innerhalb der

Selachier sind diese sehr indifferent und unscheinbar. Es sind vielmehr die leitenden Elemente, die Fibrillen, und zwar kommt hierfür deren Funktion gar nicht in Betracht, sondern nur deren Masse und Entstehung. Ihrem mechanischen Einfluss ist wiederum das Stützgerüst unterworfen. Es entfernt sich vom ursprünglichen epithelialen resp. pilösen Zustand nach Massgabe erstens des Dickenwachstums der Nervensubstanz und zweitens der Entfernung von den Membranae limitantes und entsprechender Abänderung im Modus der Stützfunktion. All das geschieht unter verschiedenen Graden von Beibehaltung der ursprünglichen Leitlinien für die Richtung der Stützelemente, senkrecht zu den Membranae limitantes. Vom Standpunkt der Wachstumsphysiologie aus ist also das Rückenmark der Selachier keineswegs primitiv zu nennen. Es enthält keine epitheliösen Abschnitte mehr, pilöse nur in beschränktestem Masse; dagegen macht sich die Asterosa bereits in hohen Formen der Differenzierung und in bemerkenswerter Zahl ihrer Elemente geltend. Damit steht das Rückenmark primitiver Selachier, wie wir an Scymnus und Scyllium ableiten können, nicht auf einer genetisch niederen Stufe, weder im Vergleich zum Rückenmark höherer Tiere, noch im Vergleich zum Gehirn von Scymnus selbst, wie wir jetzt schon vorgreifend bemerken können.

Davon ist jedoch wiederum zu scheiden, was an höheren Differenzierungen von Ganglienzellen unterbleibt. So fehlen, wie schon erwähnt, besondere Mauthnersche Fasern; die Vorderhirnzellen, auch die grössten, halten sich in sehr bescheidenen Dimensionen und sehr generellen Formen, ein besonderes Seitenhirn ist nicht zu erkennen, dagegen Zellen der Clarkeschen Säulen. Im allgemeinen stellen die kleinen und mittleren Ganglienzellen das bei weitem überwiegende Kontingent.

Man vergleiche hiermit auch noch die Angaben, die wir im zweiten Teile über das Rückenmark von Heptanchus deani machen werden, da dort uns ausserordentlich günstiges Material zur Verfügung stand.

3. Zellen.

a) Vorbemerkungen.

Mein Material an Scymnusgehirnen bestand vorwiegend aus Präparaten, die in Müllerscher Flüssigkeit konserviert, mit Karmin-Hämatoxylin oder

Hämalaun gefärbt waren. Doch wollte es der Zufall, dass ich von Überresten eines Scymnusgehirns, die ich dank den grossen Schwierigkeiten, die Selachier sonst der Versilberung entgegensetzten, nur mit wenig Vertrauen in Silbernitrat warf, eine Reihe überaus schöner Silberpräparate erhielt, die besonders die Stützsubstanz deutlicher erkennen liesen, als mir dies bei sorgfältigsten Versuchen und bei Anwendung irgend welcher anderer Hilfsmittel gelang.

Da wenigstens für alle Paläoselachier und wohl für die meisten zugänglichen Neoselachier die Resultate der Imprägnation ähnlich sein werden, stehe ich nicht an, die bisher von anderen Autoren an Silberpräparaten gemachten Beobachtungen ebenfalls hier schon zur Sprache zu bringen und auch diejenigen Resultate, die ich mit dieser Technik im Verlaufe meiner Arbeit bei Spinax Centrophorus, Scyllium und Squatina, erreichte, schon einzuflechten, da die Unterschiede ihrer Struktur im Vergleich zu den Übereinstimmungen mit Scymnus nicht in Betracht kommen, wogegen ich die Beobachtungen über andere Selachier, namentlich auch solche über die Rochen bei diesen selbst vorbringen werde. Zuvor ein Wort über die Literatur.

Als erstmalige Beschreibung von Silberpräparaten des Selachierhirns werden die kurzen Mitteilungen, die Sauerbeck[1]) auf Grund meiner Präparate gemacht hat, zugegeben; warum dies in so unfreundlicher Weise geschehen musste, wie dies von zwei Seiten geschehen ist, während doch der Autor selbst den kasuistischen Charakter seiner Beobachtung mit aller Deutlichkeit hervorhob, ist aus sachlichen Gründen wahrlich nicht zu erklären.

Sauerbeck hat 1896 beschrieben: Ependym (Pilosa) der Medulla oblongata, Ganglienzellen derselben Gegend, Purkinjezellen des Kleinhirns, Pilosa derselben, Pilosa und Asterosa (?) des Mittelhirns, verschiedene Ganglienzellen desselben und des Vorderhirns. (Scyllium, Mustelus, Raja, Trygon.)

Lenhossek 1894 gab die Schilderung der nervösen Elemente des Rückenmarks und der Spinalganglien (Pristiurus), Pilosa und Asterosa des

[1]) E. Sauerbeck, Beiträge zur Kenntnis vom feineren Bau des Selachierhirns. Anat. Anz. Bd. XII. 1896.

Rückenmarks (Raja), Retzius die der Stützsubstanz in erwachsenem und embryonalem Zustand (Acanthias).

Schaper[1]) wandte seine besondere Aufmerksamkeit dem Cerebellum von Mustelus und Galeus zu. Er unterschied: zwei Typen von Purkinjezellen, Nervenzellen vom Golgischen Typus, die Zellen der Molekularschicht, zweierlei der granulären Schicht, Brachypilosa aus der Nähe des Medianschnittes, Makropilosa der Dorsolateralzone, verzweigte Pilosa der Lateralzone, verzweigte Pilosa der Lateralwand des Hinterhirns.

Die ausführlichste Darstellung auf Grund der Silbertechnik gab an Mustelus Houser[2]). Seine wichtigsten Resultate, die über die seiner Vorgänger hinausreichen, sind folgende:

Houser beschrieb zuerst näher die Struktur der nervösen Einzelzellen, die Zellen vom Golgitypus II im Lobus vagi, er bestätigte durch Imprägnation, ohne meine Arbeit über das Kleinhirn der Fische zu kennen, die von mir festgestellte Tatsache, dass Purkinjezellen und die Dorsolateralzone des Kleinhirns auch ihren Elementen nach bis zum Tuberculum acusticum reichen, sodann machte er die ersten näheren Angaben über das Vorkommen von Asterosa. Die Schaperschen Resultate werden fürs Hinterhirn bestätigt, dagegen die beiden Zelltypen der Molekularschicht zu einem einzigen vereinigt, die Zellformen des Mittelhirns noch ausführlicher dargestellt, und auch hier Asterocyten nachgewiesen, Zellen im Zwischenhirn beschrieben, auch in den Lobi inferiores, für das Vorderhirn neben den schon bekannten Ganglienzellen solche vom Cajalschen Typus.

Ich verzichte darauf, einmal alle Faserbahnen, die bereits von den Autoren geschildert sind, und ferner die oben beschriebenen Oberflächenstrukturen, denen wir gleich den Namen ihrer Bahnen beigelegt haben, nochmals auf Schnitten zu beschreiben. Die meisten derselben konnte ich nicht nur auf gefärbten, sondern auch auf Imprägnationspräparaten, bei denen teilweise gerade die Faserbahnen ausgezeichnet gelungen sind, bestätigen. Sodann wäre mir möglich, die Bilder von versilberten Einzel-

[1]) A. Schaper, The finer Structure of the Selachian Cerebellum (Mustelus vulgaris) as shown by Chrom-silver Preparation. Journ. Comp. Neurol. Vol. VIII. 1898.

[2]) Houser, The Neurones and Supporting Elements of the Brain of a Selachian. Journ. Comp. Neurol. Vol. XI. 1901.

zellen, namentlich Nervenzellen wie sie die Autoren abgebildet haben, um vieles zu vermehren. Das wäre für unseren Zweck nur von untergeordnetem Interesse; aber ich bin gern bereit, jedem ausgewiesenen Forscher die in meiner Hand befindlichen Materialien zur Verfügung zu stellen. Es kommt mir vielmehr nur darauf an, Beobachtungen, die über Einzelzellen gemacht sind und die ich alle auf Grund meiner Präparate bestätigen kann, zu erweitern, insbesondere durch die Wiedergabe von Strukturbildern, wie man sie nur bei bestem Grade der Imprägnation gewinnt und sodann auch besonders die Formen der Stützsubstanz, die schwerer nachweisbar sind, in grösserem Zusammenhange darzustellen.

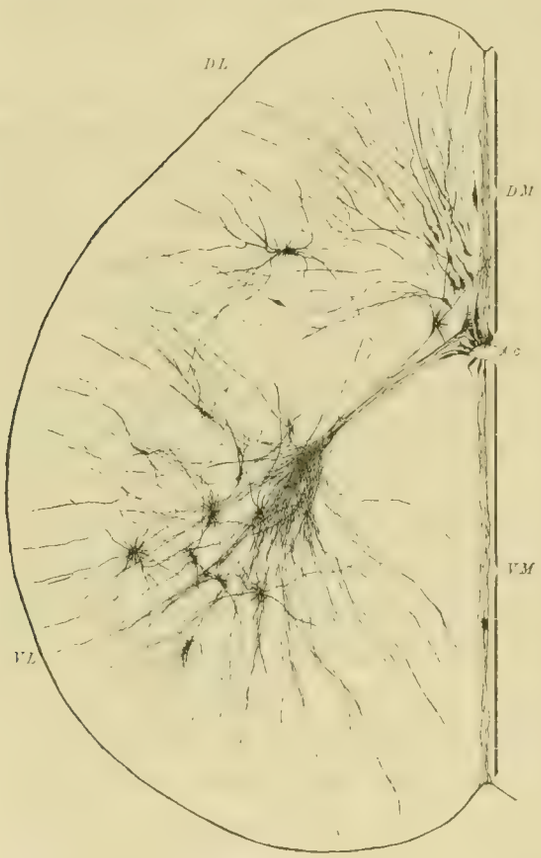


Fig. 24.
Scyllium catulus, Querschnitt durch die linke Hälfte des Rückenmarks.

Die Neurogliosa pflegt bei den Autoren nicht nur wegen ihrer schwierigen Präparation, sondern wegen ihrer untergeordneten Funktion kürzer und mit weniger Teilnahme behandelt zu werden. Für uns steht sie aber aus später wohl einleuchtenden Gründen im Vordergrund des Interesses.

b) Neurogliosa.

Am Rückenmark von Selachiern hat v. Lenhossek die Ganglienzellen ausschliesslich versilbert. Erst Retzius hat uns auch die Stützsubstanz beschrieben und zwar bei Embryonen von Acanthias von 3 cm in geradezu typischer Form die Pilosa auf dem Zustande, wo sie von Brachypilosa in Makropilosa übergeht und noch keine seitlichen Verästelungen besitzt. Die eigentümlichen Varianten in der Ventromedianzone, die Retzius wiedergibt, konnte ich bis jetzt nicht auffinden. Die

schon von v. Lenhossek vermutungsweise als Neuroglia angesprochenen Elemente 25 cm langer Exemplare von Acanthias wies er in grösserer Vollkommenheit nach und verglich sie mit langstrahligen Asterocyten der höheren Vertebraten. An Ependymzellen (Makropilosa) fand er dagegen nur einen geringen Bestand vor, insbesondere „Übergangszellen nach der Neuroglia".

Zur Bestätigung und Ergänzung der Retziusschen Angaben gebe ich die Stützsubstanz des Rückenmarks von Scyllium wieder (Fig. 24). Wohl nur die zwei dorsolateral gelegenen Zellen unseres Bildes dürften Ganglienzellen sein. Alles andere sind verschiedene Stadien des Stützgerüstes. Man beachte hierbei, dass in den Medianzonen die primitivsten Formen der Stützsubstanz in Gestalt von Makropilosa erhalten sind, dass die übrigen Elemente aber in zwei Gruppen zerfallen: in die Hinterhorngruppe mit primitiverem histologischem Charakter, Übergangszellen der Pilosazellen in Asterocyten und in die Vorderhorngruppe, ausgesprochene Langstrahler. Die Richtung aller Fortsätze gibt uns in den Hauptlinien zugleich ein Mass für den Grad der lateralen Wandverdickung des Rückenmarkes durch die längsverlaufenden Faserbahnen. Ja der Grad der Differenzierung unserer Zellen ist geradezu abhängig vom Grad der Verdickung der Wand des Rückenmarkes (Fig. 25).

Fig. 25.
Scymnus lichia, 30 cm. Querschnitt der Oblongata, Stützsubstanz im Trigonum postcalamicum. 40 fach vergr.

Innerhalb der Medulla oblongata ändert dieses Bild der Stützsubstanz wesentlich. Dass die Dorsomedianzone, die Rautendecke epitheliös bleibt, ist genügend bekannt. Auch bei sorgfältigster Beobachtung konnte ich in der Ventromedianzone stets nur Makropilosa und nie einen Astrocyten auffinden. Dagegen enthüllten die Lateralzonen eine Mannigfaltigkeit der Stützsubstanz, die, obschon Houser eine kurze und im ganzen zutreffende Beschreibung gegeben hat, noch nicht genügend dargestellt ist. Unsere Fig. 26 stellt ziemlich genau, ohne anderweitige Eintragungen als aus dem allernächsten Schnitte und unter Weglassung einiger Reste von Ganglien-

zellen im Imprägnationspräparat eines leider kleinen Stückes der Medulla oblongata von Scymnus dar. Der stark mit Silberniederschlag versehene

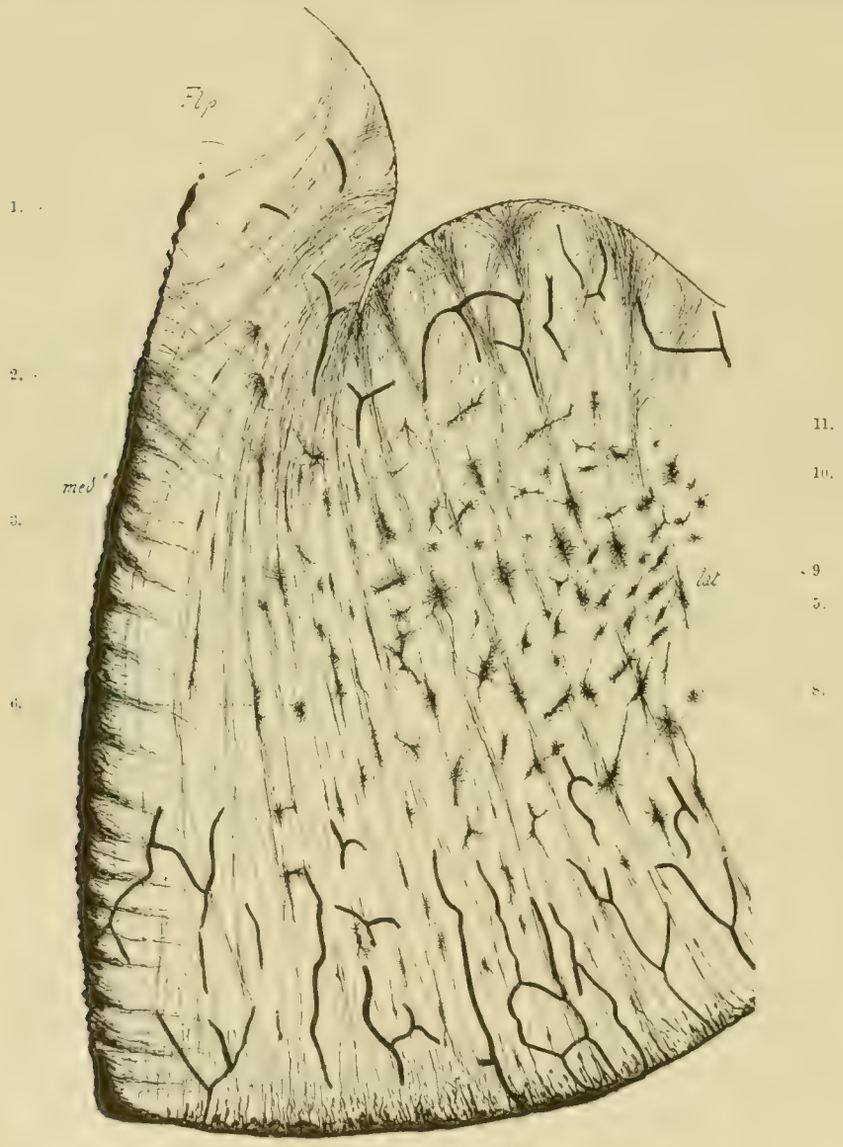


Fig. 26.

Scymnus lichia. Ausschnitt aus der Ventrolateralzone der Oblongata. Silberpräparat. 40fach vergr.

Rand links entspricht nicht genau der Ventromedianzone, sondern einer schräg zu ihr verlaufenden Schnittfläche.

Was nun die einzelnen Elemente betrifft, so enthält dieser Schnitt alle jene Zellformen der Stützsubstanz, die zwischen der makropilösen Substanz und gewissen deutlich asterösen Umbildungsprodukten derselben vorkommen. Wir notieren folgende Typen (Fig. 26, 1—11):

1. Pilosazellen, deren Kerne am Ventrikel liegen, mit einseitig gegen die Limitans externa entwickelten Stützfasern, ohne seitliche Fortsätze (sogenannte Ependymzellen).

2. Pilosazellen, die von der Limitans externa etwas abgerückt sind, im übrigen gleich den vorigen.

3. Pilosazellen die gleich den vorigen, doch bis zur Tiefe der Wandsubstanz eintauchen und doppelseitig unverzweigte Fasern entsenden.

4. Pilosazellen, die bei beidseitiger Entwicklung von Fasern sich mehr der Limitans externa nähern.

Ob alle diese Typen an beiden Limitantes ansetzen oder bloss noch an der einen, lässt sich nicht entscheiden, sie sind sämtlich radiär gestellt.

5. Asteropilosa von deutlich radiärer Stellung, aber mit beginnenden kurzen tangential gerichteten Fortsätzen.

6. Asteropilosa wie vorige, aber mit mehreren radiär verlaufenden Fortsätzen.

7. Primitive Peridymzellen an der Limitans externa mit einer geringen Anzahl von Fortsätzen nach dieser hin, sowie nach der entgegengesetzten Richtung.

8. Asteropilosazellen mit noch vorwiegend pilösem Charakter, aber unter reichlicherer Entfaltung von Tangentialfortsätzen.

9. Asteropilosazellen mit bereits völlig asterösem Charakter unter starker Entfaltung von kurzen Tangentialfortsätzen.

10. Asterosazellen mit wenig entwickelten Radiärfortsätzen.

11. Asterosazellen mit gekrümmtem oder dreiteiligem Leib oder mit vorwiegend tangential entwickelter Längsrichtung.

Sämtliche Asterocyten sind Kurzstrahler.

Was nun die Verteilung dieser verschiedenen Typen im Querschnitt anbelangt, so sind 1.—4. vorwiegend den Membranae limitantes genähert,

in der ganzen Zwischensubstanz nur spärlich vertreten, reichlich dagegen in der Ventromedianzone (vgl. auch Taf. V) und wiederum an den Tänien der Rautengrube, wo sie, wie Färbepräparaten (Fig. 25) zu entnehmen ist, durch Brachypilosa in Epitheliosa übergehen.

5, 6, 8—11 füllen die Gegenden grösster Wandverdickung und zwar so, dass den stärksten gegen den Ventrikel vorspringenden Wülsten der inneren Oberfläche auch die stärkste Differenzierung der Asterosa entspricht, wogegen an den dazwischenliegenden Längsfurchen die niedrigeren Typen angetroffen werden. Die tangential gestellten Asterocyten (Typus 11) verlaufen entsprechend den Fibrae arcuatae und werden in ihrer Form von

Fig. 27.
Scyllium canicula, Medianschnitt des Hinterhirns, Zellen der Brachypilosa. Silberpräparat. 120 fach vergr.

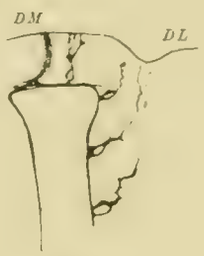


Fig. 28.
Spinax niger, Querschnitt des Hinterhirns im Bereich der Medianzone, Übergang der Brachypilosa (Dorsomedianzone) in Makropilosa (Dorsolateralzone). 60 fach vergr.

diesen und den cerebrospinalen Längsbündeln bestimmt, ohne jeglichen Anklang an ihre Genese. Ergänzt wird dieses Bild durch Taf. V, welche dorsal der Brachypilosa sich nähernde makropilöse Elemente und medioventral die für diese Zone typischen Formen wiedergibt, worunter neben zweierlei Pilosatypen mit nur je einem Radiärfortsatz auch einen solchen mit zwei kürzeren zentral und drei längeren peripher gerichteten Radiärfortsätzen. Dieses Strukturbild der medullaren Stützsubstanz ändert nach dem Hinterhirn, Mittelhirn und Unterhirn nach Massgabe der Dickenverhältnisse der Längszonen, sonst aber in keiner belangreichen Weise (Fig. 27 u. 28). Die Dorsomedianzone geht am Übergang von der Rautendecke bis zum Trochlearis in ausgesprochen brachypilösem Charakter fort,

wie Fig. 27, die von Scyllium stammt, dartut. Die Stelle, wo die Dorsolateralzonen sich median annähern, ist durch eine Bogenlinie bezeichnet; man erkennt daraus, dass diese Bildung an und für sich nicht erhebliche Verdickung der Dorsomedianzone zu bewirken vermag. Die Dorsolateralzone selbst, die sich auf der ganzen Strecke so sehr deutlich abhebt, enthält niemals Asterocyten, sondern nur makropilöse, allmählich aus der brachypilösen der Dorsomedianzone hervorgehende Stützzellen (vgl. auch Schaper, Fig. 19). Erst lateral von dieser Zone beginnen zwischen der Pilosa ventral allmählich in einer völlig mit der Wanddicke zunehmenden

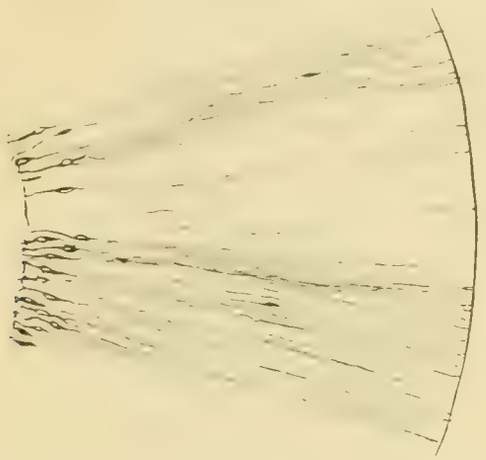


Fig. 29.

Scyllium catulus, Querschnitt des Lobus opticus, makropilöse Stützsubstanz. Silberpräparat. 40fach vergr.

Steigerung die Asterocyten aufzutreten, neben reichlicher Vertretung der Pilosa auch niederster Ordnung (vgl. auch Houser, Fig. 19). Nicht anders verhält sich die laterale Wand des Mittelhirns, wo neben stark entwickelter Pilosa auch in geringem Grade Asterosa vorhanden ist (Fig. 29 u. 30) (vgl. Sauerbeck, Fig. 4). Wie sehr aber der Differenzierungsgrad der Stützsubstanz in den Lateralzonen rein von der absoluten Dicke der Wand abhängt, zeigt die Vergleichung dieser unserer Fig. 29 mit Fig. 30. Obschon Scyllium im ganzen eine höher stehende Form als Scymnus ist, entfaltet diese bei doppelter Wanddicke Asterocyten, während bei dem kleinen Scyllium catulus, dessen Hirn kaum ein Drittel der Länge des Scymnus-

gehirns misst, keine Asterocyten gefunden wurden, dagegen die Pilosa meist noch in jenen Typen, die einem primitiven Entwicklungszustand entspricht.

Von den Lobi inferiores gebe ich ein Übersichtsbild (Fig. 31), welches ebenfalls vorwiegend pilöse Stützsubstanz zeigt, doch fehlen

Fig. 30.

Centrophorus granulosus, Lobus opticus, Laterodorsaler Querschnitt, Stützsubstanz (Piloasterosa). Silberpräparat. 40fach vergr.

Asterocyten nicht gänzlich. Den Übergang von Makropilosa zu Brachypilosa zeigt aus dem Unterhirn von Scyllium Fig. 27. Elemente von brachypilösem, ja beinahe bloss zylindrisch-epitheliösem Charakter finden sich in der Trichterwand (Fig. 33).

Eine besonders eigenartige Differenzierung nimmt die Stützsubstanz im Verlauf der Tectobulbärbahn, insbesondere der Opticuskreuzung an;

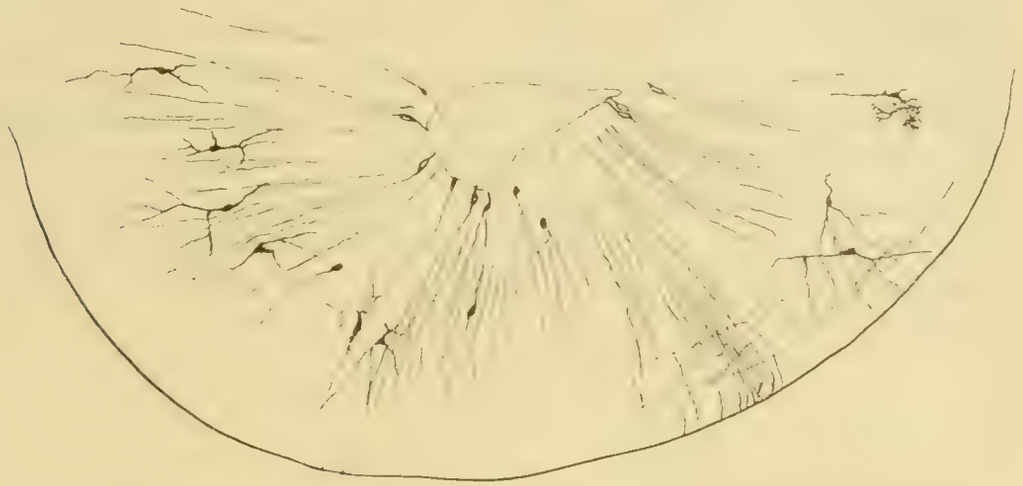


Fig. 31.
Scyllium catulus, Lobus inferior Querschnitt, Stütz- und Ganglienzellen. 40fach vergr.

Fig. 32.
Scyllium catulus, Haubenregion, Längsschnitt,
Stützsubstanz. Silberpräparat. 25fach vergr.

Fig. 33.
Scyllium catulus, Trichterwand, *A* dorsale, *B* ventrale.
Mli = Membrana limitans interna, Stützsubstanz. Silberpräparat. 60fach vergr

auch hier weicht die Form der Stützelemente der Macht des Faserverlaufs. Die Opticuskreuzung ist durchsetzt von Elementen, denen wir, da sie bisher nirgends geschildert sind, etwas näher zu treten haben.

Unsere Figur gibt in einer kleinen Nebenzeichnung ganz schematisch den Situationsplan der beiden Schnitte wieder, aus denen wir nur einige der deutlicheren Elemente eingetragen haben, um das Bild nicht mit den zufälligen Silberniederschlägen sowie den zahlreichen Fragmenten von Stützfasern, die den Verlauf der Opticusfasern allein wiedergeben, zu verwirren. Wir befinden uns also in der Opticuskreuzung und zwar an ihrem kaudalen Teil, sodass gleichzeitig der Recessus postopticus sichtbar ist. Um diesen nun lagern sich Pilosazellen mit jenen sonst für die Müller'schen Fasern, also die Pilosazellen der Retina so charakteristischen hackenartigen Vorsprüngen. Ausserdem primitive Pilosazellen. Dorsal wird aber der Ventrikel

Fig. 34.

Scymnus lichia 30 cm, Mittelhirn, Medianzone, Elemente der Stützsubstanz. 40 fach vergr.

abgeschlossen von sehr charakteristischen Asterocyten, deren einer mit seinen Fortsätzen der Limitans interna direkt anliegt (Fig. 35). Lateral gehen die Pilosazellen in Asterocyten mit relativ wenigen Ausläufern über, man bemerkt aber schon an diesen, wie auch an den übrigen mehr dorsal gelegenen Asterocyten, dass die Ausläufer bestimmte Richtungen einhalten, die teilweise wohl ihrer Entstehungsrichtung nicht mehr entsprechen; am stärksten erscheint die Ablenkung in den Gebieten lebhaftester Kreuzung der Opticusfasern, während dorsal davon die Asterocyten sich wieder mehr dem Typus von gewöhnlichen Kurzstrahlern annähern. Auch über die Verlaufsrichtung der Hauptachse des Zellleibes kann kaum ein Zweifel bestehen, sie ist ebenfalls bedingt durch die Richtung der Faserzüge der Tectobulbärbahn. Dadurch kommen die am meisten ventral gelegenen Zellen beinahe horizontal zu stehen, während sie mehr dorsal sich dem Linienverlauf einordnen, der in unserer Orientierungsfigur ersichtlich ist.

In den verdickten Wandungen des Vorderhirns ist der Fig. 9 von Sauerbeck und der eingehenderen Beschreibung Housers zufolge neben

Fig. 35.

Scymnus lichia, Opticuskreuzung, Querschnitt. Einzelne Asterocyten mit Silber imprägniert, deren Fortsätze in der Richtung der kreuzenden Opticusfasern verlaufen. 60fach vergr.

Makropilosa auch Asterosa vertreten. Besondere Aufmerksamkeit verdient jedoch noch die Olfactoriusregion, von der wir in der Lage sind, einige eigenartige Verhältnisse, freilich vorerst nur für Scyllium, festzustellen (Fig. 36). Die primitive Pilosa ist hier nur durch Pilosazellen vom ersten und zweiten Typus vertreten, entsprechend der Dicke der Wand. Im Bulbus olfactorius selbst jedoch, den wir leider nur teilweise abbilden können, zeigt sich ein neuer Typus von Pilosazellen, dadurch charakterisiert, dass die dem Ventrikel nahe liegende Zelle peripheriewärts mehrfach verzweigte Fortsätze entsendet. Ähnlich eine kleine Gruppe weiter von der Limitans

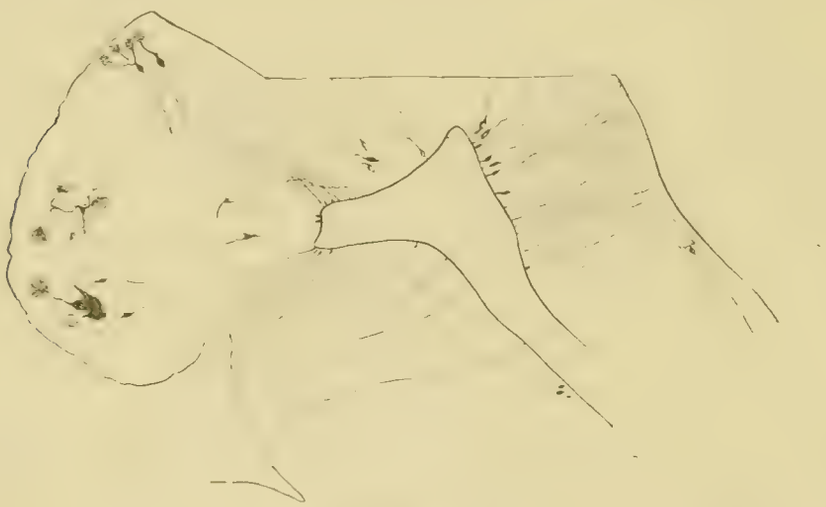


Fig. 36.
Scyllium catulus, Bulbus olfactorius, Horizontalschnitt; Stützsubstanz, Ganglienzellen und Mitralzellen. Silberpräparat. 40fach vergr.

interna abgerückter Stützzellen, von denen nur zwei sich gabeln. Schaper hat etwas ähnliches vom Hinterhirn beschrieben (Fig. 22). Sodann weisen die an der Grenze beider Teile des Bulbus olfactorius gelegenen Fasern der Pilosazellen eine Überschneidung auf, wie wir sie sonst nirgends bemerken. Es kommt diese Struktur dadurch zu stande, dass die Bulbi olfactorii im Laufe der ontogenetischen Entwicklung oft eine leichte Drehung um die Längsachse des Tractus olfactorius vollziehen und dadurch diese Überschneidung der Stützelemente hervorrufen. Endlich sei auf eine Pilosazelle vom dritten Typus und eine gegabelte im Bulbus olfactorius selbst

hingewiesen. Für die übrigen Gegenden des Gehirns konnte ich keine Silberimprägnation darstellen. Doch ist einerseits zu erwägen, dass wohl damit die wichtigsten Formen des Stützgewebes im primitiven Selachiergehirn erschöpft sind und ferner, dass die nunmehr weitgehende Möglichkeit auch aus Färbepräparaten auf die Beschaffenheit der Stützsubstanz zu schliessen, einigen Ersatz schaffen kann und uns wohl nicht mehr zu sehr irre gehen lassen, wenn wir aus ihnen den Entwicklungsgrad der Stützsubstanz beurteilen. Wir haben daher auch bei Darstellung des Medianschnittes bereits diesen Entwicklungsgrad angegeben.

In Taf. V habe ich ein Schema des Medianschnittes und seiner histologischen Differenzierung entworfen. Der Medianschnitt selbst ist eine genauere Wiedergabe des wirklichen Medianschnittbildes Fig. 20. Dagegen beruhen die histologischen Eintragungen auf verschiedenen Quellen aus den Einzelfiguren dieses Kapitels und bedurften mehrfach der Kombination, sodass unsere Abbildung durchaus als Schema zu nehmen ist. Im ganzen dürfte sich die gewebliche Differenzierung des Medianschnittes aber etwa so verhalten wie die Figur zeigt, und ich möchte nur die verschiedenen Grade von Sicherheit, mit der die Eintragungen gemacht sind, angeben, sowie auf die durch die Abbildung erforderten Vereinfachungen im einzelnen hinweisen. Schon die Anzahl der eingetragenen Elemente ist eine sehr beschränkte im Vergleich zu der Anzahl, welche in einem auch ziemlich dünnen Medianschnitte angetroffen werden. Die einzelnen Elemente mussten auch der Deutlichkeit wegen grösser gezeichnet werden als sie in Wirklichkeit wären, verglichen mit dem Massstab des Medianschnittes selbst. Daraus ergab sich auch namentlich für die Stellen des Überganges von Zylinderepithel in Pfeilergewebe insofern eine Vereinfachung, als nicht alle Kernschichten übereinander angedeutet werden konnten, sondern nur deren zwei, namentlich musste die Gegend des Zirbelursprunges und der Zirbelstiel selbst, um nicht unverhältnismässig plump zu erscheinen, auf eine resp. zwei Zellschichten reduziert werden; ebenso die Gegend des Recessus neuroporicus. Dass an diesen Punkten kompliziertere Verhältnisse vorliegen, erhellt aus der speziellen Darstellung dieser Gegenden an einem Embryo von 10 cm, wo, wie Figg. 22 u. 29 zeigen, die definitiven Zustände des nervösen Gewebes bereits in ebenso vollkommener, ja noch in klarerer Form vorliegen, als beim Erwachsenen.

Eine Reihe von geweblichen Zuständen konnte nicht auf Grund von Versilberung festgestellt werden. Da musste die Vergleichung zwischen Silber- und Färbepräparaten herhalten und aus der Färbung auf die mutmassliche Beschaffenheit geschlossen werden, so gut es per analogiam möglich war. Fernerhin liessen sich manche Feststellungen nicht am Scymnusgehirn vornehmen, sondern mussten aus den in Bezug auf den Medianschnitt immerhin Scymnus sehr ähnlichen Formen, wie Scyllium und Spinax ergänzt werden. Dies gilt namentlich für die verdickten Partien des Vorderhirns, die Laminae supraneuroporica und infraneuroporica. Alles in allem dürfte unser Schema auch bei eingehenderer histologischer Untersuchung keine wesentlichen Korrekturen erfahren.

Fig. 37.
Spinax niger, Hinterhirn, Purkinjezelle. 60fach vergr.

c) Gangliosa.

Kürzer als über die Formen der Stützzellen fällt unser Bericht über die Ganglienzellen des Gehirns aus. Einmal wird sich herausstellen, dass die Form ihres Leibes geradezu keinen Zusammenhang mit der Form der Umgebung hat, jedenfalls sich ihr gegenüber anpassen, wie die Abplattung peripher gelegener Zellen, die Richtung der Dendriten in der Medulla oblongata u. s. w. dartun. Für die Architektur des Gehirns kommen daher die Ganglienzellen nur ihrer Masse nach und namentlich der konzentrierten Masse ihrer Axonen nach in Betracht. Es mögen daher nur noch einige Ergänzungen zu den Beobachtungen der früheren Autoren Platz finden (Fig. 37). Fig. 33 gibt eine einer Biegung nahe gelegene Purkinjezelle wieder. Ihrer Lage gemäss sind auch die Dendriten stärker verbreitert. Noch stärker verbreiterte, mit ihren Fortsätzen völlig tangential verlaufende Purkinjezellen, glaube ich gesehen zu haben, bin aber dieser Deutung des

Gesehenen nicht ganz sicher. Ferner verweise ich auf die Zellen sicher gangliöser Natur, die ich im Lobus inferior gefunden habe und die mit anderen Zellen, wie z. B. denen des Vorderhirns übereinstimmen (Fig. 31).

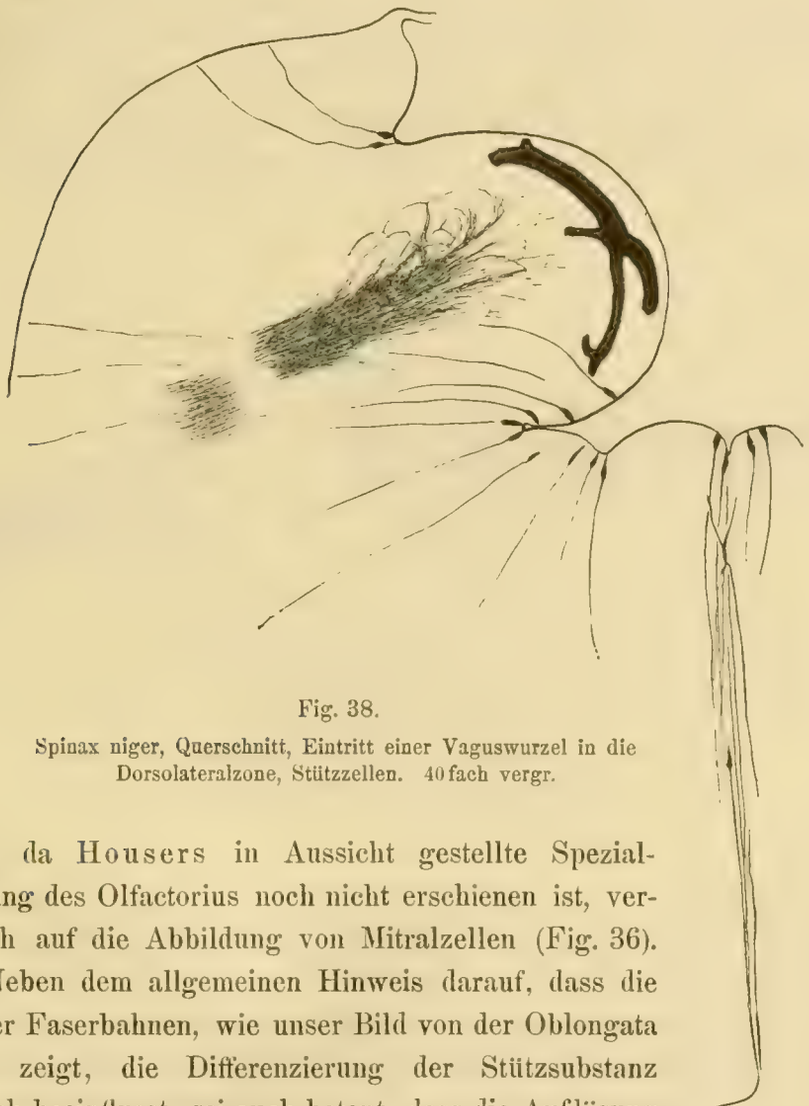


Fig. 38.
Spinax niger, Querschnitt, Eintritt einer Vaguswurzel in die Dorsolateralzone, Stützzellen. 40fach vergr.

Endlich, da Housers in Aussicht gestellte Spezialschilderung des Olfactorius noch nicht erschienen ist, verweise ich auf die Abbildung von Mitralzellen (Fig. 36).

Neben dem allgemeinen Hinweis darauf, dass die Masse der Faserbahnen, wie unser Bild von der Oblongata deutlich zeigt, die Differenzierung der Stützsubstanz wesentlich beeinflusst, sei auch betont, dass die Auflösung der Faserbahnen in Bündel, namentlich in der Dorsolateralzone die Oberfläche, namentlich die innere erheblich modifiziert (Fig. 38). Am deutlichsten geht dies aus einem Längsschnitt hervor, der uns jene fünf, die Protuberanzen der Lobi vagi erzeugenden Faserbündel, sowie den des N. lateralis und des

Glossopharyngeus, sowie endlich als den mächtigsten, den des Acusticofacialis vorführt (Fig. 39). An dieser und an Fig. 38 erkennt man, wie diese Einwucherungen, die von den Ganglien entspringen und fontaineartig gegen die Limitans interna vorstossen, hier sich in Kollateralen gabelnd, ganz erhebliche Wülste der Innenfläche erzeugen und sie gegen den Ventrikel vortreiben, die Lobi vagales. Also kann Verdickung nicht nur der Wand durch Massen längsverlaufende Bahnen hervorgerufen werden, sondern auch durch direkten Druck der einwachsenden Nervenenden.

Fig. 39.

Scyllium catulus, Oblongatawand, lateraler Vertikalschnitt, Einstrahlende sensible Wurzeln des Vagus, Glossopharyngeus, Acusticus in der Dorsolateralzone. 25 fach vergr.

Ac = Eintritt des Acusticus,
Gl = „ „ Glossopharyngeus,
Lat = „ „ Lateralis,
Lob. vag. = Lobi vagales,
Vag = Vagus.

4. Gewebe.

a) Topographie.

An Erörterungen über die Topographie der Querschnitte des Selachierhorns ist kein Mangel. Die weitgehende Übereinstimmung der Autoren in Bezug auf die Faserbahn verbietet daher, auf diese Gebilde im einzelnen wiederum einzugehen. Die Punkte, auf die ich das Schwergewicht lege, und zwar nicht nur, weil ihnen bisher beinahe keine Aufmerksamkeit geschenkt worden ist, sondern weil sie für unsere Auffassung vom Zentral-Nervensystem von Bedeutung sind, sind folgende:

1. Es sind die Beziehungen zwischen den von uns bei makroskopischer Beobachtung festgestellten Bildungen des Gehirns und den Formen des Querschnittes herzustellen.

2. Es kommt darauf an, die Grade geweblicher Differenzierung für die verschiedenen Regionen des Hirns festzustellen, insbesondere das Verhalten der Gangliosa und speziell der Lateralzonen.

3. An den Faserbahnen interessiert ihre Quantität und deren Einwirkung auf das Dickenwachstum des Hirnrohrs.

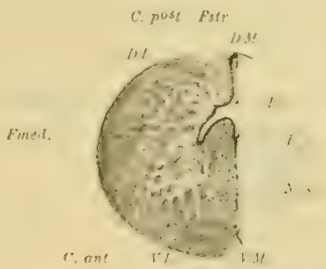


Fig. 40.

Scymnus lichia, Calamus scriptorius, Querschnitt der linken Hälfte. 8fach vergr.

C. ant. = Vorderhorn,
C. post. = Hinterhorn,
Flp = Fasciculus longitudinalis posterior,
Fmed = Fasciculus medianus,
Fstr = Fossa triangularis,
Nps = Nucleus paraseptalis,
Ro = Recessus occipitalis.

Fig. 40

gibt einen Querschnitt durch den Calamus scriptorius wieder. Der Zentralkanal hat sich zum Recessus occipitalis erweitert, dessen im ganzen dreieckiges Lumen Vorwölbungen durch den Fasciculus longitudinalis posterior, den Fasciculus medianus und das Hinterhorn erfährt. Auch die Furche, welche das Trigonum calami seitlich begrenzt, tritt auf dem Querschnitt hervor. Noch sind die Medianzonen minimal ausgebildet, die ventrale als ein asteropilöses Blatt, flankiert vom Nucleus paraseptalis, die dorsale als ein unbedeutender Streif von brachypilösem Charakter. Das gesamte Gangliengewebe ist als G. turbosa zu bezeichnen.

Fig. 41

trifft das verlängerte Mark an einer kritischen Stelle. Die Rautengrube ist mächtig verbreitert und greift unter der Rautendecke ventralwärts um einen mächtig entfalteten Wulst, von halbkreisförmiger Gestalt. Lateroventral spitzt sich der Ventrikel aus und bildet dort, einem kleinen Traktionsdivertikel gleich, einen Recessus, den wir als R. acusticus bezeichnen, da seine Existenz in augenfälligem Zusammenhange mit dem Austritt des N. acusticus steht. Er ist das Ende der Fossa lateroventralis des verlängerten Markes und aus unserer Darstellung der Innenskulptur geht seine topographische Bedeutung hervor, auf die genetische werden wir später zurückzukommen haben.

Fig. 41.

Scymnus lichia, Querschnitt im Bereiche des Acusticusdurchtritts. 8fach vergr.

IV—VI = die drei Wülste der Lateralzone,
Ac = Acusticus,
Fbrae = Fibrae arcuatae externae,
F.lat.dors. = Fossa laterodorsalis,
N. fac. = Nucleus facialis,
N. trig. = Nucleus trigemini,
Lll = Lobus lineae lateralis der Autoren,
Rec. ac. = Recessus acusticus.

Das ganze Gebiet des Fasciculus longitudinalis posterior hat sich im Vergleich zum früheren Querschnitt verbreitert. An seiner lateralen Grenze sind die grossen Zellen des motorischen Facialis eingestreut. An seiner Peripherie kreuzen zahlreiche und tief nach dem Mark vordringende Fibrae arcuatae. Die Seitenstrangbahnen erscheinen durch den Acusticusdurchtritt zerlegt. Medial von diesem liegt ein motorischer Trigeminuskern. Von demselben Charakter turböser und fibröser Gangliosa ist auch noch

der ganze Bezirk bis zur Fossa laterodorsalis. Ventriculär über dieser, peripher aber schon tiefer, nämlich wenig über dem Acusticusdurchtritt, nimmt das Gewebe eine andere Beschaffenheit an. Es sondert sich nämlich oberflächlich eine Rinde von medullöser Beschaffenheit ab, nur mit spärlichen Kernen durchsetzt, die in der sonst fast homogenen filzigen Substanz nur Streifen, die von der Neuroglia herrühren, erkennen lässt. Dieser Substantia medullosa (Crista cerebelli) entspricht in unserem Bild der Oberflächenskulptur jener als *c* bezeichneter Längswulst. Medial von ihr liegen wohl noch spärliche Faserbündel, dorsal dagegen den Hauptteil des oben genannten Wulstes (*d*) bildend, nidöse Gangliosa, sensible Zentralstationen der Hirnnerven, sei es nun, dass man sie mit den Autoren als Lobus lineae lateralis bezeichnen kann, oder dass sie mehr oral gelegenen sensiblen Nerven entsprechen.

Besonderer Beachtung ist dabei nur wert, dass, während also der Grundstock der Oblongata den turbösen Gewebscharakter des Rückenmarks unter Zunahme der Masse namentlich von Fibrillen behält, im Bereich der Dorsolateralzone es zu einer weitgehenden Differenzierung kommt, die sich sowohl in der Massenzunahme der Substanz, als auch in der Zerlegung derselben in eine periphere, exklusiv medullöse und eine ventrikuläre, ebenso exklusiv nidös-zelluläre kundgibt.

Fig. 42

zeigt ein relativ wenig verändertes Bild im Vergleich zu Fig. 37. Lateral von der Ventromedianzone tritt ein auf dem Querschnitt nierenförmiges Feld von medullöser Struktur auf, das oralwärts zunimmt und alsdann zur Pars interpeduncularis wird. Nun treten ferner an der Grenze der Substantia medullaris der Dorsolateralzone und den Seitensträngen flache grosse Ganglienzellen auf, welche den Anfang jenes ganzen Zelllagers bilden, das von hier bis zum Trochlearis einen zusammenhängenden Verlauf nimmt. Es sind die ersten Purkinjezellen und da neben ihnen anders geartete ventrolateral liegende grosse Ganglienzellen des Trigeminuskerns existieren und auch ferner die, wenn auch lockere Zellsäule des Vorderhorns noch weiter fortsetzt, so scheint mir am richtigsten sein, das ganze Stratum der Purkinjezellen

als ein mächtig verbreitertes Seitenhorn zu deuten. Die Purkinjezellen sind übrigens die am schärfsten stratös angeordneten Elemente der Gangliosa. Dorsal von ihnen wölbt sich als Fortsetzung von Wulst *d* die Rautenlippe, histologisch im Zustand von Nidosa. Ein medialer Schenkel derselben wird ebenfalls durch unseren Querschnitt getroffen. Ausserdem die hintere Kuppe des Hinterhirns. Diese mit der charakteristischen brachypilösen Struktur

Fig. 42.

Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich des Trigeminusaustritts. 8fach vergr.

Ar = Auricula rhombencephali,
Fba = Fibrae arcuatae,
N. trig. = Nucleus trigemini,
Pip = Pars interpeduncularis,
Pz = Purkinjezellen,
Pptcs = Pars posterior tractus cerebello-spinalis.

der Medianzone, wogegen die Lateralzonen, ausschliesslich dorsale, den schon in der Oblongata angenommenen Charakter beibehalten mit Einflechtung von Fasern des Tractus cerebello-spinalis dorsalis und zwar seiner Pars posterior.

Fig. 43.

Die Ventromedianzone nimmt ab und ist im Begriff, in Pilosa überzugehen. Die Pars interpeduncularis hat sich verbreitert. Die Ventrolateralzone

zeigt einen erheblichen Rückgang ihrer Masse, beharrt aber auf dem Charakter, den sie in der Medulla oblongata gehabt hat. Im Vergleich zu ihr ist eine mächtige Verbreiterung der Grenzschicht zwischen Ventrolateralzone und Dorsolateralzone erfolgt. Die Substantia medullosa und die Purkinjezellen bilden den Überzug der oberen Hirnhälfte; die mächtigen Fasermassen des Tractus cerebello-spinalis den starken Unterbau. Die nidös gebaute Dorsolateralzone selbst hat ihr Volumen beibehalten, ist aber in die Tiefe

Fig. 43.

Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich der kaudalen Hälfte des Hinterhirns. 8fach vergr.

Ar = Auricula rhombencephali, *Pz* = Purkinjezellen,
N. trig. = Nucleus trigemini, *Slm* = Sulcus lateralis mesencephali,
Pip = Pars interpeduncularis, *Tcblsp* = Tractus cerebello-spinalis.

gedrängt, während die Dorsomedianzone ihren brachypilösen Charakter beibehalten hat. Der Wachstumsprozess also, der von der Dorsolateralzone ausging, hat ein Auswachsen des ganzen, dem Seitenhorn entsprechenden Gebietes zur Folge gehabt. Dorso- und Ventrolateralzone greifen in diesem Querschnitte daher in der Weise übereinander, dass diese die ventrikulären, jene die peripheren Partien bildet. Doch würde sich vielleicht empfehlen,

das ganze Seitenhorn als eine besondere Zone für den Verlauf durch dieses Gebiet abzutrennen, wenn nicht der motorische Charakter seiner Elemente es der Ventrolateralzone zuweisen würde.

Fig. 44.

Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich der rostralen Hälfte des Hinterhirns, ventral davon der kaudale Teil des Mittelhirns und in verkürztem Abstande der Lobus posterior der Hypophyse. 8fach vergr.
Pdlp = Pedunculus lobi posterioris.

Fig. 44

trifft die vordere Hälfte des Hinterhirns mit etwas ergiebigerer Ausbildung des schon an der kaudalen Kuppe erwähnten Struktur. Ventral davon ist das Mittelhirn getroffen, vom Sulcus lateralis mesencephali deutlich in einen hier schwächeren Lobus opticus und den thalamo-tecto-spinalen Anteil zerlegt. Kumulöse Anordnung der Gangliosa verrät die starken Zugwirkungen der Tectobulbärbahnen am Sulcus lateralis, die wohl vorwiegend als eine starke Modifikation der Dorsolateralzone zu betrachten ist, wenn auch die Dachkernzellen bis in sie hinaufgeschoben sind, die ja motorisch sind.

Ventral, auf unserer Figur dem Mittelhirn zu stark genähert, erscheint der Lobus posterior der Hypophyse und der zu ihm gehörige Querschnitt seines Stiels.

Fig. 45

trifft das Mittelhirn so, dass sowohl die Lobi optici wie das Tuberculum laterale mesencephali mit dem ihm eigentümlichen oberflächlichen kumulösen Nervenkern deutlich sichtbar sind. Medial liegt der Oculomotoriuskern vertreten durch einige grosse Ganglienzellen. Turböse und kumulöse Ansammlungen von Ganglienzellen durch den ganzen Querschnitt hin sind wohl sensiblen Charakters und nur der Dachkern ist trotz seiner dorsomedialen Lage motorisch. Ventral vom Hauptquerschnitt liegt der Querschnitt des Torus interpeduncularis, der

Längsschnitt des Tractus sacci vasculosi und der Saccus selbst. Der Torus zeigt nidöse Gangliosa, die sich ventrikulär bandartig hinzieht; an den Stellen grösster Verdickung wird jedesmal ein abgeschnittener kleiner Tractus beobachtet. Ventral wird die Trichterhöhle von einer Wand begrenzt, die

Fig. 45.

Scymnus lichia, Querschnitt auf der Höhe des Mittelhirns, ventral davon Saccus vasculosus und Hypophyse. 8fach vergr.

Lmh = Lobus medianus hypophyseos,
Nocm = Nervus oculomotorius,
N. trig. tect. = Nucleus trigemini tectalis,
Tip = Torus interpeduncularis,
Tlm = Tractus lateralis mesencephali,
Trsv = Tractus sacci vasculosi.

sich über die des Saccus vasculosus etwas erhebt, aber dennoch nur brachypilös bleibt. Dann folgt median der Lobus medianus der Hypophyse mit weitem, vielfach gefaltetem Lumen an der Basis. Lateral liegt das Schlauchwerk der Hypophysendrüse, woran nicht zu unterscheiden ist, welche Teile dem Boden des Unterhirns und welche der Rathkeschen Tasche angehören.

Fig. 46.

Scymnus lichia, Querschnitt durch eine kleine Partie des Saccus vasculosus. 140 fach vergr.

Gz = Ganglienzellen des Saccus-vasculosuskerns,
Piz = Pilosazellen,
Tsv = Tractus sacci vasculosi,
Vsv = Venen des Saccus vasculosus.

Fig. 46.

Über die spezielle Konfiguration der Wand des Saccus vasculosus orientiert Fig. 46. Hier stehen, mit kugelartigem Fortsatz dem Ventrikel zugewandt, die Zellen, die als etwas gestreckte Brachypilosa zu deuten sind. Dahinter zahlreiche kleine und eine bis zwei Lagen grosskerniger Ganglienzellen und oberflächliche Gefässe von weitem Lumen, zwischen denen wiederum die Faserbüschel des Tractus sacci vasculosi durchtreten.

Fig. 47.

Scymnus lichia, Querschnitt durch den oralen Teil des Mittelhirns und den Lobus inferior, ventral davon der Lobus anterior der Hypophyse. 8 fach vergr.

Trtb = Tractus tectobulbaris.

Fig. 47.

Wie auf voriger Figur ist die Dorsomedianzone eine schmale makropilöse Platte, dorsal von welcher die beiden Lobi noch einander dicht anliegen. In diesen selbst verlaufen radiär die Fasern der Tectobulbärbahn, zwischen denen ebenfalls radiär Cumuli von kleinen Zellen liegen. Ähnlich beschaffen ist das Tuberculum laterale mesencephali, das durch eine breite Furche vom Lobus inferior abgetrennt ist. In diesem verläuft parallel dem Ventrikel ein Stratum von relativ kleinen motorischen Zellen. Ventral von der immer noch brachypilösen Trichterwand liegen die Lumina des verzweigten Lobus anterior der Hypophyse.

Fig. 48.

In dieser Figur erreicht der Hirnquerschnitt das Minimum seiner Masse. Ventral erkennt man den rundlichen Querschnitt des Opticus, in

den, abgesehen von turbös angeordneten Kernen der Asterosa, wie sie im einzelnen in Fig. 31 dargestellt sind, auch noch relativ grosse Ganglienzellen vorkommen (*N. opt.*). Es ist dies die letzte Gruppe solcher Zellen, die offenbar mit Fibrae basales in Zusammenhang stehen. Der Opticusaustritt ist nur angeschnitten, daher sein geringer Zusammenhang mit der Hirnwand, gegen die ein spitzer Recessus, offenbar der Überrest des Augenblasenstiels, vordringt. Die Seitenwand, von der sich dorsal noch eine wulstige Lippe abhebt, ententhält kumulös angeordnete Elemente, die Lippe turböse allein. Dann folgt der postvelare Abschnitt, ein Querschnitt des Velum selbst und der prävelare median.

Fig. 48.
Scymnus lichia, Querschnitt vom vorderen Rande des Opticusaustritts. 8fach vergr.

Fig. 49.
Scymnus lichia, Querschnitt durch das linke Vorderhirn im Bereich des Recessus neuroporicus. 8fach vergr.

Fig. 50.
Scymnus lichia, Querschnitt durch das linke Vorderhirn im Bereich des Tuberculum olfactorium. 8fach vergr.

Fig. 49—52.

Fig. 49 trifft das Vorderhirn in seiner grössten Massenentfaltung zugleich median unmittelbar vor dem Recessus neuroporicus, dessen Stelle

durch ein kleines Lumen des Präcerebralraumes bezeichnet ist (*Sam*). Im ganzen ist die Anordnung der Ganglienzellen eine turböse, nur ventrolateral kommt es unter grösserer Volumentfaltung der Elemente, wie solche auch dorsal angebahnt ist, zu Stratifikation. Die dorsale und ventrale Wölbung des

Fig. 51.
Scymnus lichia, Horizontalschnitt durch die gesamte Regio olfactoria.
8fach vergr.

Querschnitts entsprechen dem Tuberculum dorsale und dem ventrale anterius. Erst auf Fig. 50 tritt das Tuberculum laterale (olfactorium) auf. Dorsal beherbergt es einen Cumulus kleiner Ganglienzellen untermischt mit wenigen grossen. Ventral beginnt in ihm eine lockere Schicht von ebenfalls mittelgrossen Ganglienzellen.

Noch besser als weitere Querschnitte orientieren über die Topographie des Vorderhirns Horizontalschnitte (Fig. 51 u. 52). Aus ihnen geht hervor, dass die zur Stratifikation neigenden oberflächlichen Zellgruppen sich zu-

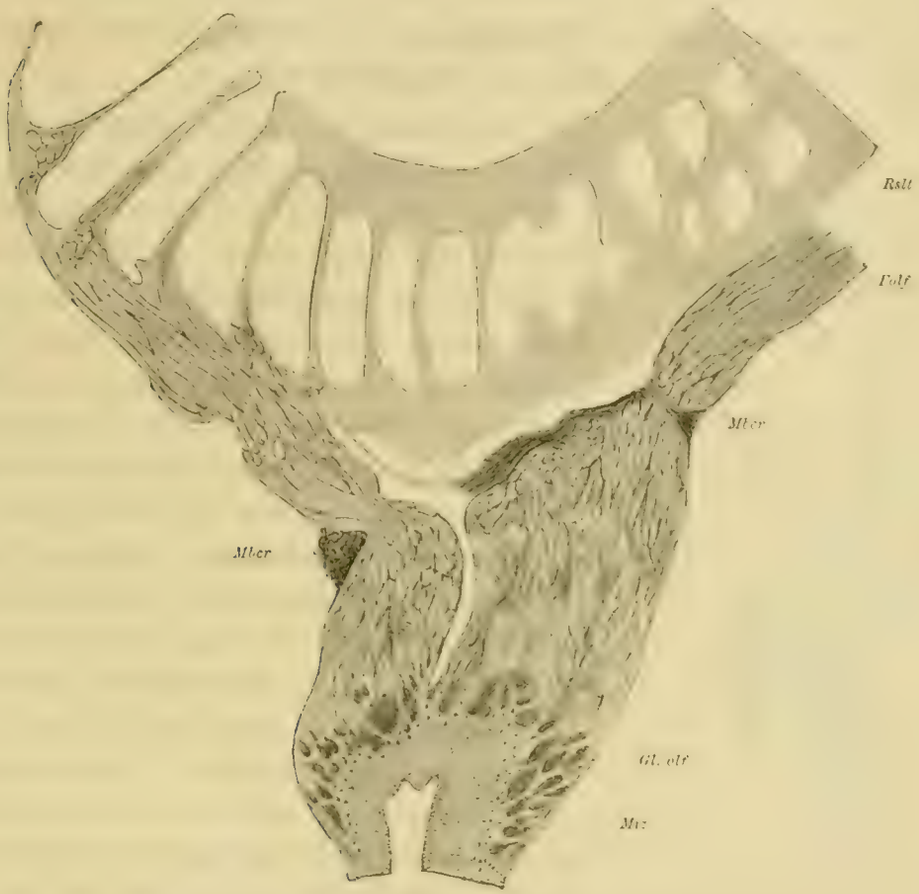


Fig. 52.

Scymnus lichia, Horizontalschnitt durch den Bulbus olfactorius, die Fila olfactoria und die Riechschleimhaut. 8fach vergr.

Folf = Fila olfactoria,
Gl. olf = Glomeruli olfactorii,
Mbcr = Membrana cribrosa,
Miz = Mitralzellen,
Rslt = Riechschleimhaut.

gleich mit der Abnahme der gesamten Masse nach dem Tractus olfactorius hin ausspitzen. Vor dem Tractus ist die Gangliosa kumulös und enthält als ein lockeres Stratum die Mitralzellen. Die Glomeruli besetzen die

Oberfläche in der bekannten Weise. Besonders deutlich bringt Fig. 48 die Zweiteilung der Fila olfactoria zum Ausdruck, die sich in dem System der Riechschleimhaut verlieren.

b) Gegenseitige Beziehungen der Gewebe unter sich und zur Gesamtform.

Fig. 53.
Scymnus lichia, erwachsen.
Verbreitung der hauptsächlichsten Modifikationen der Gewebe am Hirn. Schematisch.

Überblicken wir nochmals an Hand eines Übersichtsbildes die verschiedenen Differenzierungsgrade der Gangliosa im Zentral-Nervensystem, so stellt sich heraus, dass der grösste Teil der Hirnmasse aus gemischter Substanz besteht (S. mixta) und zwar in erster Linie aus einem diffusen Gemisch von S. fibrosa, medullosa und cellulosa. Eine scharfe Differenzierung von Fibrosa findet sich nur entlang den grossen Bahnen, der spino-cerebellaren, spino-tectalen und tectobulbären. Wo die Faserbahnen zurücktreten, bleibt ein Gemisch von Zellen und Marksubstanz, wobei schwer zu sagen ist, in welchem Umfange letztere besonders differenziert ist, mit Ausnahme der sogenannten Cerebellarleiste, wo sie als selbständig differenzierte Oberflächenschicht hervortritt. Ausschliessliche Cellulosa kommt, abgesehen von den Medianzonen, nirgends in der ganzen Dicke des Nervenrohres zur Ausbildung, sie bleibt stets nur tiefe Schicht und ist als solche auf wenige Gegenden beschränkt. In nidöser Form und stärkster Massenentfaltung bildet sie die Dorsolateralzone von der Oblongata bis zum Trochlearis, also in derselben Gegend, in der auch die Medullosa als selbständige Differenzierung auftritt. Schon Johnston hat auf diesen Parallelismus hingewiesen, spärlichere nidöse Ansammlungen finden sich

überall in Begleitung von brachypilöser Stützsubstanz, so an der Commissura posterior, in der Zirbel, am Recessus neuroporicus, praeopticus, postopticus, am Trichter im Torus des Saccus vasculosus und in diesem selbst, wo ausnahmsweise sogar grosse Ganglienzellen daran teilnehmen. Von Stratosa ist am Selachierhirn nur bedingt zu reden. Strata mittlerer oder grosser Ganglienzellen sind sehr locker, entsprechend auch der geringen Geschlossenheit der Faserzüge. Am deutlichsten stratifiziert sind die Purkinjezellen, der Dachkern des Mittelhirns kann auch etwa noch als Stratum aufgefasst werden. Dagegen sind nur sehr lockere Strata die der Lobi inferiores, des Vorderhirns und an ihm die Mitralzellen der Bulbi olfactorii. Die Medianzonen, sofern sie Gangliosa enthalten, lehnen sich überall den Lateralzonen im Differenzierungsgrad an. Der Masse nach blieben sie mit Ausnahme der Opticusgegend stets hinter den Lateralzonen zurück. Nur der Dachkern repräsentiert ausserdem eine Bildung von höherer geweblicher Differenzierung, die aber dadurch aufgewogen wird, dass die Masse der Dorsomedianzone des Mittelhirns bedeutend hinter der der Lateralzonen zurückbleibt.

Insgesamt fällt also der höchste Grad der Differenzierung, den das gangliöse Gewebe im primitiven Selachierhirn erreicht, auf die Region des Hinterhirns und auf ihre Fortsetzung in die Oblongata; indem hier die verschiedenen Substanzen differenziert auftreten, die celluläre speziell nidös und stratös. Wollen wir auch den Reichtum an cellulären Elementen in Anschlag bringen, so entfällt er ebenfalls auf diese Gegend. Demnach müssen wir ihr auch funktionell eine maximale Bedeutung für die Selachier zuerkennen und gleichzeitig in ihrer äusseren Form eine spezifisch selachische Bildung suchen, umso mehr, da ihr funktioneller Zusammenhang mit den eigentümlichen Organen des Hautsinnessystems klar zu Tage liegt.

In zweiter Linie kommt ein anderer Komplex von Differenzierungen in Betracht, nämlich die optischen Gegenden, unter denen speziell die Dorsomedianzone des Mittelhirns, die Opticuskreuzung und — wie dem beizufügen ist — auch die Retina. Die gewebliche Struktur der letzteren erhält dadurch einen ganz besonders eigenartigen Charakter, dass die Stützsubstanz brachypilös bleibt, die Ganglienzellen aber sowohl das höchste Mass von Differenzierung der Einzelelemente, wie auch die

weitergehende Stratifikation erfährt. Demgegenüber ist bei der grossen Entfaltung der Riechschleimhaut fast zu verwundern, dass die entsprechenden Zentren relativ so wenig hohe Differenzierung zeigen. Es mag dies damit zusammenhängen, dass der fibröse Anteil des olfactorischen Apparates ganz ausserhalb des Hirns selbst fällt und dass ausserdem eine beträchtliche Massenentfaltung des Vorderhirns einer ebensolchen der Riechschleimhaut entspricht. Auch darin möchte ich ein sekundäres und eigenartiges Merkmal der Selachier erblicken. Denn wir dürfen uns nicht von unserer allgemeinen Anschauung, sie seien in allen Dingen primitiv, zu falschen Verallgemeinerungen hinreissen lassen.

Aus einer Vergleichung des Differenzierungsgrades der Neuroglia und der Gangliosa ergibt sich, dass die maximale Differenzierung innerhalb jeder einzelnen Gewebe nicht in dieselben Regionen zusammenfällt, dass vielmehr für die Entfaltung eines jeden derselben die Höhe seiner Funktion allein entscheidet, ausserdem aber augenscheinlich noch ausserhalb ihrer Funktion gelegene Faktoren, wohl in erster Linie solche der Mechanik der Kopfbildung, des Zuges und Druckes und der Oberflächenspannung am Gehirn selbst und wenn auch nicht am erwachsenen, so doch am embryonalen Hirn.

Es war His, welcher zuerst die mechanischen Ansprüche der wachsenden Nervensubstanz für die geometrische Anordnung der Stützsubstanz verantwortlich gemacht hat. Diese seine schon früh entwickelte Ansicht hat er auch später durch erneute Beobachtungen gefestigt. Das erwachsene Nervensystem höherer Tiere aber, von denen her seine Anschauungen ja stets begründet wurden, bot keine genügenden Anhaltspunkte, um auch dem Stützgerüst des ausgewachsenen Tieres eine so stark mechanische Betrachtung angedeihen zu lassen wie dem Embryo. Hierfür eignen sich nun niedere Tiere, wie die vorliegende Form weit besser und ich möchte daher die Resultate für die Mechanik des Stützgerüstes, wie sie sich aus den vorangehenden Angaben und unseren Bildern ergeben, dahin resumieren:

1. Der in erster Linie die Formen der Stützsubstanz beherrschende Faktor ist die Masse, nicht die Qualität der Gangliensubstanz.

2. Unter ihrem Einfluss modifizieren sich die ursprünglich epithelialen Elemente und nehmen je nach dem Grade der Substanzzunahme und deren Richtung auch spezielle Modifikationen an.

3. Eine solche ist die primitivste Form, die Pilosa, welche einem geringen Grade der Substanzverdickung entspricht. Im Gegensatz zu der Stützsubstanz höherer Wirbeltiere wird sie auch, abgesehen von der Opticuskreuzung, überall beibehalten, wo neben ihr Asterosa auftritt.

4. Dass jedoch nicht nur Massenverdickung die Bedingung für höhere Differenzierung der Gewebe sein kann, beweist das Vorkommen von Asterosa am Chiasma opticum, dessen Substanzverdickung nicht so bedeutend ist, um diese Wirkung zu erzielen. Demnach muss es auch Zug und Druck der Gewebe sein, der hier modifizierend eingreift, wie sich auch aus der in der Richtung der Opticusfasern verlaufenden Fortsätze der Asterocyten dieser Gegend schliesen lässt.

5. Dann tritt noch die Mechanik der Kopfbildung als eingreifendes Moment auf den Plan. Die Eigenart der Pilosa im Bulbus olfactorius und noch mehr die erst später zu beschreibenden (s. Hexanchus) Pilosa im Tractus olfactorius, wo er dünnwandig wird, beweist den Einfluss dieses dritten mechanischen Faktors, der bei der Anordnung der Stützsubstanz mitspielt.

Aus den dargestellten Verhältnissen ergeben sich auch die von uns eingangs aufgestellten allgemeinen Sätze (S. 359—361), die auch noch im späteren Verlauf der Arbeit ihre Bestätigung erfahren werden.

Auf Tafel IV sind in die Umrisse des Gehirns in dorsaler und lateraler Ansicht die verschiedenen Differenzierungsgrade der Stützsubstanz zusammengetragen, damit man sich ein einheitliches Bild vom Prozess der Differenzierung und dessen Zusammenhang mit dem allgemeinen Bau des Hirns machen könne. Mit voller Evidenz erweisen sich als primitiv die Medianzonen, die mit einziger Ausnahme der Opticuskreuzung hinter der

Übersicht der Gewebsformen des erwachsenen Hirns von Scymnus.

Medianzonen				
dorsale Medianzone	Recessus neuroporicus Brachypilosa agangliosa.			ventrale Medianzone
	Lateralzonen			
	dorsale Lateralzone		ventrale Lateralzone	
Lamina supraneuroporica *Asteropilosa turbosa.*	Bulbus olfactorius *Asteropilosa stratosa Mg.*			Lamina infraneuroporica *Asteropilosa turbosa.*
Paraphysis *Epitheliosa cylindrica.*	Tractus olfactorius *Pilosa stratosa et turbosa.*			Recessus praeopticus *Pilosa nidosa.*
Pars praevelaris + Lamina ant.vel. *Epitheliosa cylindrica.*	Telencephalon *Asteropilosa et turbosa.*		Basis telencephali *Asteropilosa stratosa.*	
Pars postvelaris + Lamina post.vel. *Epitheliosa cubica.*	Diencephalon *Asteropilosa turbosa.*		Opticus *Asterosa turbosa.*	Chiasma opticum *Asterosa turbosa Mg.*
Commissura superior *Pilosa cumulosa.*		Retina *Pilosa stratosa Mg.*		Recessus postopticus *Pilosa nidosa.*
Epiphysis *Brachypilosa nidosa.*			Lobi inferiores *Asteropilosa stratosa.*	Infundibulum *Pilosa nidosa.*
Commissura posterior *Brachypilosa nidosa.*	Lobi optici *Asteropilosa turbosa.*		Basis mesencephali *Asteropilosa turbosa Mg.*	Hypophysis *Epitheliosa cylindrosa.*
Tectum mesencephali. *Asteropilosa nidosa Mg.*			Epencephalon *Asteropilosa stratosa Mg.*	Saccus vasculosus *Pilosa nidosa Mg.*
Tectum cerebelli *Brachypilosa fibrosa.*	Torus cerebellaris epencephali *Asteropilosa nidosa.*			Basis mesencephali *Pilosa fibrosa.*
Tectum rhombencephali *Epitheliosa cubica.*	Torus cerebellaris rhombencephali *Asteropilosa nidosa.*		Basis rhombencephali *Asteropilosa turbosa Mg.*	Basis rhombencephali *Asteropilosa fibrosa.*
Calamus scriptorius *Pilosa nidosa.*				
Cuneus dorsalis med. spin. *Asteropilosa fibrosa.*	Cornu posterius med. spin. *Asteropilosa turbosa Mg.*		Corum anterius med. spin. *Asteropilosa turbosa Mg.*	Cuneus ventralis med. spin. *Asteropilosa fibrosa.*

In dieser Tabelle sind die Hirnabschnitte nach ihrer Verteilung in den Zonen eingetragen (vgl. dazu Fig. 53, Taf. IV u. Taf. V). Für die Gangliosa ist jedesmal nur die höchste Differenzierungsstufe angegeben und die anderen, im einzelnen bei der Topographie ausgeführten weggelassen. Für die grosszelligen Gangliosaformen ist die Abkürzung Mg beigefügt.

Lateralzone zurückbleiben. Und zwar sind am primitivsten die Decke des dritten und vierten Ventrikels, ferner die Hypophyse und die Augenblase.

Am stärksten differenziert ist ausser der Opticusgegend das Rückenmark. Für die Piloasterosa wurden zwei Farbentöne gewählt, um die Stellen stärkerer Verdickung und reichlicherer Entfaltung von Asterocyten zu charakterisieren. Die Hypophyse wurde ebenfalls, wenn auch nur in Umrissen eingetragen, da sie wohl funktionell mit der anliegenden Hirnpartie zusammengehört und daher den entsprechenden Gewebscharakter aufweist, der auch dem nervösen Anteil eigen ist. Vorläufig soll diese Skizze nur als Basis dienen für Vergleichungen, die erst in späteren Abschnitten durchzuführen sind und die erst gestatten werden, die Bedeutung dieses Darstellungsverfahrens klar zu machen.

Was das die gewebliche und organische Differenzierung der einzelnen Zonen betrifft, so ist aus dieser Übersicht sowohl, wie aus den Figuren ersichtlich, dass sie eine sehr verschiedene ist. Die Lateralzonen zeigen in ihrem Verlauf und an ihren nicht scharf abzugrenzenden Berührungsstellen keine unvermittelten und abrupten Unterschiede der Differenzierung. Gegenüber den Medianzonen sind sie um so schärfer abgesetzt, je niedriger die Differenzierung der letzteren ist. Von den Medianzonen ist die basale stärker in den Einfluss der Lateralzonen einbezogen und entzieht sich ihm am meisten nur in der Trichtergegend. Die dorsale Medianzone ist am reichsten in wohl unterscheidbare Abschnitte gegliedert und in ihr sind auch die Gewebeformen dem lebhaftesten Wechsel unterworfen.

Bei all dem Reichtum an Differenzierung der nervösen Gewebe ist dennoch ein Hirn, wie das von Scymnus und damit auch der Paläoselachier vom Standpunkt der Histophylie als relativ einfach zu taxieren, wie sich späterhin aus dem Vergleich mit den übrigen Wirbeltiergehirnen ergeben wird.

Die Ausdehnung epitheliöser Bezirke ist relativ gross und wird höchstens von der von Ceratodus erreicht und der von Petromyzonten übertroffen. Ein grosser Teil der Gewebe bleibt asteropilös und nur an einer Stelle, im Chiasma opticum wird der Zustand einer immerhin der Form der einzelnen Elemente nach einfachen Asterosa erreicht. Die Gangliosa ist durchschnittlich diffus, auch wo sie stratös wird, kommt es doch höchstens zur Absonderung eines und zwar wenig geschlossenen Stratums. Die Zell-

masse wirkt auf die Stützsubstanz nur in der Dorsolateralzone des Hinterhirns verdickend ein, sonst sind es überall nur Faserbahnen, deren Quantität die Stützsubstanz bestimmt. Eine besondere Differenzierung der gangliösen Einzelzellen ist Ausnahme, meist beharren sie in rein generellen, höchstens durch die Nähe der Membranae limitantes modifizierten Formen. Nur die Zellen der grossen motorischen Kerne des Rhombencephalon, die Purkinjezellen, der Mittelhirntrigeminuskern, der Diencephalonkern und der Kern des Saccus vasculosus, endlich die Mitralzellen des Bulbus olfactorius bestehen aus „grossen Ganglienzellen“ mit stark tingierbarem Plasma, mächtigen Achsenzylindern und ausgedehnten Dendritenfortsätzen.

VI. Entwicklungsgeschichte des Hirns im Zusammenhang mit der Formentwicklung des Kopfes.

1. Einleitung.

So viel auch über die Entwicklung des Selachierkopfes durch eine lange Reihe von embryologischen Untersuchungen bekannt geworden ist, so wenig liegt das Material zu einer Entwicklungsgeschichte des Kopfes vor, wie wir sie haben müssten, wollten wir den Zusammenhang zwischen Hirn- und Kopfentwicklung beurteilen. Die Orientierung dieses Zweiges der Embryologie auf die definitive Form und auf die phylogenetische Deutung der Formenreihen fehlt noch zu sehr, als dass es den Ontogenetikern möglich wäre, die materielle Basis hierfür zu erarbeiten. Für uns kommt es nicht darauf an, die äussere Hirnform, die Neuromerie, die Homodynamie der Hirnnerven und die Histogenie der nervösen Gewebe an möglichst jungen Stadien von Selachierembryonen zu studieren oder gar die Urgeschichte des Gehirns aus ihnen zu konstruieren, wie es meistens die Absicht der auf diesem Gebiet tätigen Ontogenetiker ist. Auch können wir uns nicht mit ihnen auf möglichst frühe Stadien beschränken. Es gehört eine weitgehende Verkennung der natürlichen Entwicklungsprozesse dazu, zu glauben, die Aufgaben der Embryologie reichen nur bis zu demjenigen Punkte, wo die Gewebe und Organe differenziert sind, die ganze spätembryonale und postembryonale Entwicklungsgeschichte dürfe in solchem Masse vernachlässigt werden, wie es tatsächlich geschieht. So behandelt nur eine verschwindend kleine Anzahl von Arbeiten auch diese Zeiten im Entwicklungsleben der Haie, nämlich Miclucho[1]) und B. Dean Cestracion.

[1]) Miclucho-Maclay, Plagiostomata of the Pacific. Proc. Linn. Soc. New South Wales. Vol. III. 1879.

Röse[1]) Chlamydoselachus, Jaekel[2]) die Centrobati, Markert[3]) die Spinaciden, Helbing[4]) die Laemargi, Minckert[5]) und Klinkhardt[6]) die Spinaciden.

Lösen wir unsere Betrachtungen für einen Augenblick von den Selachiern ab und wenden wir sie demjenigen Stamme der Wirbeltiere zu, an welchem die Phylogenie unvergleichlich weiter gediehen ist, nämlich den Säugetieren. Hier wird die Paläontologie ohne Widerspruch als die in erster Linie entscheidende Urkunde gewürdigt und ihre Position fortwährend durch die überraschendsten Entdeckungen verstärkt. Neben ihr kommt, wo die Paläontologie Lücken aufweist, die Verbreitungsgeschichte und die vergleichende Anatomie zu Worte; ich erinnere nur an die Arbeiten von Winge, Tullberg, Leche, R. Lydekker und Max Weber u. a. Erst in dritter Linie gestattet man sich aus embryonalen Stadien etwa phylogenetische Schlüsse, wo alle anderen Urkunden fehlen. Der methodische Wert ontogenetischer Urkunden ist nirgends mehr auf sein wahres Mass reduziert, als an diesem für die Phylogenie vollkommensten Objekte. Behauptungen über Phylogenie auf Grund früherer Entwicklungsstadien aber, wie solche, von denen die Selachierembryologie wimmelt, sind auf jenem Arbeitsgebiet nach und nach in Misskredit und endlich in Ausfall gekommen. Dagegen hat die Wertschätzung der postembryonalen Entwicklungsstadien für die Phylogenie und Systematik der Säugetiere zugenommen und erfreut sich dort mindestens einer wissenschaftlichen Gleichberechtigung neben dem Studium der frühen Entwicklungsstadien, das, wofern es sich nicht nur um den Typus „Säugetier“ handelt, doch für die Phylogenie kaum ebensolche Bedeutung beanspruchen kann, wie das der späteren Embryonalstadien. Noch steht aber die Entwicklungsgeschichte niederer Wirbeltiere an methodischem Wert für die Phylogenie hinter der der höheren weit zurück. Der Gedanke, dass der Nachweis von Einheit des Baues eine wichtigere Aufgabe sei, als der von Mannigfaltigkeit, das seit einer Generation konventionell herrschende Prestige der „Lichtträgerin“ Embryologie, die Dank-

[1]) C. Röse, Ueber die Zahnentwicklung vom Chlamydoselachus. Morph. Arb. IV. 1895.
[2]) O. Jaekel, Die Selachier vom Monte Bolca. 1893.
[3]) F. Markert, Die Flossenstacheln von Acanthias. Zool. Jahrb. Bd. IX. 1896.
[4])—[6]) a. a. O. p. 262, 302.

barkeit embryologischer Arbeitsthemen und das traditionelle Fortwälzen von Problemen, an deren Lösung aus der Ontogenie nur noch die Ontogenetiker selbst glauben, sollte doch auf die Dauer nicht die Einsicht gegen die wirkliche Sachlage verschliessen. Diese besteht darin, dass auch bei den niederen Vertebraten für Phylogenie und Physiologie die Anatomie der erwachsenen Form das erste Wort zu reden hat und dass, wie von jeher auch in alle Zukunft Ziele und Wege der Embryologie durch sie orientiert werden, auch wenn diese Situation momentan von dem herrschenden embryologischen Spezialismus verkannt oder nach Kräften verdunkelt wird.

Das einzige meines Wissens abgebildete Embryonalstadium von Scymnus findet sich bei Parker. Es entspricht unseren Embryonen von 4,2 cm und unterscheidet sich durch keine wesentlichen Merkmale von den entsprechenden Stadien anderer Selachier.

Der Gedankengang, der dem nachfolgenden Teile zu Grunde liegt, ist folgender. Das erwachsene Gehirn der Selachier scheint bei flüchtiger Betrachtung der Mechanik der Kopfbildung entrückt zu sein. Dass es einmal das Stadium der vier Hirnbläschen durchlaufen hat, dass sich an ihm zeitweise Neuromeren zeigen und zeitweise seine Oberfläche den Schädel berührt, sind bekannte Tatsachen. Wir halten nun aber ein Hirn nicht für erklärt, sobald seine Teile in üblicher Weise beschrieben und homologisiert sind. Es gehört hierzu vielmehr, dass die mechanischen Bedingungen, die zur Entstehung der einen oder anderen Form führen, soweit als möglich und daher auch in die Ontogenie hinab verfolgt werden, damit wir uns ein Bild davon machen, wie möglicherweise analoge Prozesse die phyletische Entwicklung herbeigeführt haben. Daher sollen zuerst die Massen des Kopfes in ihrem gegenseitigen Verhältnis auf verschiedenen Entwicklungsstadien ins Auge gefasst werden. Nur dadurch wird uns möglich, den Einschlag an rein mechanischen Bedingungen der Kopf- und Gehirnform auszuscheiden und den Rest genetischer Deutung zu unterwerfen. Beschaffenheit und Veränderung dieser Kopfmassen ist zunächst für jede einzelne derselben im allgemeinen zu untersuchen, dann aber im einzelnen auf einigen Hauptstadien der Entwicklung. Des weiteren wird uns die Gliederung des Gehirns beschäftigen und die Entwicklung seiner

einzelnen Teile, insbesondere die des Zwischenhirns, der Regio olfactoria und des Hinterhirns. Dabei sollen auch histogenetische Beobachtungen ihre Stelle finden.

2. Massen des Kopfes auf verschiedenen Entwicklungsstadien.

Übersicht der Massenverhältnisse des Kopfes während der Entwicklung.

	I	II	III	IV	V
	Scyllium		Scymnus		
	2,2 cm %	4,2 cm %	10 cm %	30 cm %	erwachsen %
Totalmasse	100	100	100	100	100
Integument	24	6	9	10	14,5
Gehirn		12,5	8	5	4
Gehirn + Augen	28				
Höhlen des Gehirns	27	6			
Augen		16	14	10	9
Nase		1	3	2,5	2,5
Mesodermale Teile	22	55	66	72	71

Aus diesen die Massenverhältnisse annähernd illustrierenden Zahlen geht hervor, in welcher Weise sich die Quantitäten der wachsenden Gewebsmassen innerhalb verschiedener Stadien verhalten und wie sich ihr gegenseitiges Verhältnis innerhalb des Organismus mit zunehmendem Wachstum verschieden gestaltet. Detaillierte Ausführungen müssen natürlich einem genaueren Studium überlassen bleiben. Für unseren Zweck ist genügend deutlich, von welchen Bedingungen die Entwicklung des Gehirns abhängig ist. Das Integument nimmt zu Beginn der Entwicklung einen relativ hohen Prozentsatz der Kopfmassen in Anspruch; auf dem ersten gemessenen Stadium von Scyllium enthält es noch diejenigen Bezirke, die später erst zur Nase werden und die Linse. Aber auch wenn wir hiefür einige Prozent in Anschlag bringen, so tritt es immerhin auf dem nächstfolgenden Stadium erheblich zurück, um alsdann wieder zuzunehmen. Diese Zunahme ist auf die Ausbildung der

Lorenzinischen Ampullen zu setzen, aber daneben wohl auch auf die des subkutanen Bindegewebes. Das Gehirn ist auf dem ersten Stadium von den Augen nicht abzutrennen und nimmt mit ihnen zusammen beinahe den dritten Teil des Kopfes in Anspruch, ja, wenn wir die Höhlen mitrechnen 55%. Diese Einbeziehung der Höhlen hat ihre Berechtigung insofern, als das Hirn durch die mit Flüssigkeit erfüllten Höhlen zu einer Masse von einheitlicher Wirkung auf den übrigen Kopf wird. Dies würde auch auf späteren Stadien der Fall sein, aber schon für das zweite ergibt sich ein so starkes Zurückgehen der Hirnhöhlen auf 6%, dass wir die schwierige Bestimmung der Höhlen auf den folgenden Stadien unterlassen haben. Will man die Gesamtheit von Hirn und Höhlen schätzungsweise beurteilen, so würde sich das Verhältnis etwa so stellen:

1.	Für Scyllium 2,2 cm nach Abzug der Augen mit ca. 12%	ca. 43 %
2.	„ Scymnus 4,2 cm	„ 18,5 „
3.	„ „ 10 cm	„ 12 „
4.	„ „ 30 cm	„ 7 „
5.	„ den erwachsenen Scymnus	„ 5 „

Demnach nimmt die Masse des Hirns, nachdem sie nach Verschluss des Medullarrohrs reichlich die Hälfte gebildet hat, schon in frühen Stadien relativ stark ab, damit natürlich auch der Einfluss der Hirnmasse auf die Kopfbildung und noch vor der Geburt sinkt die Masse des Gehirns schon so herunter, dass ihr kaum mehr ein solcher Einfluss zuzuschreiben ist. Die Augen gedeihen wohl schon vor dem zweiten Stadium zu ihrer relativ stärksten Entfaltung. Auf diesem bilden sie mit dem Gehirn und dessen Höhlen zusammengezählt noch den dritten Teil des Kopfes. Schon auf dem folgenden Stadium überholen sie das Gehirn an Masse und beharren von da an fast auf dem doppelten Quantum des Gehirns. Die Nase schnürt sich erst zwischen unserem ersten und zweiten Stadium ab; als Masse bleibt sie relativ unbedeutend, dagegen wird sie durch ihre Verbindung mit dem Gehirn vermittelst der Fila olfactoria zu einem der stärksten Fixpunkte am Kopf. Die vornehmlichste Massenzunahme erfährt graduell das Mesoderm des Kopfes. Noch auf unserem ersten Stadium liegt sie zwischen $^1/_5$ und $^1/_4$, wird aber successive zu $^3/_4$ des

Kopfvolumens. Aber ihre Quantität darf nicht mit ihrer Massenwirkung gleichgesetzt werden; diese ist vielmehr grösser, wenn man die Festigkeit der Gewebe in Betracht zieht. Während auf den frühesten Stadien die Massen des Integuments durch ihre Spannung und das Neurogliagerüst von Gehirn und Augen zugleich mit der Quantität der betreffenden Teile die Mechanik des Kopfes dominieren, kann auf den späteren Stadien, je mehr sich Spannung und Widerstand vom Ektoderm auf das Mesoderm zurückziehen und je mehr demnach Fascien und Knorpel ausgebildet werden, von einer mechanischen Wirkung jener Teile nicht mehr die Rede sein; sie werden völlig passiv. Die mesodermalen Teile dagegen werden schon nach dem dritten Stadium immer ausschliesslicher für die Mechanik der Kopfbildung massgebend und beherrschen gänzlich die späten Wachstumsprozesse, die allerdings bei Scymnus früher ein Ende finden, als bei vielen später noch zu betrachtenden Selachiern.

Auf dem Stadium, welches in unserer obigen Tabelle als II figuriert, besitzt das Gehirn die bekannte spätembryonale Retortenform, die teils in toto, teils im Medianschnitt mehrfach abgebildet ist (Fig. 51). Bevor wir aber das Hirn allein betrachten, ist auf Fig. 54 zu verweisen. Ein solches Bild erblicken wir, wenn wir einen in Alkohol konservierten Kopf eines Selachierembryos in Xylol aufhellen, wie es geschieht, ehe man ihn zu schneiden pflegt. Es zeigt uns deutlicher, als dies sonstwie möglich ist, die Beziehungen des Gehirns zu den übrigen Organen und zur Gesamtkonfiguration des Kopfes.

Fassen wir zuerst die Massenbezeichnungen unter Hinweis auf unsere Tabelle ins Auge, so erscheint das Gehirn mit 18,5 % überaus gross im Vergleich zu den übrigen Organen. Fügen wir noch sämtliche Sinnesorgane und das Integument bei, so kommt diese ektodermale Gesamtmasse, die von ihr eingeschlossenen Höhlen inbegriffen, auf etwa 45 % des Kopfes. Nun betrachten wir das interstitielle und regellose Dickenwachstum embryonalen Gewebes, z. B. des Bindegewebes, als eine primitivere und weniger geordnete, daher auch mechanisch weniger wirkungsvolle Art des Wachstums und das an epithelial geordneten Flächen in bestimmter Richtung sich vollziehende Dickenwachstum, wie es der Retina, dem gesamten Nervenrohr, der Nasenschleimhaut eigen ist, als eine höhere Wachstumsform, deren

Massenveränderungen eben gerade, weil sie geordnet sind, auch in die ontogenetisch ablaufenden Prozesse mechanisch wirkungsvoller eingreifen müssen. Dieser Anordnung des höheren Dickenwachstums bei Nervenrohr und Sinnesorganen entspricht aber ausserdem auch das massivere substanzielle

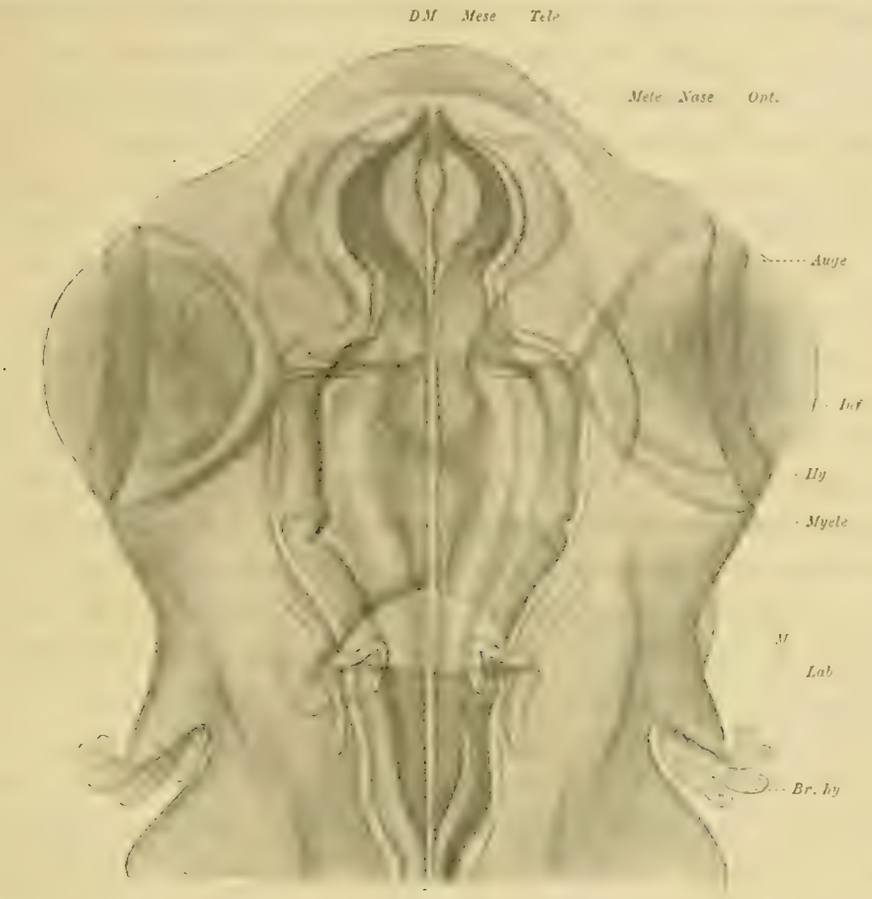


Fig. 54.

Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Kopf in dorsaler Ansicht, durch Xylol aufgehellt. 15fach vergr.

Br. hy = Hyoidkieme,	*Inf* = Infundibulum,	*Mete* = Metencephalon,
DM = Dorsomedianzone,	*Lab* = Labyrinth,	*Myele* = Myelencephalon,
Hy = Hypophyse,	*M* = Mund,	*Opt* = Opticus,
	Mese = Mesencephalon,	*Tele* = Telencephalon.

Substrat, indem keine anderen Gewebe auf dieser Stufe mit dem bereits vorhandenen Neurokeratingerüst an Druckfestigkeit sich wird messen können, es sei denn die Linse und die Chorda. Somit gehen wir wohl nicht irre, wenn wir annehmen, dass das Nervenrohr nebst den mit ihm verbundenen

Augen und dem Integument gleichzeitig innerhalb des Kopfes dem gegenseitigen Druck der Gewebe während des Wachstums den grössten Widerstand entgegensetzt und durch seine eigenen Wachstumsenergien am lebhaftesten die Konfiguration des Bildes auf dieser Stufe beherrscht und weitergestaltet. Immerhin erfährt sein Wachstum nicht allseitig gleiche Gelegenheit zur Entfaltung und zwar ist es das Integument und Gebilde desselben, die entscheidend eingreifen. Einmal schon die vordere Kopfwölbung, deren Spannung im Zusammenhang mit der Fixierung der Epidermis durch die Augenränder einen Widerstand bildet. Zweitens die bereits sehr enge Verbindung zwischen Augenbecher und Linse einerseits und Augenbecher und Hirn andererseits durch den ebenfalls bereits entwickelten und sichtbaren Opticus. Ein weiterer Fixpunkt, oder besser deren zwei, sind in den Labyrinthen gegeben, die einmal schon durch ihre Öffnungen, die Pori endolymphatici, dann aber auch durch die Massen und die Stellung ihrer bereits ins Kanalstadium übertretenden Wandungen ein wesentliches Widerstandsmoment repräsentieren, noch ehe die mächtige Verbindung des Acusticus eine stärkere Verkettung von Labyrinth und Gehirnwand schafft. Viertens sind die Nasenbecher so erheblich ausgebildet und ihre Verbindung mit dem Vorderhirn durch die Fila olfactoria, dem sie noch unmittelbar anliegen, so intim, dass sie ebenfalls als Fixpunkte wirken und endlich die Rathkesche Tasche, die ja noch lange ihre Verbindung mit der Mundhöhle aufrecht erhält.

Ich bin natürlich weit davon entfernt, diese verschiedenen Bedingungen für die Mechanik der Kopfentwicklung als ihre Gründe anzusehen. Ich nehme die Gründe selbst vielmehr als in der Phylogenie der betreffenden Organe allein nur zugänglich an, wovon noch später die Rede sein wird. Jedenfalls sind einige der hier vorliegenden Bedingungen aber von solcher Bedeutung für die ganze weitere Gestaltung des Gehirns und sind selbst doch schon auf diesem Stadium seit geraumer Zeit vorhanden, dass wir sie genau erörtern mussten, da an ein Verständnis für die Entwicklungsmechanik des Hirns ohne Berücksichtigung solcher Bedingungen nicht zu denken ist. Wohl mögen daneben noch andere in Betracht kommen, dann aber sicher erst in zweiter Linie. Ebenso diejenigen, die auf der primitiveren Form des Dickenwachstums beruhen und erst allmählich gleichen Wert, ja später das Übergewicht, erhalten.

Würden wir nun von diesem Stadium an rückwärts die Bedingungen für das Hirnwachstum analysieren, so müssten wir unsere Betrachtung etwa so formulieren:

Das primitive Neuralrohr entsteht als einfache Abschnürung eines zylindrischen Ausschnittes aus dem Ektoderm. Die ersten Bedingungen für die weitere Entwicklung sind:

1. dass der Neuroporus noch für einige Zeit fortbesteht;

2. dass die Entstehung von Mund und Augen eine ventral konkave Krümmung des Hirnrohrs erzeugen;

3. a) dass das Hirns oral seinen Kontakt mit der Epidermis aufrecht erhält,

b) die Linse zur Fixierung des Augenbechers mitwirkt,

c) die Hypophysis, das Paläostoma den Trichter fixiert,

d) das Gehörorgan vom Ektoderm sich ablöst;

4. dass im Hirn selbst die Lateralzonen durch Abspaltung aus den Keimzellen das erste Stützgerüst des ganzen Körpers aussondern.

Erst nachträglich würden andere Bedingungen successive Platz greifen.

Hierbei ergibt sich als allgemeinstes Resultat: Die mechanischen Bedingungen für die Massenentwicklung des Kopfes sind in erster Linie im Integument gegeben und in dessen an gewissen Stellen erfolgender Verwandlung in den Mund und die Sinnespforten, in zweiter Linie und auch zeitlich ihnen folgend, unter sich auf gleicher Stufe, die in der Lage der Sinnesorgane und in der Ausbildung des Hirns und zwar seiner Stützsubstanz und deren Membranen aktiv und passiv gegebenen Bedingungen der Zug- und Druckfestigkeit. All diese Bedingungen schaffen den auf Stadium II vorhandenen Zustand und erst nachdem sie gewisse Formen erzeugt, kommen jetzt auch noch andere, namentlich aus dem Mesoderm herrührende weitere Instanzen in Betracht. In erster Linie erfolgt jetzt zunächt:

1. Fixierung der verschiedenen Nervenmassen unter sich durch Faserbahnen.

2. Massenvermehrung an gewissen Stellen durch ebensolche und dementsprechend Druck- und Zugwiderstände an verschiedenen Stellen.

3. Fixierung des Hirnrohrs nicht nur durch die schon vorhandenen Fixpunkte an der Nasenschleimhaut, am Auge, am Gehörorgan, sondern auch durch die anderen Nerven nach Massgabe ihrer Entstehungszeit und Stärke.

4. Als Massen mesodermaler Natur für die weiteren Veränderungen würden jetzt auf den Plan treten:

a) Kiefer und deren Muskeln.

b) Knorpel der Schädelbasis.

c) Verbindung derselben mit der Chorda, wodurch wiederum eine Fixation der Nervenaustritte am Schädel geschaffen und eine Rückwirkung dieser Fixation aufs Nervenrohr gesteigert würde. Ein Effekt dieser Bedingungen wäre auch die Neuromerie, wenn man, wie ich, die von Froriep[1]) vertretenen Ansichten teilt.

Als Resultat der Verkettung all dieser Bedingungen geht das Stadium von 10 cm hervor. Auf ihm etwa bildet der Schädel definitiv seine Innenwand, die daher auch die entsprechende Gestalt des Hirns annimmt. Damit aber hört auch gleichzeitig der Einfluss der Hirnmasse auf die weitere Umgebung auf. Erst nachdem die mesodermalen Massen auf das Hirn im Sinne seiner Streckung und Knickung an der Sattelspalte ihren wesentlichen Einfluss auszuüben begonnen haben, tritt allmählich auf vorgerückteren Stadien, etwa dem von 20 cm, ein neues mechanisches Moment in Aktion, nämlich die Ausgestaltung der gesamten Körperform und insbesondere der Kopfform, die entsprechend dem Minimum des Widerstandes für die Bewegung im Wasser eine Veränderung erfährt. Das Rostrum spitzt sich zu, ausgefüllt von den Lorenzinischen Ampullen, deren Ausbildungsgrad nicht ohne Korrelation mit der Beweglichkeit, also auch der Voraussetzung mechanisch zweckmässiger Rostralbildung, zu denken ist. Mit der Zuspitzung des Kopfes erfolgt denn auch die Zurückdrängung der Augen, daher bleibt deren Abstand unter sich jetzt ziemlich konstant und die Rückwirkung der Augengrösse auf die Hirnform, die in einer seitlichen Kompression des Zwischenhirns besteht, wird erst von diesem Stadium an recht deutlich. Von dem Ausbildungsgrad der Rostralknorpel allein hängt

[1]) A. Froriep, Zur Entwicklungsgeschichte der Kopfnerven. Verh. Anat. Gesellsch. München 1891.

es ab, wenn das Hirn in die Schädelhöhle zurücktritt. Bei Scymnus geschieht dies, wie unsere Figur zeigt, sehr spät erst, ja sogar erst, nachdem das Tier eine Länge von 44 cm überschritten hat. Diese ins spätere Leben übergreifenden Umwandlungsprozesse aber zeigen uns das Gehirn nur noch in Abhängigkeit von der Wand der Schädelhöhle und der Körpergrösse, während nun alle anderen Momente zurücktreten.

Aus dem zeitlichen Ineinandergreifen der verschiedenen Entwicklungsvorgänge des Selachierkopfes folgt also, dass für das Gehirn in erster Linie das epitheliale Wachstum des Ektoderms überhaupt massgebend ist, dessen Eigenschaften zu Beginn der Entwicklung auch die der Gehirnanlage sind. Sowie sich das Nervenrohr aber vom Ektoderm ablöst, wächst es nicht nur in einer dem Ektoderm parallelen Entwicklungsbahn fort, sondern es gerät zum Teil unter die die Form bestimmenden Einflüsse des Ektoderms, insbesondere die Ausbildung der Sinnesorgane und des Mundes; im Verein mit diesen gibt es aber wiederum dem übrigen Kopf, besonders den mesodermalen Teilen desselben sein Gepräge. Das Gehirn fixiert seine Verbindungen mit den höheren Sinnesorganen, allmählich auch mit seinen motorischen Endgebieten und den niederen Sinnesorganen. Mit dem Anwachsen des Mesoderms wird es dem Einfluss des Integuments entzogen, der nicht mehr ein direkt mechanischer wird, sondern immer mehr auf die nicht mehr aufzuhebende Fixierung durch die Sinnesorgane zurücktritt. Jetzt folgt die Periode der Massenentfaltung für das mesodermale Gewebe. Damit, dass es zum Teil verknorpelt, wird der formgebende Einfluss des Gehirns und seines Stützgerüstes kompensiert und überwältigt. Das mechanische Gleichgewicht entsteht in dem Augenblick, wo sich ringsum dem Hirn anlagernd die Schädelkapsel bildet, damit endgültig die Stützfunktion innerhalb des embryonalen Kopfes übernimmt und den passiv mechanischen Primat an sich reisst. Dies geschieht jedoch erst, nachdem Hirn und Schädelinneres auf geraume Zeit sich die Wage gehalten und ein längeres Stadium der Indifferenz bei gemeinsamer Massenzunahme verbracht haben. Dann ist das Hirn und seine Massen lediglich passiv und folgt den Zugwirkungen, die von seinen Fixpunkten ausgehen, während die innere Schädelwand nur proportional der Körpergrösse, die bei ihrer Entstehung angenommene Form des embryonalen Hirns weiter entwickelt. Als letzten dominierenden Faktor

treffen wir die mechanische Umgestaltung des Rostrums an, das auf die Stellung der Augen zurückwirkend auch noch auf späten Stadien eine Einengung der benachbarten Schädelhöhle und somit auch des Hirns bewirkt. Ist die definitive Form des Kopfes erreicht, so hört auch diese Wirkung auf. Während der Dauer des gesamten Lebens aber bleibt das Hirn unter dem Einfluss des allseitig gleichmässigen Wachstums der Schädelwand und der Fixation an den Nervenaustrittsstellen, die sich naturgemäss in der Längsrichtung, wo ja schon die Streckung absolut grösser ist, am stärksten äussert.

Bei dem so verschiedenen Anteil, den das Gehirn am Aufbau des gesamten Kopfs nimmt, wird selbstverständlich auch den Wachstumsvorgängen innerhalb des Nervenrohrs eine überaus verschiedene Rolle zufallen, je nachdem sie in eine Zeit fallen, wo das Hirn in den Kopfbau aktiv eingreift, oder wo es sich rein passiv verhält. Davon ist später bei der Entstehung der Lateralzonen eingehender zu handeln. Mit Rücksicht auf die Entwicklung der allgemeinen Kopfform sei nur noch einmal betont, dass das Nervenrohr in den früheren Entwicklungsstadien den stärksten Einfluss auf sie hat, dass dieser sich mit der Teilung des Nervenrohrs spaltet und zum Teil auf die Augen übergeht und dass er bei der Entstehung der Schädelkapsel den Nullpunkt erreicht.

3. Formentwicklung des Hirns auf Stadium II und III.

Der Bau des Hirns auf Stadium II wird aus unseren Figg. 55 u. 56 ersichtlich. Es geht aus ihnen hervor, dass die Differenzierung der Hirnwand bereits sehr weit gediehen ist und da die stärkste Gliederung auf diesem Stadium am Medianschnitt nachzuweisen ist, sei auch dieser für die weiteren Ausführungen als Ausgangspunkt gewählt.

In dem Querschnitt, wo sich der Mund zum Ösophagus verengert, verdünnt sich die Dorsomedianzone des Rückenmarks zu einem flachen Pflasterepithelblatt. So verläuft sie in leichter Wölbung über dem Ventrikel des birnförmigen Rautenhirns bis zu einem durch eine dorsale Einsenkung sehr bestimmt markierten Punkte, an dem gleichzeitig die übrigen Längs-

zonen des Hirnrohres bemerkenswerte Veränderungen erfahren (*Plcc*). Innerhalb dieses Verlaufes ist keine weitere Differenzierung der Dorsomedianzone nachweisbar, als dass sie sich erst in Gestalt eines gleichseitigen ausgeschweiften Dreiecks bis zu einem bestimmten Punkte verbreitert, um alsdann mehr rechteckig bis zum Ende der Rautengrube fortzusetzen; hier

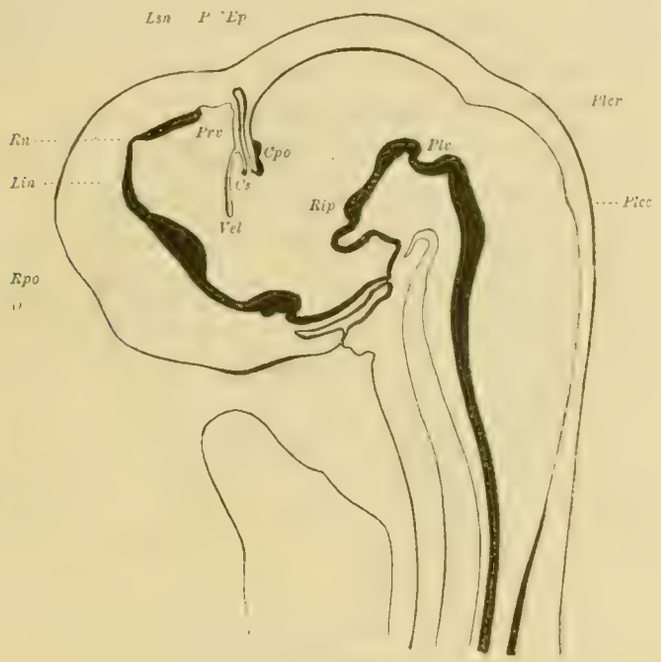


Fig. 55.

Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Stadium II. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 10 fach vergr.

Cpo = Commissura posterior,	*O* = Opticus,	*Prv* = Prävelarer Abschnitt,
Cs = Commissura superior,	*P* = Paraphysis,	*Rip* = Recessus interpeduncularis,
Ep = Epiphysis,	*Plcc* = Plica cerebellaris caudalis,	*Rn* = Recessus neuroporicus,
Lin = Lamina infraneuroporica,	*Plcr* = Plica cerebellaris rostralis,	*Rpo* = Recessus praeopticus,
Ls = Lamina supraneuroporica,	*Plv* = Plica ventralis,	*Vel* = Velum.

auch schneidet sie ziemlich genau rechtwinklig ab, doch hat keine Faltenbildung an ihren Lateralrändern Platz gegriffen. Jetzt tritt eine plötzliche Verschmälerung der Dorsomedianzone ein und in sanftem Bogen setzt sie ihren Weg fort bis zu einem ähnlichen, durch dorsale Einbuchtung und durch Veränderung in den übrigen Längszonen gekennzeichneten Punkte, wie der vorige (*Plcr*). Dieser Abschnitt wird später zum Hinterhirn. Nun

erfolgt jene starke fast halbkreisförmige Biegung der Dorsomedianzone, gleichzeitig unter Differenzierung derselben bis zum brachypilösen Zustande. Alsdann knickt die Zone plötzlich ein und bildet zwei ebenfalls brachypilös differenzierte Falten, die bereits von Fasern der Commissura posterior quer durchzogen werden (*Cp*). Zwischen dieser und der bereits ähnlich differenzierten Commissura superior (*Cs*) erhebt sich, in oft beschriebener Form aus kubischer und am Ende zylindrischer Epitheliosa bestehend, die Zirbel (*Ep*). Vor der Commissura posterior erhebt sich, dem Zirbelstiel parallel, der postvelare Abschnitt der Decke des dritten Ventrikels, in dessen Verlängerung auch der prävelare (*Prv*) bis nahe zur Zirbelblase fortsetzt. Zwischen beiden Abschnitten ragt das Velum (*Vel*) transversum leicht kaudal gebogen herab und wie die Autoren bereits beobachtet haben, mit einem hinteren aus Pflasterepithel und einem vorderen aus kubischem Epithel bestehenden Blatt. Falten sind auf dem vorderen Blatte noch nicht bemerkbar. Nach einer sehr charakteristischen kleinen Einbuchtung setzt der prävelare Abschnitt senkrecht umbiegend, sich in die Paraphysalfalte fort (*P*). Was die transversale Ausdehnung der vom Hinterhirn an geschilderten Abschnitte der Dorsomedianzone betrifft, so beschränkt sich die ganze Zone, wie im Hinterhirn auch, auf einen schmalen Streifen. Breiter wird sie erst an der Decke des dritten Ventrikels, also vor der Commissura superior, und zwar namentlich am prävelaren Teil und am Velum selbst. Dadurch wird eine quergestellte Blase gebildet, die wir als Homologon der Paraphyse betrachten können. Endlich folgt die bereits bis zum stärksten Grad von Brachypilosa verdickte Lamina supraneuroporica (*Lsn*), die sich in den auch sämtlich am Gehirn in Gestalt eines flachen mit der Spitze gegen die Epidermis gerichteten Kegels abhebt. Nun biegt die Medianzone ventral senkrecht um und geht in die lange ebenfalls erheblich verdickte Lamina infraneuroporica (*Lin*) über. Diese spitzt sich auf kurze Strecke zum Recessus praeopticus (*Rpo*) zu, dem als bereits ansehnliche Verdickung in der von Froriep[1]) beschriebenen Weise der Opticus (*O*) selbst folgt. Hinter diesem lassen sich auch die am erwachsenen Hirn vorhandenen Abschnitte erkennen (Fig. 56). Die Falten vor der Haube werden zum

[1]) A. Froriep, Ueber die Entwicklung der Sehnerven. Anat. Anz. Bd. VI. 1891.

Recessus interpeduncularis (*Rip*). Die Haube selbst hat bereits eine mächtige Ausdehnung und brachypilöse Struktur, die von nun an nur noch an der Plica ventralis (*Plv*) etwas zurückgehend auch dem weiteren Verlaufe der Ventromedianzone eigen ist. Am Rautenboden lassen sich entsprechend der Dorsomedianzone ebenfalls zwei Teile unterscheiden, ein vorderer, der der Hinterhirndecke parallel läuft und die eigentliche Medianzone des Rautenbodens. Die Ausdehnung der Ventromedianzone in transversaler Richtung

Fig. 56.

Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Äussere Form des Hirns von der linken Seite. 10fach vergr.

ist beim Recessus praeopticus nur gering, stärker vom Recessus postopticus bis zum Recessus interpeduncularis. Halten wir vor allem fest, dass in beiden Medianzonen eine transversale Entfaltung auf diesem Stadium stets an rein epitheliöse Struktur der Zonen gebunden ist, schon geringe pilöse Verdickung verträgt sich nur mit beinahe linearer Breitenentfaltung der Medianzonen.

Die Lateralzonen desselben Stadiums weisen bereits mannigfaltige Modifikationen auf, die uns am deutlichsten in Fig. 57 entgegentreten. Die Ventrolateralzone wird gebildet vom Fasciculus longitudinalis posterior, der

bereits als wohl markierter Wulst hervortritt und erst von der Plica ventralis an sich weniger scharf von der Umgebung absetzt. Seine Längsfaserung ist bereits ausgebildet und mit der Lupe zu erkennen. Ausserdem erscheint als ausgeprägteste Bildung der Rautengrube seitwärts ein geschwungener zweiter Teil der Ventrolateralzone, der sich gegen den bereits deutlich als durchsichtige Spalte erscheinenden Recessus acusticus ausspitzt. Dieser

Fig. 57.

Seymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Rechte Innenfläche des Gehirnrohrs und Medianschnitt. 10fach vergr.

Epe = Epencephalon,
Flp = Fasciculus longitudinalis posterior,
Plv = Plica ventralis,
Rac = Recessus acusticus.

dominiert überhaupt die Konfiguration. Mit ihm steht in offenbaren Zusammenhang die Richtungsänderung in der seitlichen Begrenzung der Rautendecke, der dorsolateralen Zone, die am Recessus acusticus eine Windung beschreibt, ferner konvergierende Faserbahnen, die sowohl kaudalwärts wie oralwärts verlaufen, aber im Recessus münden. Auch an der Innenfläche des Hirns ist diese Stelle deutlich bezeichnet durch die stärkst

ausgebildeten Nervenwurzeln, von denen der Acusticus noch schräg nach hinten gerichtet ist, entsprechend der kaudalen Lage des Gehörorgans. Am Übergang vom Rautenhirn ins Hinterhirn setzt sich die Dorsolateralzone in S-förmig geschwungenem Bogen fort und bestimmt durch ihre Massenentfaltung die grosse Veränderung des Querschnittes, die hier Platz greift und die Dorsomedianzone plötzlich einengt. Dieser Wulst enthält schon erkennbar Faserbahnen, die die spätere Verbindung des Hinterhirns (*Epe*) mit der Medulla oblongata repräsentieren. Im übrigen zeigt das Hinterhirn noch am allerwenigsten von seiner späteren Konfiguration. Wir werden also bei ihm auch den stärksten Umwandlungen im weiteren Verlaufe der Entwicklung begegnen. Scharf wird das Mittelhirn durch die Plica ventralis abgegrenzt. An ihm hat sich unter dem Einfluss der ausstrahlenden bereits auf diesem Stadium erkennbaren optischen Bahnen, die wohl auch aktiv dazu beitragen, das Mittelhirn emporzuwölben, die Dorsolateralzone abgeflacht, während die Ventrolateralzone noch mit einiger Deutlichkeit fortbesteht. An Faserbahnen sind zu unterscheiden die Tectospinalbahn, die in der Haube kreuzenden Fasern, welche radiär ausstrahlen und am wenigsten deutlich die Tectobulbärbahn. Mit den Fasern der Tectospinalbahn verlaufen wohl auch schon die ziemlich groben Fasern des Dachkerns. Vor allem in Gestalt einer mächtigen gegen den Ventrikel einspringenden Vorwölbung macht sich das Meynertsche Bündel und vor ihm in bescheidenerem Masse die Commissura superior geltend. Vor dieser beginnt eine tiefe Furche, die gegen den Trichter gerichtet, in diesem sich zum Ventrikel des Unterhirns verbreitert. Noch erzeugt der Opticus durch seine teils gegen das Mittelhirn, teils gegen das Vorderhirn gerichteten Fasermassen eine wulstartige Verdickung. Die Verdickungen der Lamina supra- und infraneuroporica flachen sich lateralwärts aus, ohne dass wir in ihnen schon makroskopisch besondere Bildungen wahrnehmen würden. Die Bulbi olfactorii sind noch nicht vorhanden.

Zur Ergänzung des Bildes der Innenfläche sei auf Fig. 54 verwiesen, wo an Einzelheiten noch die seitlich vorspringenden Lobi inferiores, die Entstehung der Hypophysenabschnitte, die Abflachung an der Berührungsstelle des Vorderhirns mit der für den Nasenbecher bestimmten Epidermisverdickung hervortreten.

So sehen wir denn aus der Konfiguration der Lateralzonen, dass deren Massen bereits mehrfach von Faserzügen durchflochten sind, dass sie ferner überall da mächtig ausgebildet sind, wo auch die Medianzonen einen beträchtlichen Grad der Verdickung erreichen, dass es die drei höheren Sinnesorgane und die Verbindung derselben mit dem Medullarrohr sind, welche hier formbestimmend innerhalb der Hirnwandungen wirken, dass die drei Fixpunkte der höheren Sinnesorgane auch vor allem Punkte grösster Massenentfaltung sind, dass endlich von ihnen, wo nicht von früheren Entwicklungsbedingungen aus, eine Rückwirkung durch die Lateralzonen auf die Medianzonen stattfindet, welche in allerprägnantester Weise die Gliederung des Gehirns zum Ausdruck bringen und von frühestem Anbeginn der Ontogenie bis zur vollkommenen Entwicklung des Gehirns diese Gliederung mit der grössten Zähigkeit bewahren. Alle Modifikationen aber, die von nun an noch in den Medianzonen auftreten, beruhen einmal auf Massenzunahme und auf Massenverschiebung; eine weitere Gliederung macht sich nur in untergeordneter Weise geltend, wogegen alle erheblichen Änderungen von nun an die Lateralzonen befallen.

Bald nach diesem Stadium ereignen sich weitere Entwicklungsvorgänge, die ich zwar nicht von Scymnus, aber von dem nahe verwandten Laemargus rostratus (Embryo Grassi) kenne. Es sind dies: 1. Abschnürung der einzelnen Taschen der Rautendecke; 2. Bildung der Endblase der Rautendecke; 3. Umschnürung des dorsalen Teiles des Hinterhirns durch eine vordere und eine hintere Querfurche; 4. Aussackung des nervösen Teiles der Hypophyse; 5. Fältelung des vorderen Velumblattes; 6. Allmähliche Streckung der Hirnbasis.

III. Stadium. Es sind wichtige Veränderungen schon der äusseren Form, die sich zwischen unserem II. und III. Stadium vollzogen haben und die an Stelle des rein vertebraten Charakters des Hirns den selachischen in den Vordergrund treten lassen. Die Oblongata hat sich relativ verkürzt, die Rautenohren sind zu mächtig seitlich ausgreifenden ringförmigen Wülsten

ausgestaltet, das Hinterhirn schnürt sich präziser ab, ist aber an Volumen im Vergleich zu den übrigen Hirnregionen und seiner eigenen späteren Ausbildung noch sehr weit zurück. Noch dominiert an Masse das Mittelhirn, doch ist seine Längsachse nicht mehr senkrecht, sondern beinahe die Verlängerung derjenigen der Oblongata. Das Unterhirn hat seine definitive

Fig. 58.

Hirn eines Scymnusembryo von 10 cm, III. Stadium von der Seite. 6fach vergr.

Gliederung in der Anlage wenigstens erfahren, freilich noch nicht die Streckung und schärfere Sonderung. Die Zirbel hat ihre Öffnung am Schädeldach aufgesucht, noch ist die übrige Decke des dritten Ventrikels stark in axialer Richtung komprimiert. Während das Zwischen- und Unterhirn an Masse zurückgeblieben ist, hat das Vorderhirn eine Massenzunahme

erlitten, die es fast dem Mittelhirn gleich bringt. Von ihm schnürt sich der Bulbus olfactorius durch den Tractus ab und beginnt sich mit Glomeruli zu bedecken. Der Opticus zeigt bereits die S-förmige Faltung seines Querschnitts. Der Recessus neuroporicus erhält auf diesem Stadium seine schärfste Ausprägung.

4. Späte Entwicklung einzelner Verhältnisse des Hirns.

a) Beziehungen zwischen dem Wachstum des Kopfes und des Hirns.

Einige der Verhältnisse, die im späteren embryonalen Leben auf die Gestaltung des Gehirns speziell einwirken, lassen sich durch Messungen evident feststellen. Es ist einmal der Einfluss der Augen und ihrer Stellung, respektive deren Verschiebung innerhalb der Entwicklung des Kopfes. Ein ziemlich konstantes Verhältnis besteht zwischen der Länge des gesamten Tieres und dem Abstand vom vorderen Kopfende bis zur ersten Kiemenspalte. Ich erhalte hierfür folgende Zahlen:

Gesamtlänge	42 mm	100 mm	180 mm	300 mm	410 mm
Vordere Wölbung des Kopfes bis erste Kiemenspalte	7,3 „	19 „	28 „	56 „	79 „

Dieses Verhältnis verglichen mit dem Abstand der Mittelpunkte der Cornea ergibt den Ausdruck dafür, dass das Längenwachstum stärker ist als das Breitenwachstum des Kopfes.

Der Cornealabstand beträgt . .	6,8 mm	15 mm	24 mm	27 mm	32 mm.

Besonders beachtenswert ist der Punkt, wo sich die Achse, welche die Cornealmittelpunkte verbindet, mit der Medianlinie schneidet. Dieser Punkt erfährt nämlich eine allmähliche Verschiebung am Gehirn und zwar in rostraler Richtung. Er liegt nämlich bei

42 mm	Gesamtlänge	im Vorderrand der Rautengrube,
100 „	„	in der Mitte des Mittelhirns,
180 „	„	im Zirbelursprung,
300 „	„	im Velum,
410 „	„	in der „Paraphyse“.

Im Vergleich zum Gehirn also verschieben sich die Augen oralwärts oder im Vergleich zu den Augen das Gehirn kaudalwärts. Es ist leicht ersichtlich, dass die Fixation des Gehirns an zahlreichen Nervendurchtritten einerseits und an den Fila olfactoria andererseits nicht gleichwertige Wirkung ausübt, sondern dass die Wirkung der Fila olfactoria stärker ist. Um aber weiterhin diese Beziehungen zwischen Gehirn und Augen zu beurteilen, bedarf es der Vergleichung der Proportionen zwischen dem Abstand der Retinae unter sich und der Gesamtlänge des Tieres. Der Abstand der Retinae beträgt bei

42 mm	100 mm	180 mm	300 mm	410 mm
3 „	4,6 „	5,5 „	8,0 „	10,0 „

Das gibt ein Verhältnis von

1/14	1/22	1/33	1/37	1/41.

Es wird also nach Massgabe des Längenwachstums des Gesamttieres successive relativ kleiner, und ähnlich verhält es sich auch mit dem Verhältnis zwischen Retinaabstand und Gehirnlänge. Am stärksten aber drückt sich das in denjenigen Partien aus, die zwischen den beiden durch die Cornealverbindungslinie durchlaufenen Extreme liegen, nämlich zwischen dem Hinterrand des Hinterhirns und der Paraphyse. Diese Partien erfahren nachträglich, wenn wir von der der Tractus olfactorii absehen, die stärkste Streckung.

Wenn wir mit dem Horizontalschnitt durch einen Scymnuskopf von 90 cm diejenigen eines solchen von 44 cm und 18 cm vergleichen, so machen sich einige Veränderungen der Konfiguration bemerkbar, welche für uns zur Beurteilung der vom Scymnusgehirn abweichenden Gehirnformen bedeutungsvoll sind.

Bei dem Kopf eines Embryo von 18 cm Länge haben bereits die Nasenbecher und die Augen eine ähnliche Ausbildung erreicht, wie beim Erwachsenen. Die Augen sind im Verhältnis zum gesamten Tier mit $^1/_{16}$ der Körperlänge relativ grösser beim Embryo als beim Erwachsenen ($^1/_{31}$). Die Nasenbecher stehen noch so, dass ihr Septum in der Horizontalebene liegt. Der Rostralknorpel des Schädels endet mit einer Querwand, die kaudal noch dem Vorderhirn unmittelbar anliegt. Im übrigen erfahren die Proportionen der Hauptlinien des Kopfes wenig Veränderung.

b) Veränderung der Hirnregionen.

α) Vorderhirn.

Stärker sind dagegen die Abweichungen im Gehirn; ja zugleich mit denen des Zahnsystems dürften sie überhaupt die bedeutendsten sein, die sich in der postembryonalen Entwicklung am Kopfe geltend machen. Als Überreste aus der früheren Embryonalzeit sind zu betrachten: die tiefere Lage des Vorderhirns im Vergleich zum Mittelhirn, die reichliche Massenentfaltung der Lobi optici, welche in der Medianebene 2,5 mm, in der Transversale 6 mm messen, während das Kleinhirn median nicht mehr als

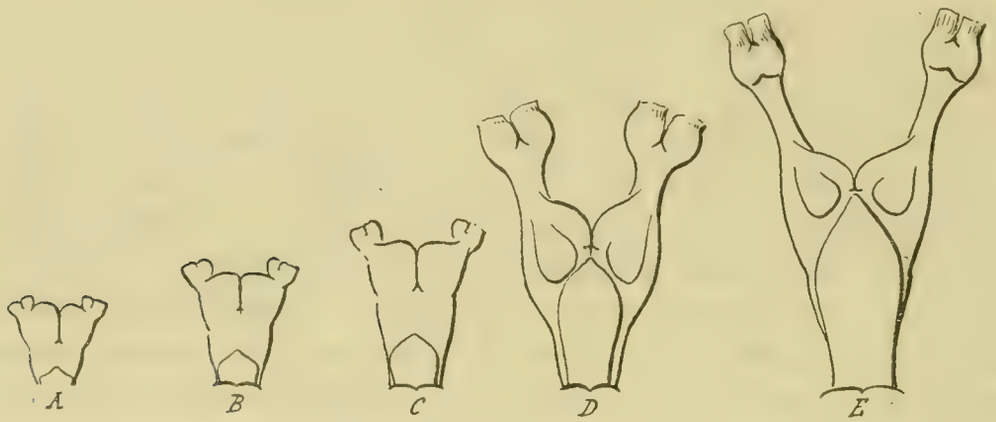


Fig. 59.

Aussere Form des Vorderhirns in fünf späten Entwicklungsstadien, dorsale Ansicht. $1^1/_2$fach vergr. *A* Embryo von 18 cm, *B* Embryo von 30 cm, *C* Junges von 43 cm, *D* Erwachsen 90 cm, *E* Erwachsen 105 cm.

ebenfalls 6 mm beträgt. Ebenfalls embryonal ist das Verhalten des gesamten Vorderhirns. Man würde es, abgesehen von der Grösse, auf den ersten Blick für das etwa eines Scyllium erklären. Die Bulbi olfactorii sitzen in voller Breite mit nur schwacher Einschnürung dem übrigen Riechhirn auf. Auch bei dem Gehirn von Scymnus 44 cm ist die sie trennende Furche noch sehr schwach ausgebildet, wogegen sie bei Scymnus 90 cm die Hirnsubstanz des Tractus bereits auf die Hälfte oder noch weniger der Bulbusbreite einengt. Bei Gehirnen noch grösserer Exemplare endlich ist der einzige überhaupt deutliche Unterschied im Vergleich zu denen mittlerer Grösse, dass es bei ihnen zur Bildung eines regelrecht abgesetzten

und transparenten Tractus olfactorius kommt. Können wir somit alle Übergänge vom sitzenden bis zum vollständig gestielten Bulbus olfactorius in postembryonaler ja sogar in den späteren Lebensperioden reifer Tiere nachweisen, so verhalten sich auch die Massen des übrigen Vorderhirns ähnlich. Zunächst verlängert sich die Längsachse des gesamten Vorderhirns successive, vorab auch im reiferen Alter. Die Masse zeigen dies deutlich:

	18 cm	30 cm	44 cm	90 cm	110 cm
Abstand der lateralen Wände der beids. Bulbi olf.	10 mm	12 mm	15 mm	22 mm	28 mm
Vom Mittelpunkt dieser Verbindungslinie zum Vorderrand des Mittelhirns	8,5 „	11 „	15 „	27 „	28 „
Das gibt folgende Verhältniszahlen beider Achsen	**0,85**	**0,91**	**1**	**1,23**	**1,35**

Diese Streckung drückt sich aber ebenso sehr wie in den allgemeinen Proportionen in dem Verhalten einzelner Teile aus.

Länge der Decke des dritten Ventrikels in der Medianlinie	2,5 mm	4,0 mm	5,0 mm	12 mm	16 mm
Basis der Decke des dritten Ventrikels am Mittelhirn gemessen	4,0 „	3,2 „	4,5 „	7 „	8 „
Daraus ergeben sich als Verhältniszahlen . .	**0,62**	**0,8**	**1,11**	**1,7**	**2,0**

Es erhellt hieraus aber auch, dass die Streckung des Vorderhirns früher die kaudalen Partien desselben beschlägt als die rostralen.

Bei diesen Messungen ist aus dem Spiel geblieben, dass nicht der ganze Raum zwischen den gemessenen Punkten von Hirnmasse ausgefüllt wird. Daher ist noch mit einigen Worten auf das Verhalten der rostralen Vorderhirnwand einzutreten. Bei 18 cm verläuft sie sozusagen ununterbrochen transversal vom Vorderrande eines Bulbus zu dem des anderen. Sie liegt hierbei dicht der Vorderwand des Cavum cranii an, höchstens in der Mediane eine schwache Einsenkung bildend. Diese Beschaffenheit der Vorderhirnwand bleibt relativ lange erhalten und auch bei 44 cm bildet der vordere Kontur des Vorderhirns noch höchstens einen schwachen Kreisbogen. Erst in höherem Alter, zugleich mit der Ablösung der Bulbi olfactorii vom übrigen Hirn bildet sich eine V-förmige Einsenkung der Vorderhirnwand aus und entsteht ein beträchtlicher präcerebraler Abschnitt des Cavum cranii.

β) Hinterhirn.

Natürlich verändert sich auch die Gestalt des Hinterhirns, wenn auch weniger beträchtlich als die des Vorderhirns und auch wohl weniger als in denjenigen Stadien, welche unserem ersten Stadium vorangehen. Als Dimensionen des Kleinhirns ergeben sich folgende Zahlen:

	18 cm	44 cm	90 cm	110 cm
Breite	4 mm	8 mm	9 mm	9 mm
Länge	5,5 „	12 „	15 „	15 „
Verhältniszahl . . .	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,6**

Man sieht, dass die Kleinhirnmassen sich zu Gunsten einer Längsstreckung verschieben, und zwar in den ersten Entwicklungsstadien vorzugsweise.

Hiermit sind die wichtigsten Veränderungen gekennzeichnet, welchen das Hirn in seinen späteren Stadien unterliegt. Sollen wir eine gemeinschaftliche Quelle für sie suchen, so ist sie vor allem darin zu erblicken, dass die Bulbi olfactorii den Nasenbechern angeheftet sind und die Fila olfactoria, auch wenn sie eine gewisse Streckung erfahren, doch jedenfalls weniger nachgiebig sind, als gewisse Stellen des Hirns selbst, vor allem das Zwischenhirn und die Tractus olfactorii. Es wäre irrtümlich, beim erwachsenen Hirn von sitzenden Bulbi zu reden, da die ganze Riechregion, sowie auch die Fila noch am meisten der Streckung ausgesetzt sind. Im ganzen wird wohl für die späten Veränderungen der Konfiguration eine ziemlich einfache Regel anzunehmen sein: Die Streckung ist umgekehrt proportional der Masse eines Querschnittes; denn die Tractus olfactorii und das Zwischenhirn sind, wie aus den Figg. 48 u. 51 ersichtlich ist, gewissermassen die schwächsten Stellen der Hirnwand, sobald man den gesamten Querschnitt in Betracht zieht.

Eine Verschiebung der hauptsächlichsten sonstigen Fixpunkte des Hirns, der höheren Sinnesorgane und der Nervendurchtrittstellen findet im spätembryonalen Leben nicht mehr statt. Der Übergang von einer leicht gekrümmten Hirnachse, wie wir sie bei Embryonen von 18 cm antreffen, in eine solche, in der die einzelnen Hirnabschnitte mehr hinter einander liegen, ist lediglich als Nachwirkung der sehr abweichenden frühen Embryonalzustände aufzufassen.

Gehen wir nunmehr auf die speziellen Vorgänge ein, die zur Entwicklung des Hinterhirns führen. Fig. 60 *A*—*D* gibt verschiedene Entwicklungsstadien des Querschnittes wieder. *A* entspricht mit seiner Orientierung vielleicht nicht ganz einem senkrechten Querschnitt, doch sind daran bereits die Hauptelemente differenziert. Am Ventrikel steht hinter den Kernen der Ependymzellen eine mächtige Schicht von Zellkernen, die

Fig. 60.

Scymnus lichia, Entwicklung des Hinterhirns im Querschnitt auf vier verschiedenen Stadien. *A* Embryo 4,2 cm; *B* Embryo 10 cm, 40fach vergr.; *C* Embryo 30 cm; *D* Erwachsen, 25fach vergr.

wohl noch grossenteils der Stützsubstanz angehören; als feine senkrecht zwischen den Membranae limitantes stehende Linien erscheinen Fasern der Pilosa, den gesamten Querschnitt durchziehend. Einen peripheren Schwarm von Zellen bilden die embryonalen Purkinjezellen, die sich schon auf diesem Stadium durch ihre Helligkeit und Grösse abheben. Faserbahnen trennen bereits die Mehrzahl dieser Zellen von den Keimzellen, doch dorsal

sind die Schichten noch nicht durchgreifend voneinander getrennt. Dieses Bild wird auf den folgenden Stadien hauptsächlich dadurch verändert, dass sich einmal die Markschicht bildet, dann die Purkinjezellschicht sich deutlicher differenziert unter stärkster Entfaltung zur Zeit der Geburt, endlich dass durch mächtigen Zuwachs an Elementen aus dem Keimlager jener ganze Wulst der Dorsolateralzone entsteht. Besonders beachtenswert ist auch hierbei, dass der Entwicklungsprozess dieses Gebildes nicht etwa mit

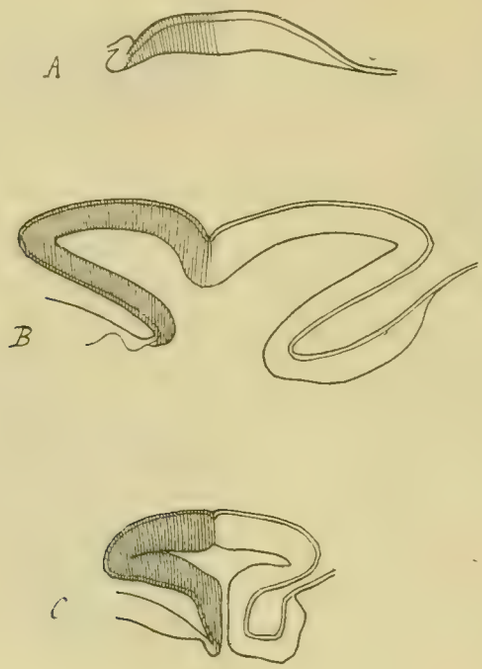


Fig. 61.

Scymnus lichia, Entwicklung des Hinterhirns im Längsschnitt auf drei verschiedenen Stadien. *A* Embryo 4,2 cm; *B* Embryo 10 cm; *C* Erwachsen. Die Bilder sind auf ähnliche Grösse reduziert.

der Geburt prinzipiell abgeschlossen wird, sondern bis ins spätere Leben fortdauert und ferner, dass die Purkinjezellen ihre grösste Vollkommenheit zur Zeit der Geburt aufweisen. Es erklärt uns dies, dass wir die anscheinend höhere Vollkommenheit der Ausbildung dieser Schicht bei anderen Selachiern (z. B. Isistius), deren uns zugängliche Exemplare noch nicht als ausgewachsen betrachtet werden dürfen, nicht etwa mit Rücksicht auf die definitiven Zustände bei Scymnus zu deuten berechtigt sind.

Sodann ist ein zweiter Punkt zu beachten, der uns auf bedeutende Veränderungen hinweist, die im Laufe der Kleinhirnentwicklung vor sich gehen. Auf der Mitte etwa der Dorsomedianzone findet sich schon früh als eine kleine, sehr kurze aber sehr bestimmte Querfurche, die nur wenig auf die Lateralzonen hinübergreift, die Fovea culminis epencephali (Fig. 61). Diese Furche tritt zuerst etwa bei unterem Stadium 10 cm auf und trennt die Medianzone in zwei ungleiche Teile. Ihre Lage ergibt für die verschiedenen Stadien, verglichen mit dem Abstand zu Vorder- und Hinterkuppe des Hinterhirns folgende Werte:

	10 cm	20 cm	30 cm	41 cm
Querfurche bis Vorderkuppe	1,2 mm	2,8 mm	4,5 mm	6,4 mm
Querfurche bis Hinterkuppe	1,5 „	1,7 „	4,0 „	4,3 „
	1,25	**0,60**	**0,88**	**0,701**

Trotz der Schwankung der Zahl für das Exemplar von 30 cm, die vielleicht auf Fehlerquellen sowohl wie auf eigenartigen Verschiebungen zur Zeit der Geburt beruhen kann, erhellt aus diesen Zahlen, dass derjenige Abschnitt des Hinterhirns, der vor der Fovea culminis gelegen ist, erst später seine volle Ausbildung erlangt, als der, welcher hinter ihr liegt. Dies bestätigt auch der Augenschein, wenn wir das Hinterhirn von der dorsalen Fläche betrachten. Je früher das Embryonalstadium, umso flacher die ganze Vorderkuppe, umso spitzer sein seitlicher Kontur. Demgemäss besteht das Hinterhirn nicht aus Wandungen, die sich in axialer Richtung homodynam verhalten. Wir sind daher zu der Frage berechtigt, ob nicht die embryonal früher und konstanter auftretende kaudale Partie der ursprünglichere Teil, die Vorderkuppe aber eine Neubildung sein könne.

5. Entwicklung des Medianschnitts und der Gewebe.

Ohne auf die Einzelheiten der Gewebsentwicklung einzutreten, haben wir hier nur näher zu erörtern, welche Entwicklung dieses Gewebe auf verschiedenen Stufen des embryonalen Lebens zeigt und wie die Entwicklung des einen Gewebes, der Gangliosa, modifizierend in die des anderen, der Neuroglia, übergreift.

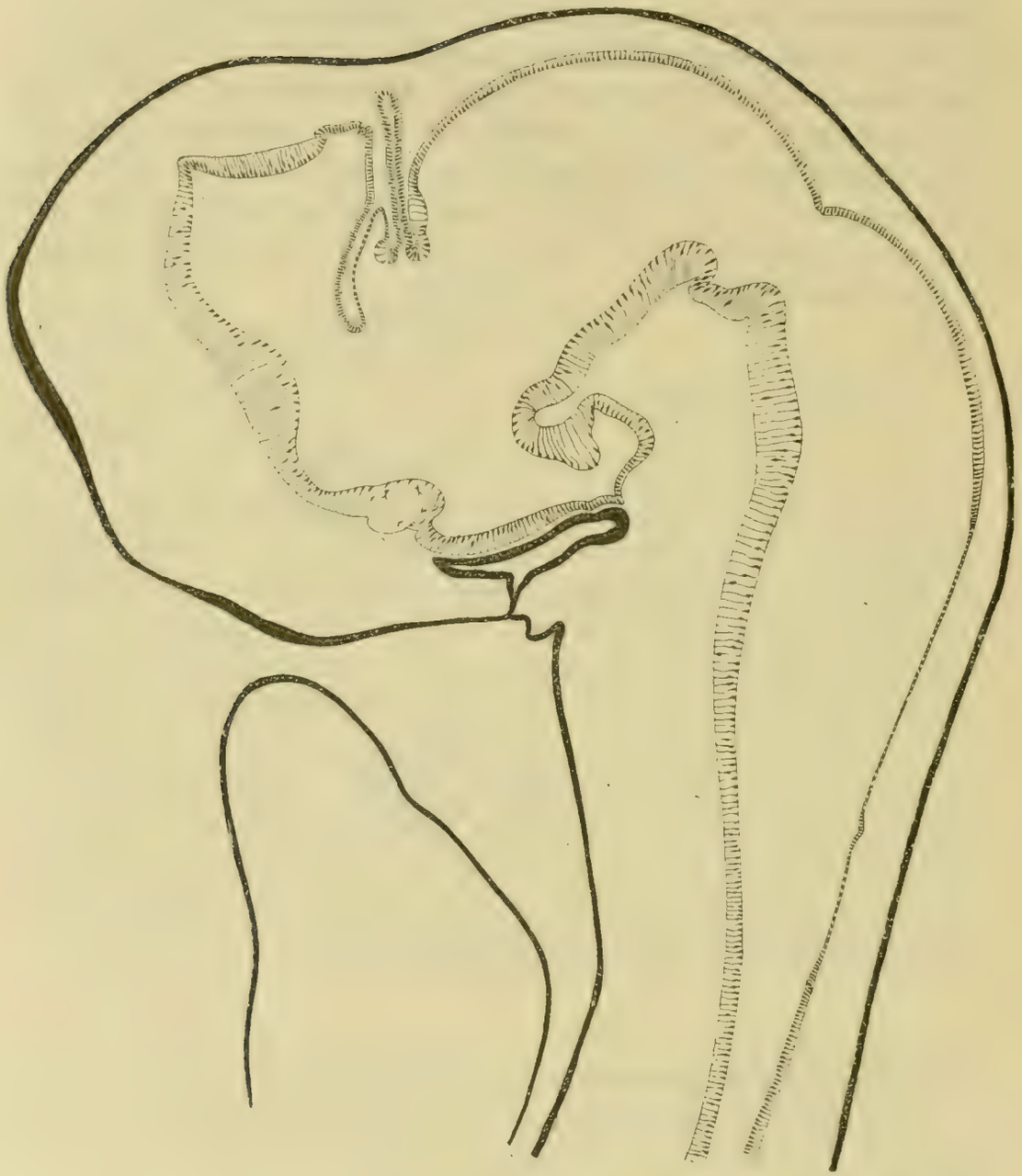


Fig. 62.

Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Medianschnitt mit Eintragung der histologischen Elemente der Stützsubstanz. 20fach vergr. Für die Bezeichnungen vgl. Fig. 51.

Wir vergleichen zunächst den Medianschnitt durch das Hirn eines Embryo von 4,2 cm mit dem Medianschnitt des definitiven Hirns. Die Decke der Rautengrube ist bereits zu einem Pflasterepithel abgeflacht, das allseitig allmählich in Brachypilosa übergeht. So auch nach der Medianzone des Hinterhirns hin, deren Struktur sich wenig über ein langgestrecktes Zylinderepithel erhebt. Schon ist die Vordergrenze des Hinterhirns daran kenntlich, dass die Medianzone wieder etwas nachlässt und ausserdem, dass ein kleiner Halbmond von Randschleier auftritt, der bereits kreuzende Fasern im Querschnitt enthält. Jetzt verdickt sich die Medianzone wiederum unter Streckung der Elemente etwas über den beim Hinterhirn erreichten Grad; immerhin ist auch dieses Gewebe noch als Brachypilosa anzusprechen. Sein Charakter verändert sich auch an der vorderen Wölbung nicht, wo bereits ein deutlicher Randschleier besteht, der durchkreuzende Fasern der optischen Bahnen beherbergt. Erst jetzt in dem bisquitförmigen Längsschnitt der Commissura posterior erhebt sich die Pilosa auf eine grössere Dicke. Die Kerne schichten sich 3—4fach und der Randschleier schwillt auf dieselbe Breite wie die Kernschicht an. Von einem Schaltstück kann auf diesem Stadium noch nicht geredet werden, denn die auf zylindrische Elemente herabgesunkene Medianzone biegt direkt in den Zirbelstiel um, der zwar den Charakter eines Zylinderepithels beibehält, doch mit alternierenden Kernen. Vor der Commissura superior, die sich wie die posterior verhält, nimmt bereits auf diesem Stadium das Epithel den Charakter von Pflasterepithel an, den es auf dem hinteren Blatt des Velum beibehält, um dann sich bis zum Übergang in die Lamina supraneuroporica gleich zu bleiben. Hier streckt es sich plötzlich wieder zu Formen, die wir immer noch als brachypilös bezeichnen würden. Hier auch erst treten zu den etwa 7—8 Schichten von Zellen, die als Spongioblasten und als Keimzellen zu bezeichnen sind, Elemente hinzu, die sich als eine äussere Schicht abheben und den Charakter von Neuroblasten haben. Im Bereich des Recessus neuroporicus wird wiederum die Neuroglia in brachypilösem Zustand und mit Reduktion der Kerne auf 3—4 Schichten befunden, schwillt dann aber allmählich zu der Lamina infraneuroporica an, die zu höherer Differenzierung bereits auf diesem Stadium gediehen ist. Ausserhalb der ventrikulären Zellkernschicht nämlich, welche auch etwa 7—8 Lagen erkennen lässt, besteht bereits ein

nach beiden Seiten hin ausgespitztes Band gebildet von etwa zehn Schichten von Ganglienzellen und ausserdem eine von ihnen deutlich abgesonderte Schicht ebensolcher, die mehr peripher liegen und tangential gestellte Kerne besitzen. Aber trotz dieser starken Entfaltung der Ganglienzellen ist noch ein ziemlich breiter kernloser Randschleier vorhanden. Die ganze Schicht von Spongioblasten und Keimzellen setzt sich über den Recessus praeopticus und den Opticusquerschnitt fort. Im Bereich des Opticus sind denn auch schon Zellen bemerkbar, die als Asteroblasten anzusprechen sind, nur durchsetzen sie noch nicht das ganze Gewebe, sondern beginnen erst peripheriewärts auszuwandern. Am Recessus postopticus bildet sich die Medianzone zurück, um bis nach der Trichterspitze ohne Randschleier verlaufend, auf zirka vier Zellschichten hinabzusinken. Von der Trichterspitze an nimmt die Medianzone zunächst an Zahl der Kernschichten successive zu bis zur Haubenregion. Hier tritt wiederum ein Randschleier auf und mit Ausnahme der Plica ventralis in steter Steigerung streckt sich die Pilosa successive. Streng im Medianschnitt besteht jedoch auch nur das Keimzellenlager und der Randschleier. Höchstens da und dort dringen einzelne Elemente aus ersterer in letzteren vor.

Die wichtigsten Veränderungen, welche der Medianschnitt und seine Stützsubstanz erfährt, bestehen in folgendem:

1. Wo Epithelien an verdickte Hirnpartien stossen, wird der Übergang der Stützelemente ein rascher wechselnder.
2. Es verdicken sich im Verlauf der weiteren Entwicklung
   a) das hintere Blatt der Medianzone des Cerebellums erheblich, die des übrigen Cerebellums nur wenig;
   b) die Medianzone des Mittelhirns;
   c) die Commissura superior;
   d) der Boden der Rautengrube. In diesem kommt es auch zur Ausbildung höherer Neurogliaelemente, von Übergangsformen zwischen Pilosa und Asterosa;
   e) die Lamina supraneuroporica, welche aber wie im embryonalen Hirn auch im erwachsenen hinter der L. infraneuroporica zurückbleibt; in beiden, aber mehr in letzterer, kommt es zur Ausbildung echter Asterocyten.

f) Besonders mächtig und verbunden mit der stärksten Differenzierung zu einer extremen Form von Asterosa wird die Stützsubstanz des Opticus ausgebildet, deren Entstehung auf diesem Stadium erst ihren Anfang nimmt.

3. Es verdünnen sich:
   a) alle epithelialen Partien;
   b) der Recessus praeopticus;
   c) der Recessus postopticus.

4. Als selbständiger kleiner Abschnitt entsteht durch Streckung das Schaltstück.

Im ganzen erscheinen diese Veränderungen vom embryonalen zum erwachsenen Medianschnitt jedoch geringfügig, wenn man daneben stellt, was alles keiner Veränderung unterliegt. Ausserdem haben diese Veränderungen alle unter sich gemein, dass sie nur Gewebe beschlagen, die auf dem frühen Stadium von 4,2 cm bereits über den Zustand der Epitheliosa befunden werden und dass ferner die erheblichsten Veränderungen in Massenzuwachs und weiterer Differenzierung derjenigen Teile bestehen, die umso grösser sind, je entfernter die Stützsubstanz bereits im embryonalen Zustande vom ursprünglichen war. Es lässt sich also aus diesem Vergleich schliessen, dass die Stützsubstanz im individuellen Leben äusserst langsamen Umwandlungen unterworfen und dementsprechend auch phylogenetisch von grosser Zähigkeit ist.

Ferner erhebt sich die Frage nach dem Zusammenhang ihrer Ausbildung und derjenigen der eigentlich nervösen Substanz. Wenn wir einen Embryo wie den oben geschilderten auf seine Gangliosa untersuchen, so erscheint diese bei ihm noch sehr wenig ausgebildet. Im Vorderhirn, den Lobi inferiores, dem Mittelhirn, dem Kleinhirn und dem verlängerten Mark beginnen zwar Schichten von Ganglienzellen unterscheidbar zu werden und die Masse des Hirnrohrs zu verdicken. Doch steht die Verdickung des Hirnrohrs viel mehr unter dem Einfluss der Zunahme des Randschleiers, in dem nachträglich die Ganglienzellen leicht Unterkunft finden. Ausser der Verdickung in der Lamina infraneuroporica haben wir bereits im Medianschnitt nur solche Verdickungen angetroffen, die lediglich auf Massenzunahme

durch die Faserbahnen beruhen. In dem Quantum dieser also haben wir das mechanische Agens für die Wandverdickungen in erster Linie zu suchen, nicht in der Zunahme der Ganglienzellen. Was am Medianschnitt so durchsichtig ist, das gilt auch für die Lateralzonen, wo die Substanzvermehrung in erster Linie auf der

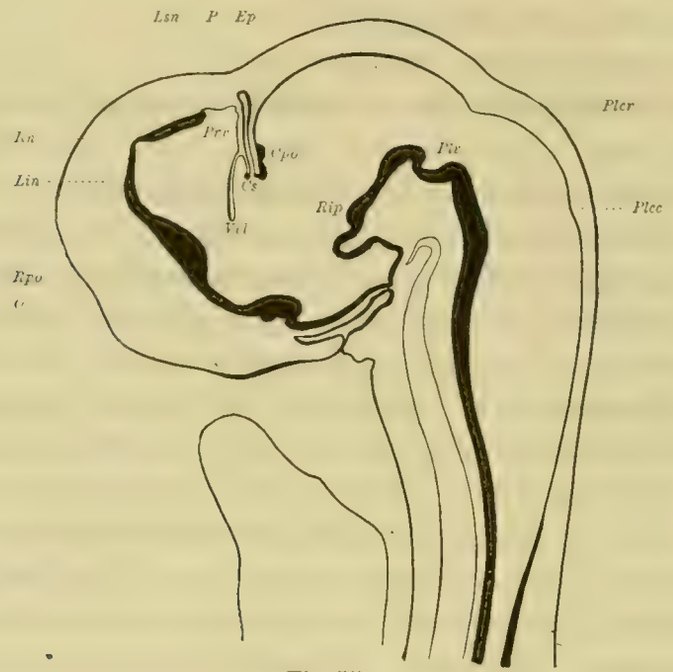


Fig. 55.

Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Stadium II. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 10fach vergr.

Cpo = Commissura posterior,	*O* = Opticus,	*Prv* = Prävelarer Abschnitt,
Cs = Commissura superior,	*P* = Paraphysis,	*Rip* = Recessus interpeduncularis,
Ep = Epiphysis,	*Plcc* = Plica cerebellaris caudalis,	*Rn* = Recessus neuroporicus,
Lin = Lamina infraneuroporica,	*Plcr* = Plica cerebellaris rostralis,	*Rpo* = Recessus praeopticus,
Ls = Laminasupraneuroporica,	*Plv* = Plica ventralis,	*Vel* = Velum.

Bildung der Faserbahnen beruht. Verstärkend mag hierbei die Ansammlung von Ganglienzellen mitwirken, aber nicht bestimmend. Ihre Wirkung macht sich erst geltend, wenn die Substanzzunahme der Gangliosa schon das Gleichgewicht zwischen der Stützsubstanz der Lateralzonen und der der Medianzonen stört. Daher sind die späteren Substanzverdickungen der oben erwähnten Partien nicht ausschliesslich mehr auf Kosten der Zu-

nahme der Faserbahnen zu setzen, sondern rühren wohl zum Teil auch von der Zunahme der Ganglienzellen her; nur lässt sich dieser Anteil von jenem nicht strikte sondern.

Fig. 63.

Scymnus lichia, Embryo 10 cm. Stadium III. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 9fach vergr.

Beifolgend sind nochmals die vier Medianschnitte von Stadium II, III, IV und dem definitiven Gehirn zusammengestellt, um die Entwicklung dieses Bildes in seiner Gesamtheit recht deutlich vor Augen treten zu lassen, zugleich als Masstab für die Beurteilung später zu beschreibender Verhältnisse bei anderen Selachiern, die uns nötigen werden, an die hier festgestellten Stadien anzuknüpfen.

Die Entwicklung der Einzelzellen ist so vielfach behandelt und für die Selachier so wenig spezifisch, dass wir keinen Grund haben,

Fig. 64.

Scymnus lichia, Embryo 18 cm. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 6fach vergr.

sie aufs neue hier zu schildern. Es genügt, hervorzuheben, dass die Selachier für das Studium der Entwicklung einzelner Zellformen vielleicht ein noch weniger günstiges Objekt sind, als andere Fische, da die Elemente auch im erwachsenen Zustande relativ generell bleiben.

Ar = Auricula rhombencephali,
Cal = Calamus scriptorius,
Cip = Corpus interpedunculare,
Cp = Commissura posterior,
Cs = Commisura superior,
Die = Diencephalon,
Ep = Epiphysis (Zirbel),
Epe = Epencephalon,
Fce = Fovea culminis epencephali,
Hpe = Hypencephalon,
Inf = Infundibulum,
Li = Lamina infraneuroporica,
Lmh = Lobus medianus hypophyseos,
Lmsv = Lobus medianus Sacci vasculosi,
Lph = Lobus posterior hypophyseos,
Ls = Lamina supraneuroporica,
Lth = Lobus terminalis hypophyseos,
Mse = Mesencephalon,
Mye = Myelencephalon,
Msp = Medulla spinalis,
Opt = N. opticus,
P = Paraphysis,
Pa = Pars anterior laminae infraneuroporicae,
Pmt = Pars media tegminis rhombencephali,
Pp = Pars posterior laminae infraneuroporicae,
Prv = Prävelarer Abschnitt,
Pvt = Plica ventralis encephali,
Rn = Recessus neuroporicus,
Roc = Recessus occipitalis,
Rpae = Recessus praeopticus,
Rpo = Recessus postopticus,
S = Schaltstück, Pars intercalaris diencephali,
Str = Sulcus triangularis,
Telc = Telencephalon,
V = Velum,
Vt = Vesicula terminalis.

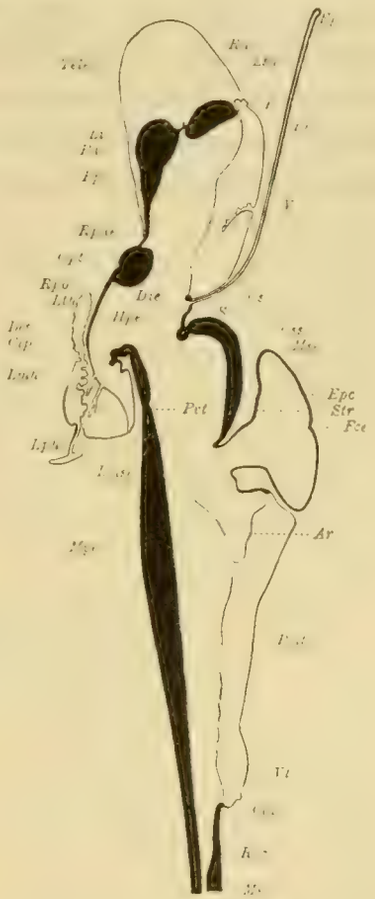


Fig. 20.
Scymnus lichia, Medianschnitt des Hirns, man vergleiche für die histologische Differenzierung desselben Taf. V. $1^1/_2$ fach vergr.

Das definitive Bild der histologischen Struktur ist eine sehr späte, erst postembryonal sich gestaltende Erscheinung. Es lässt sich nicht leugnen, dass bei Scymnus 10 cm die meisten Züge der definitiven Struktur angelegt sind, aber auch kaum mehr als angelegt. Was überhaupt erst jetzt zur Ausbildung gelangt, das sind die grossen Faserbahnen und

besonders deren Markscheiden. Durch ihre Zunahme wird der Querschnitt wesentlich verändert und ferner erhalten die Dorsolateralzonen innerhalb des Hinterhirns und Rautenhirns erst ihre Massenausbildung dadurch, dass die Zahl ihrer Zellen erheblich zunimmt und erst jetzt der Wulst beginnt, sich im Querschnitt halbkreisförmig auszubilden. Beide Veränderungen stehen offenbar in Zusammenhang mit der Lebensweise, die erst nach der Geburt die grossen motorischen Bahnen erfordert, erst jetzt auch die Ausbildung sensibler Zentralstationen für die Hautsinnesorgane, die sich ja so spät ausbilden, wie Minckert für Spinax nachgewiesen hat.

VII. Zusammenfassung über das Hirn von Scymnus.

Um nochmals die wichtigsten Züge des Scymnusgehirns zu einem Gesamtbild zusammenzufassen, bedarf es nicht allein der Kenntnis des Objektes selbst in seiner gegebenen Begrenzung, sondern zugleich bereits der Erfahrungen, die aus einer Vergleichung dieses Objektes mit dem gesamten Material hervorgehen, wofern dieses mit ihm durch Vergleichung verknüpft werden kann. Müssen wir auch die Durchführung der Vergleichung den späteren Teilen überlassen, so können doch einzelne Resultate derselben hier schon Stelle finden. Es ist dies schon darum geboten, dass nicht falsche Präsumptionen über unsere Auffassung des Scymnusgehirns entstehen, die sich daraus ergeben könnten, dass wir es als Ausgangspunkt unserer Betrachtung gewählt haben.

Die Stellung des Scymnusgehirns

I. Innerhalb des Selachiergehirns.

Sie ist schon mehrfach berührt worden. Zusammenfassend ist hier daran zu erinnern, dass als nicht primitiv zu beurteilen sind:

1. Das Verhalten der Hypophyse, speziell ihres neuralen Anteils, der bei Laemargus rostratus primitiver ist.

2. Die Längsstreckung der Zwischenhirngegend in Zusammenhang mit der Nachbarschaft der Augen. Primitiver bei vielen Haien.

3. Die Streckung und Dünnwandigkeit der Tractus olfactorii. Primitiver bei Centrina, Echinorhinus, Scylliden, Crossorhinus, Musteliden, Galeiden.

II. Innerhalb des Fischgehirns.

Hierbei können wir nunmehr die primitiven Eigenschaften, welche Scymnus fehlen, aber anderen Selachiern zu eigen sind, einrechnen und damit nach der Stellung des Selachierhirns im Kreise der Fischgehirne

überhaupt fragen. Für die Diskussion dieser Frage verweise ich vorläufig auf meine Ausführungen in der Monographie des Ceratodusgehirns. Jetzt ist nur vom Scymnushirn an nicht primitiven Eigenschaften in Abzug zu bringen, was dort und im weiteren Text jener Arbeit als solches nachgewiesen ist.

1. Die Abgliederung der Endblase von der Rautendecke.
2. Die Faltung der Rautendecke.
3. Die spezielle Ausbildung des Hinterhirns, insbesondere dessen Vorderkuppe.
4. Die hohe Differenzierung der Gangliosa und im allgemeinen des Hinterhirns.
5. Die relativ starke Ausbildung der Lobi optici und folglich auch der Medianzone des Mittelhirns.
6. Die spezielle Konfiguration der Decke des dritten Ventrikels, insbesondere die Bildung von Plexus hemisphaerium.
7. Die Ausbildung des Saccus vasculosus.
8. Die Opticusgegend.
9. Die grosse Massenentfaltung des Vorderhirns.
10. Die Verdickung der Laminae supra- und infraneuroporica.
11. Die Tubercula dorsalia des Vorderhirns und überhaupt dessen spezielle Konfiguration.

III. Innerhalb des Vertebratenhirns.

Dementsprechend sind auch nicht primitiv alle geweblichen Eigentümlichkeiten, die auf diese bereits als Modifikationen eines Typus aufzufassenden Einrichtungen zurückgehen. An diesem Punkte wird später unsere Beweisführung wieder ansetzen, wenn es sich darum handeln wird, das primitive Wirbeltiergehirn darzustellen. Für jetzt mag nur daraus erhellen, dass eine Behauptung, das Gehirn von Scymnus sei in allen Stücken als Typus zu betrachten, nicht kann aufgestellt werden, dass daher auch die Frage, ist das Ganoidenhirn oder das Selachierhirn, sind die Ganoiden oder die Selachier primitiver, gar nicht zu beantworten, weil falsch gestellt ist. Es ist vielmehr unsere Aufgabe, für jedes einzelne Organisations-

verhältnis zu bestimmen, wie es abzuschätzen sei. Für die Gesamtorganismen wird den Entscheid Niemand mehr fällen wollen, der weiss, wie relativ gross die Anzahl von Neuerwerbungen in der Organisation beider Fischabteilungen ist und wie relativ lückenhaft im Vergleich gerade zu dieser Frage, die Antwort, die die Paläontologie zu geben vermag.

Damit wäre wohl zur Genüge gekennzeichnet, inwiefern uns das Scymnusgehirn als solches für typisch gilt, inwiefern nicht. Auf die Stellung seines Trägers, des einzigen Vertreters der Gattung und Familie ist bereits einleitungsweise hingewiesen; sein relativer Abstand von dem Typus Selachier, wie er sich ebenfalls nur aus der Berücksichtigung primitiver Zustände ergibt, die bei verschiedenen Selachiern und sogar mit teilweise hoher Spezialisierung verbunden auftreten, kann vorläufig aus dem Spiel gelassen werden. Es sei hier nur angedeutet, dass wir ihn in Rechnung setzen.

Viel einschneidender gegenüber den herrschenden Anschauungen verschiebt sich die Auffassung vom **Wertverhältnis des Zentral-Nervensystems** und zwar sowohl, wenn wir die gegenseitigen Beziehungen der Teile des Hirns unter sich, als auch die Beziehungen des Gesamthirns zu den übrigen Organen und zu der Gesamtheit des Kopfes und des Körpers erwägen.

Die hohe Bewertung des Hirns, wie sie allgemein gültig ist, setzt sich zusammen einmal aus der Verallgemeinerung, dass man die psychische Dignität des Menschenhirns auf die Wirbeltierreihe überträgt, weil auch alle anatomischen Bemühungen vorzugsweise darauf zielen, das Übereinstimmende nachzuweisen und das Unterscheidende, wo es nicht etwa, wie bei den elektrischen Fischen eine besondere funktionelle Verknüpfung zulässt, gering zu achten. Sodann hat man beim embryonalen Hirn besonders die einfachen und durchsichtigen Formen gerne gesehen und ins phylogenetische deuten zu müssen geglaubt, ganz abgesehen davon, dass trotz wiederholter scharfer Zurückweisungen immer wieder Bemühungen darauf gerichtet waren, eine Quergliederung des Hirns herauszulesen.

In bewusstem Gegensatz zu diesen, auf mangelhaftem Material, auf

grober Deduktion und auf Übereinkommen beruhenden Vorstellungen ist folgendes zu behaupten:

1. Die Ansichten über die Dignität des Hirns bei höheren Tieren sind für diese zu reservieren; dagegen ist die funktionelle Dignität eines Hirns, wie es uns bei Scymnus entgegentritt, kaum gering genug anzuschlagen, in Übereinstimmung übrigens mit den Resultaten der Experimentalphysiologie (Steiner).

2. Insbesondere muss davon abgesehen werden, dem Vorderhirn hier die Bedeutung zuschreiben zu wollen, die man schon an diese Bezeichnung geknüpft glaubt.

3. Den höchsten Differenzierungsgrad an Masse, Substanz und Ausbildung erfährt vielmehr die Gegend zwischen der Zirbel und dem Calamus scriptorius, insbesondere das Hinterhirn, das auch in der Embryonalentwicklung den bedeutendsten, nicht aus grob mechanischen Bedingungen hervorgehenden, sondern autogenen Formwandlungen ausgesetzt ist.

4. Die Übertragung metamerentheoretischer Spekulation durch die Nervenwurzeln auf das Gehirn erweist sich schon angesichts des wirklichen Baues des Trigeminofacialis-Komplexes am Erwachsenen und angesichts des transitorischen Charakters der Neuromerie als fruchtlos.

5. Anstatt der Quergliederung des Hirns, die sich weder in Gestalt der Bläschentheorie noch in der der Neuromerie halten lässt, ist die Längsgliederung als Basis für jegliche Vergleichung zu wählen.

6. Anstatt des Nachweises der Richtung von Faserbahnen, die mehr oder weniger durch die Wirbeltierreihe verbreitet sind, deren Zugehörigkeit zu den entsprechenden Organen indess nicht zu erweisen ist, gibt die Masse von Faserbahnen und Zellen für den Differenzierungsgrad des Nervenrohrs einen zuverlässigeren Wertmesser, zugleich auch für den mechanischen Einfluss, den einzelne Hirnteile aufeinander ausüben.

7. Anstatt der Differenzierungsform einzelner Zellen und ihrer speziellen Struktur sind vorwiegend die Zellmassen zu berücksichtigen.

8. Den schärfsten Wertmesser für den Differenzierungsgrad gibt überhaupt nicht die Gangliosa, sondern die Neuroglia ab.

9. Anstatt zu phyletischen Deutungen erweist sich die Embryonalentwicklung des Gehirns als wertvoll zu biomechanischen. Bei biomechanischer Deutung lässt sich eine Reihe von Formerscheinungen, die dem Hirn eigentümlich sind, aus den Bedingungen des wachsenden Hirnrohrs und seiner Beziehungen zum Kopf und dessen Organen verstehen.

Man ersieht hieraus, dass ein gewisser, aber scharf zu umschreibender Wert dem Gehirn dieser niederen Wirbeltiere nicht abgesprochen werden soll, dass aber zugleich alle Wertverschiebungen, die wir vornehmen, in ein und derselben Richtung liegen, nämlich:

1. **Ablösung von Übertragungen physiologischer Verallgemeinerungen auf das genetisch fruchtbarer zu verknüpfende anatomische Detail;**

2. **Induktion anstatt der Deduktion und zwar auf Grund eines wesentlich veränderten und vervollkommneten Materialbestandes.**

Noch ist hier andeutungsweise und einem späteren Abschnitte vorgreifend zu bemerken, dass eine genetische Auffassung des Zentral-Nervensystems auch die Wertverhältnisse zwischen dem wachsenden Hirnrohr und den mit ihm wachsenden Epithelien, aus denen andere Organsysteme werden, modifiziert. In letzter Linie verschiebt sich damit auch die Bedeutung des Hirns und einzelner seiner Teile für die Verwandtschaft niederer Vertebrateen.

Ich lasse mit bestimmter Absicht alle aus dem Selachierhirn auf die Urgeschichte des Vertebratenhirns sich ergebenden Schlussfolgerungen noch beiseite und verzichte daher auch jetzt darauf, die hierauf bezüglichen Theorien zu diskutieren. Es scheint mir, dass erst das Verständnis für die Stellung des primitiven Selachierhirns aus dem Studium der Phylogenie des Hirns induktiv innerhalb der Selachier gewonnen werden muss, ferner das Verständnis für die Stellung des Selachierhirns im Vergleich zum Fischgehirn. Dieser Aufgabe soll ein ausgedehnter Abschnitt des dritten Teils unserer Arbeit gewidmet sein, wo dann auch die Theorien, deren empirisches Substrat und deren geschichtliche Stellung ihre Würdigung finden sollen.

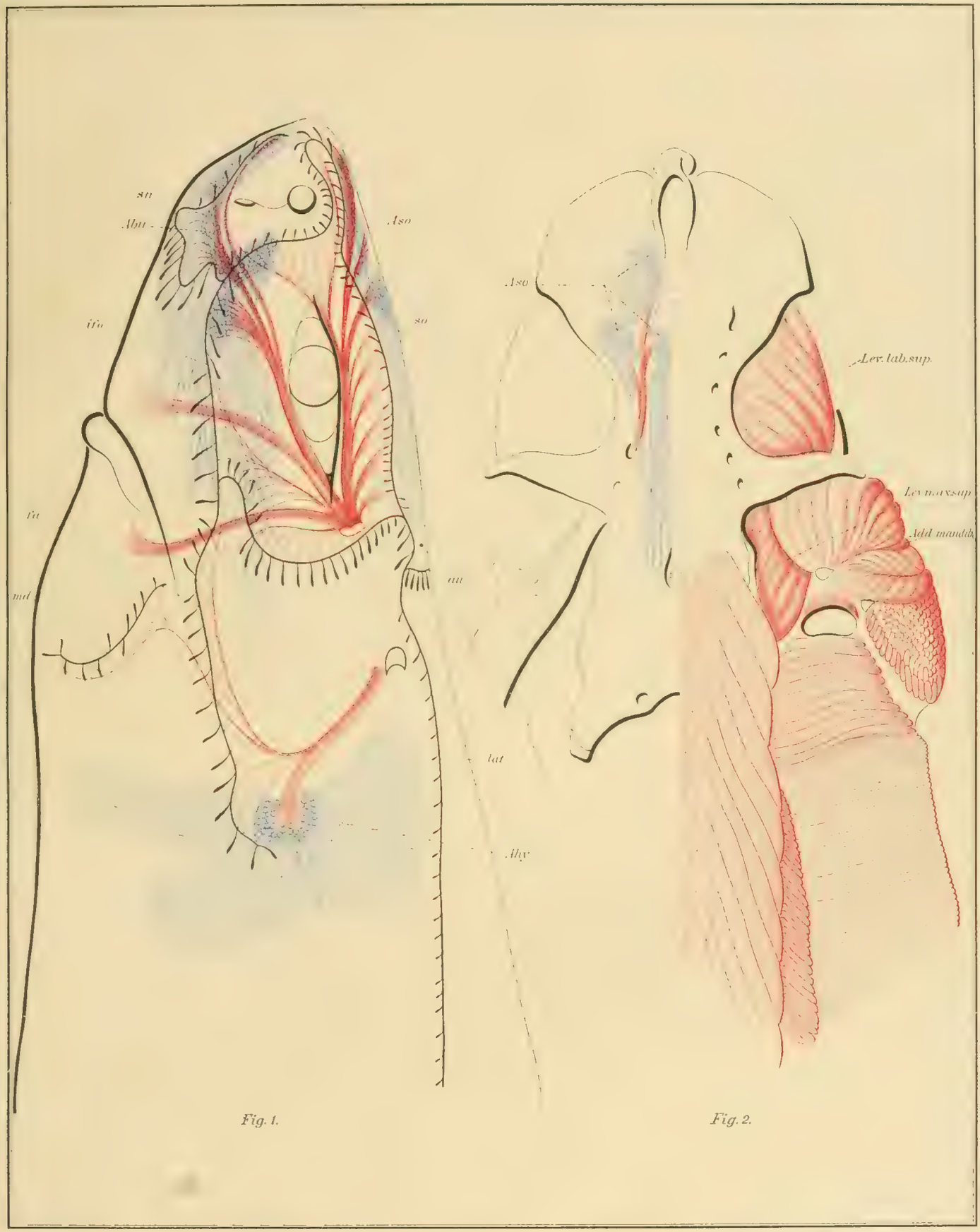
VIII. Verzeichnis der Textfiguren und Tafeln.

Textfiguren.

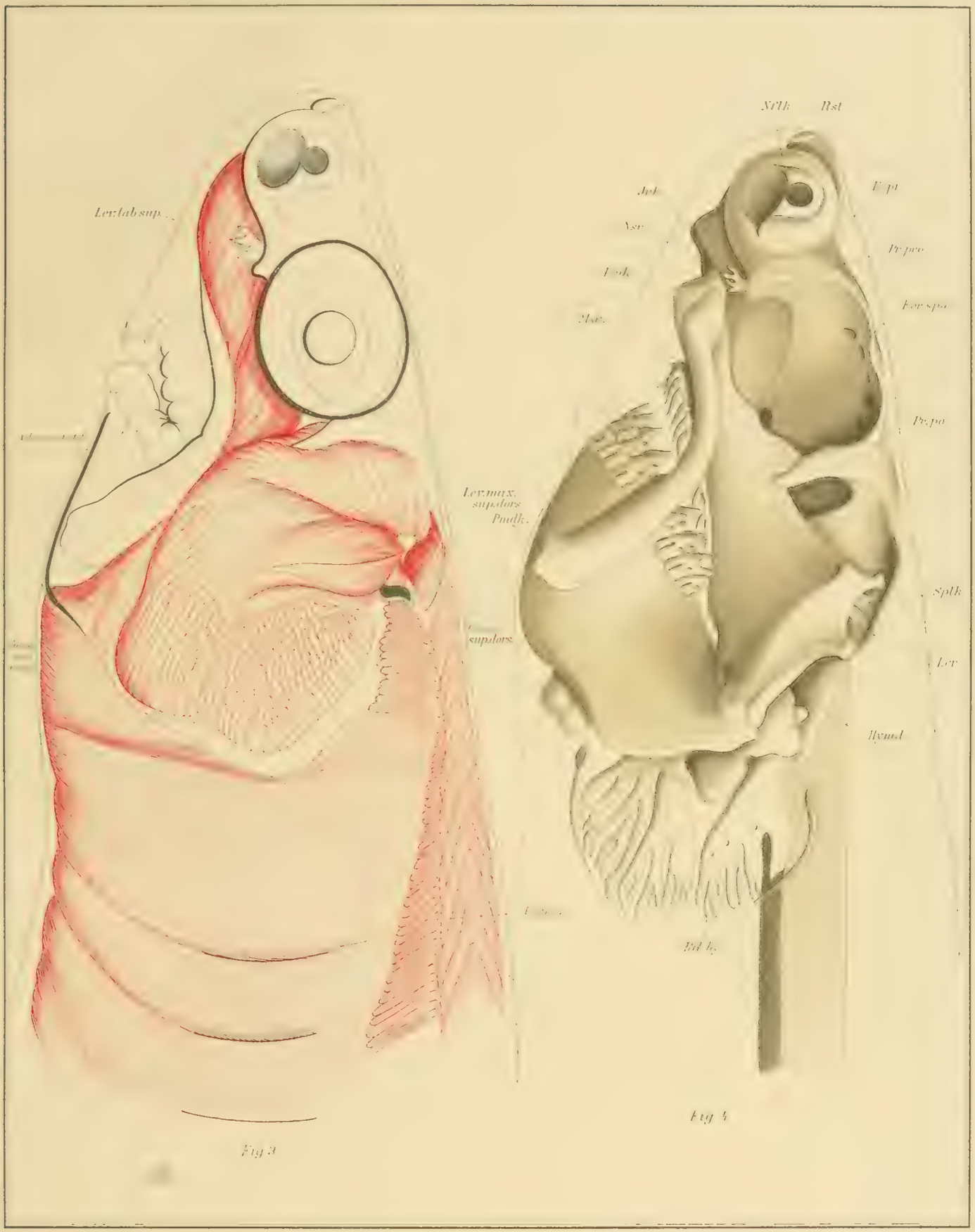
1. Schema der Längszonen des Zentral-Nervensystems an einem Querschnitt demonstriert. S. 277.
2. Schema der verschiedenen Formen der Gangliosa. S. 280.
3. Schematischer Querschnitt durch die Nervensubstanz zur Darstellung der verschiedenen Differenzierungsgrade des Stützgewebes. S. 282.
4. Linearer Umriss von Scymnus lichia. $^1/_6$ nat. Gr. S. 293.
5. Scymnus lichia, Kopf in dorsaler Ansicht, links bis über die Mitte sind das Hirn und die angrenzenden Organe blossgelegt. Nat. Gr. S. 304.
6. Scymnus lichia, Medianschnitt durch den Kopf, das Gehirn ist nicht zerlegt, sondern in toto dargestellt. $^3/_4$ nat. Gr. S. 310.
7. Scymnus lichia, Wachsausguss der Schädelhöhle in ventraler (*a*), dorsaler (*b*) und lateraler (*c*) Ansicht. Nat. Gr. S. 311.
8. Scymnus lichia, Embryo 18 cm. Gehirn in situ von oben. 2 fach vergr. S. 311.
9. Scymnus lichia, Gehirn in dorsaler (*A*), lateraler (*B*), ventraler (*C*) Ansicht. $1^1/_2$ fach vergr. S. 322.
10. Scymnus lichia, Ursprung des Vagus und Glossopharyngeus in dorsaler Ansicht. 3 fach vergr. S. 324.
11. Scymnus lichia, Komplex der Wurzeln des Acusticofacialis und des Trigeminus der rechten Seite, von der Medianebene gesehen. 10 fach vergr. S. 325.
12. Scymnus lichia, Rautengrube nach Entfernung der Rautendecke in dorsaler Ansicht. 2 fach vergr. S. 327.
13. Schematische Übersicht der Decke des dritten Ventrikels und ihrer Teile von Scymnus lichia. S. 330.
14. Scymnus lichia, Decke des dritten Ventrikel in ventraler Ansicht. Die linke (in der Figur rechte) Hälfte ist etwas rückwärts gebogen, um das Faltensystem der Plexus hemisphaerium zu zeigen. Vom postvelaren Abschnitt ist nur das Zirbelpolster abgebildet. 3 fach vergr. S. 331.
15. Spinax niger, Ursprung der Zirbel, Medianschnitt. 60 fach vergr. S. 333.
16. Scymnus lichia, Querschnitt des Zirbelstiels. 60 fach vergr. S. 334.
17. Scymnus lichia, Unterhirn, rechte Hälfte in ventraler Ansicht nach Abtragung des Bodens durch einen Horizontalschnitt. 3 fach vergr. S. 335.

18. Scymnus lichia, Nervus terminalis der rechten Seite von der Medianebene her gesehen. 3 fach vergr. S. 339.
19. Scymnus lichia, Hirn ohne die Decken des dritten und vierten Ventrikels mit Eintragung der Oberflächenskulptur. 2 fach vergr. S. 341.
20. Scymnus lichia, Medianschnitt des Hirns. $1^1/_2$ fach vergr. S. 347.
21. Scymnus lichia, Innenfläche des Hirns und deren Skulptur. 2 fach vergr. S. 354.
22. Scymnus lichia, Embryo 10 cm. Medianschnitt durch den Recessus neuroporicus. 60 fach vergr. S. 355.
23. Scymnus lichia, Querschnitt durch die linke Seite des Rückenmarks. 25 fach vergr. S. 364.
24. Scyllium catulus, Querschnitt durch die linke Hälfte des Rückenmarks. Stützsubstanz. Silberpräparat. 40 fach vergr. S. 366 u. 370.
25. Scymnus lichia 30 cm. Querschnitt der Oblongata, Stützsubstanz im Trigonum postcalamicum. 40 fach vergr. S. 371.
26. Scymnus lichia, Ausschnitt aus der Ventrolateralzone der Oblongata. Stützsubstanz. Silberpräparat. 40 fach vergr. S. 372.
27. Scyllium canicula, Medianschnitt des Hinterhirns, Zellen der Brachypilosa. Silberpräparat. 60 fach vergr. S. 374.
28. Spinax niger, Querschnitt des Hinterhirns im Bereich der Medianzone, Übergang der Brachypilosa (Dorsomedianzone) in Makropilosa (Dorsolateralzone). 60 fach vergr. S. 374.
29. Scyllium catulus, Querschnitt des Lobus opticus. Stützsubstanz (Makropilosa). Silberpräparat. 40 fach vergr. S. 375.
30. Centrophorus granulosus, Lobus opticus, laterodorsaler Querschnitt, Stützsubstanz (Piloasterosa). Silberpräparat. 40 fach vergr. S. 376.
31. Scyllium catulus, Lobus inferior, Querschnitt, Stütz- und Ganglienzellen. 40 fach vergr. S. 377.
32. Scyllium catulus, Haubenregion, Längsschnitt, Stützsubstanz. Silberpräparat. 60 fach vergr. S. 377.
33. Scyllium catulus, Trichterwand, Stützsubstanz. Silberpräparat. 60 fach vergr. S. 377.
34. Scymnus lichia 30 cm, Mittelhirn, Medianzone, Elemente der Stützsubstanz. 40 fach vergr. S. 378.
35. Scymnus lichia, Opticuskreuzung, Querschnitt. Einzelne Asterocyten mit Silber imprägniert, deren Fortsätze in der Richtung der kreuzenden Opticusfasern verlaufen. 60 fach vergr. S. 379.
36. Scyllium catulus, rechter Bulbus olfactorius, Horizontalschnitt, Stützsubstanz, Ganglienzellen und Mitralzellen. Silberpräparat. 40 fach vergr. S. 380.
37. Spinax niger, Hinterhirn, Purkinjezelle. 60 fach vergr. S. 382.
38. Spinax niger, Querschnitt, Eintritt einer Vaguswurzel in die Dorsolateralzone, Stützzellen. 40 fach vergr. S. 383.
39. Scyllium catulus, Oblongatawand, lateraler Vertikalschnitt, Einstrahlende sensible Wurzeln des Vagus, Glossopharyngeus, Acusticus in der Dorsolateralzone. 25 fach vergr. S. 384.
40. Scymnus lichia, Calamus scriptorius, Querschnitt der linken Hälfte. 8 fach vergr. S. 385.
41. Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich des Acusticusdurchtritts. 8 fach vergr. S. 386.
42. Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich Trigeminusaustritts. 8 fach vergr. S. 388.
43. Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich der kaudalen Hälfte des Hinterhirns. 8 fach vergr. S. 389.

44. Scymnus lichia, Querschnitt im Bereich der rostralen Hälfte des Hinterhirns, ventral davon der kaudale Teil des Mittelhirns und der Lobus posterior der Hypophyse. 8fach vergr. S. 390.
45. Scymnus lichia, Querschnitt auf der Höhe des Mittelhirns, ventral davon Saccus vasculosus und Hypophyse. 8fach vergr. S. 391.
46. Scymnus lichia, Querschnitt durch eine kleine Partie des Saccus vasculosus. 120fach vergr. S. 392.
47. Scymnus lichia, Querschnitt durch den oralen Teil des Mittelhirns und den Lobus inferior, ventral davon der Lobus terminalis der Hypophyse. 8fach vergr. S. 392.
48. Scymnus lichia, Querschnitt vom vorderen Rande des Opticusaustritts. 8fach vergr. S. 393.
49. Scymnus lichia, Querschnitt durch das linke Vorderhirn im Bereich des Recessus neuroporicus. 8fach vergr. S. 393.
50. Scymnus lichia, Querschnitt durch das linke Vorderhirn im Bereich des Tuberculum olfactorium. 8fach vergr. S. 393.
51. Scymnus lichia, Horizontalschnitt durch die gesamte Regio olfactoria. 8fach vergr. S. 394.
52. Scymnus lichia, Horizontalschnitt durch den Bulbus olfactorius, die Fila olfactoria und die Riechschleimhaut. 8fach vergr. S. 395.
53. Scymnus lichia, erwachsen, Verbreitung der hauptsächlichsten Modifikationen der Gewebe im Gehirn. Schematisch. S. 396.
54. Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Kopf in dorsaler Ansicht durch Xylol aufgehellt. 15fach vergr. S. 409.
55. Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 10fach vergr. S. 415.
56. Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Äussere Form des Gehirns von der linken Seite. 10fach vergr. S. 417.
57. Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Rechte Innenfläche des Gehirnrohrs und Medianschnitt. 10fach vergr. S. 418.
58. Hirn eines Scymnusembryo 10 cm von der linken Seite. 6fach vergr. S. 420.
59. Scymnus lichia, Äussere Form des Vorderhirns in fünf späten Entwicklungsstadien, dorsale Ansicht. $1^1/_2$fach vergr. S. 424.
60. Scymnus lichia, Entwicklung des Hinterhirns im Querschnitt auf vier verschiedenen Stadien. *A* und *B* 40fach, *C* und *D* 25fach vergr. S. 427.
61. Scymnus lichia, Entwicklung des Hinterhirns im Längsschnitt auf drei verschiedenen Stadien. S. 428.
62. Scymnus lichia, Embryo 4,2 cm. Medianschnitt mit Eintragung der histologischen Elemente der Stützsubstanz. 20fach vergr. S. 430.
63. Scymnus lichia, Embryo 10 cm. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 9fach vergr. S. 435.
64. Scymnus lichia, Embryo 18 cm. Medianschnitt durch Kopf und Gehirn. 6fach vergr. S. 436.



Burckhardt: Zentralnervensystem der Selachier Taf. I.



Burckhardt del.

Burckhardt: Zentralnervensystem der Selachier Taf. 2.

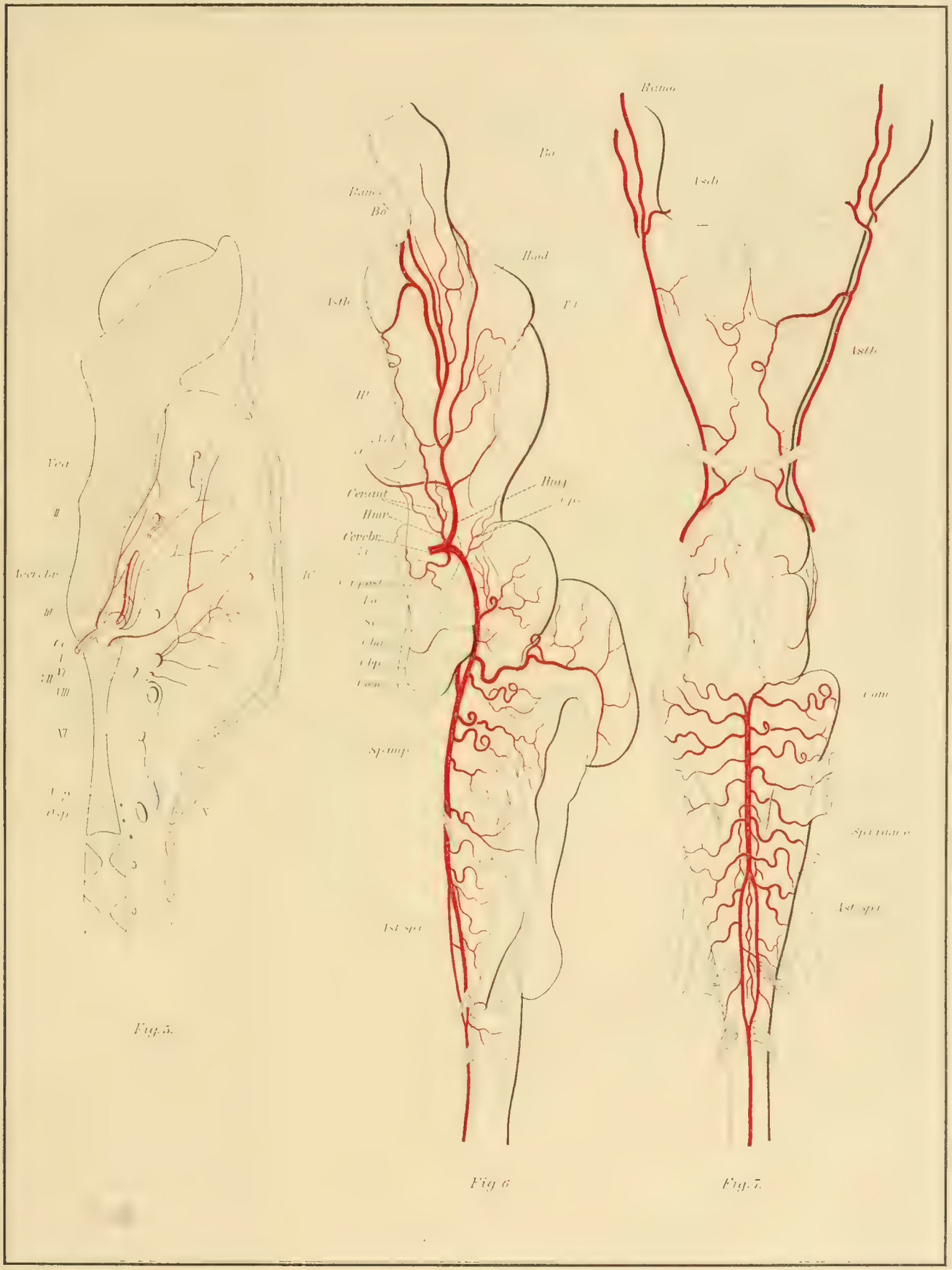


Fig. 5. *Fig. 6* *Fig. 7.*

Burckhardt del. Lith. Anst. Julius Klinkhardt Leipzig

Burckhardt: Zentralnervensystem der Selachier Taf. 3.

Burckhardt del. Lith. Anst. Julius Klinkhardt, Leipzig

Burckhardt: Zentralnervensystem der Selachier Taf. 4.

urckhardt del. Lith. Anst. Julius Klinkhardt Leipz.

Burckhardt: Zentralnervensystem der Selachier Taf. 5.

NOVA ACTA.
Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher
Band LXXIII. Nr. 3.

Studien über den Formenkreis des Trichostomum mutabile Br.

Von

Th. Herzog.

Mit 7 Tafeln Nr. VI—XII.

Eingegangen bei der Akademie am 17. Januar 1907.

HALLE.
1907.
Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.

Eine botanische Studienreise, die mich im Frühjahr 1904 während sechs Wochen kreuz und quer durch Sardinien führte, hatte in erster Linie die Erforschung der Moosflora dieser Insel zum Ziel. Ich richtete dabei meine Aufmerksamkeit besonders auf die zahlreichen Formen des *Trichostomum mutabile* Bruch, das mit zu den Charaktermoosen fast aller mediterranen Vegetationsformationen gehört und namentlich auf Sardinien von der Ebene bis ins Gebirge unter den verschiedenartigsten physikalischen sowohl wie chemischen Bedingungen vorkommt. Das ebenfalls häufige Auftreten von *Trichostomum litorale* Mitten, dessen typische Form trotz ihrer Sterilität schon beim Aufnehmen leicht zu erkennen war, und zahlreicher, wie mir schien, intermediärer Formen zwischen *T. litorale* und *T. mutabile* veranlasste mich, reichliches Material von dieser interessanten Gruppe mitzunehmen und vergleichend zu untersuchen. Da sich dabei meine Vermutungen bestätigten, entschloss ich mich zu einer umfassenden Revision der ganzen Verwandtschaftsgruppe. Die vorliegende Arbeit soll einen Überblick über diese Studien und die auf ihnen beruhenden phylogenetischen Betrachtungen geben.

Wenn diese vergleichenden Studien jedoch für die Erkenntnis der verwandtschaftlichen Beziehungen zwischen den Formen des *T. mutabile*, des *T. litorale* und der übrigen den beiden nahestehenden Formen verwertbar sein sollten, so konnte ich mich nicht auf die von mir allein gesammelten Proben beschränken, sondern musste versuchen, ein möglichst vollständiges Material zur Untersuchung herbeizuziehen, und zwar ein Material, das zugleich das gesamte Verbreitungsgebiet dieser Formengruppe umfasste.

Es ist mir nun eine angenehme Pflicht, denjenigen Herren zu danken, die mir durch Überlassung wertvoller Proben, z. T. von Originalen, die Durchführung meiner Absicht erleichterten.

Von den Herren Dismier und Thériot erhielt ich besonders zahlreiche Formen aus Frankreich, von Herrn Dixon eine ausserordentlich reichhaltige Kollektion von den britischen Inseln, von Herrn Dr. Levier ausser vielen Formen vom festländischen Italien das *T. sciophilum* C. Müll. von Neu-Seeland. Herr A. Geheeb überliess mir in liebenswürdigster Weise sein gesamtes reiches Material, das mir besonders durch einige Proben von den Makaronesischen Inseln sowie durch das Original von *T. cuspidatum* Schimp. wertvoll wurde; aus dem Herbar der Universität Göttingen erhielt ich die interessante Sammlung, welche Graf Solms-Laubach 1866 aus Algarvien mitgebracht hatte und in welcher sich die Originale der Varietät *cophocarpum* Schimp. und der Varietät *cylindricum* Schimp. von *T. mutabile* befanden, von Herrn J. Cardot ausser *T. mucronatulum* Card., das in den Formenkreis von *T. litorale* gehört, noch zahlreiche interessante Proben, z. B. *T. mutabile* von Japan und Réunion, und von Herrn Ch. Meylan einige Formen aus dem Schweizer Jura.

Allen den genannten Herren sei an dieser Stelle für ihre ausserordentlich bereitwillige Unterstützung mein verbindlichster Dank ausgesprochen.

Im ganzen standen mir nun über 250 Proben zur Verfügung, so dass es mir möglich wurde, einen ziemlich lückenlosen Überblick über den Verwandtschaftskreis von *T. mutabile* zu gewinnen. Denn — um es gleich voraus zu nehmen — nach meinen Untersuchungen können weder *T. litorale* Mitt., noch *T. cuspidatum* Schimp., noch *T. lutescens* (Lindb.) Artcharakter beanspruchen, ebensowenig, wie wir eine *var. densum, cylindricum* oder andere Varietäten scharf abzugrenzen vermögen. Wir können vielmehr in allen diesen bis jetzt als mehr oder weniger selbständig aufgefassten Arten und Varietäten nur die Formen einer zur Zeit im Zerfall befindlichen Kollektivspezies erblicken, für die ich aus phylogenetischen Erwägungen den Namen *Trichostomum mutabile* Bruch beibehalte.

Es sei nun zunächst in kurzen Zügen ein Abriss der Nomenklaturgeschichte unserer Art gegeben, soweit zu einem allgemeinen Überblick und zum Verständnis der Nomenklatur notwendig ist. Am besten gehe ich dabei von der zur Zeit wohl klassischen Arbeit Limprichts: „Die Laubmoose Deutschlands, Oesterreichs und der Schweiz", in Dr. L. Rabenhorsts

Kryptogamenflora von Deutschland, Oesterreich und der Schweiz, aus. Limpricht unterscheidet in den Nachträgen, Bd. III p. 698 zu seinem *Trichostomum mutabile* Bruch Mscr., de Not. Syllab. p. 192 (1838); Bryol. eur. fasc. 18/20 Mon. p. 8, A. 5 (1843) (Bd. I p. 579) vier Varietäten, und zwar *β densum* Bryol. eur. l. c. (1843), *γ cylindricum* Schimp. 2. ed. p. 171 (1876), *δ cophocarpum* Schimp. Syn. l. c. (1876), *ε litorale* Dixon in Dix. u. James Stud. Handb. p. 216 (1896); im ersten Band werden von *T. mutabile* gar keine Varietäten erwähnt. Dort führt er vielmehr *T. litorale* Mitten noch als eigene Spezies an, während *T. cuspidatum* Schimp. schon dort als Synonym zu *T. mutabile* gestellt und in einer besonderen Notiz, p. 580, die Ansicht ausgesprochen wird, dass *T. cuspidatum* „vorläufig nur als *var. cuspidatum* (von *T. mutabile*) zu unterscheiden" sei. In den Nachträgen kommt Limpricht auf die *var. cuspidatum* nicht mehr zu sprechen. Fassen wir alles kurz zusammen, so nimmt er also den Standpunkt ein, dass von *T. mutabile* fünf Varietäten, und zwar *densum, cylindricum, cophocarpum, litorale* und *cuspidatum* zu unterscheiden seien. Das ist insofern bemerkenswert, als selbst Brotherus („Genera muscorum") noch *T. litorale* Mitten als eigene Art beibehält. Meine Untersuchungen jedoch bestätigen in vollem Masse Limprichts Auffassung, nur mit der Modifikation, dass ich noch weiter gehe und überhaupt von jeder Abgrenzung von Varietäten absehe, dafür aber eine zusammenhängende Formenreihe aufstelle.

Zum erstenmal begegnen wir dem *T. mutabile* als *T. brachydontium* wie unsere Stammart von Bruch in Flora 1829 P. II p. 393, T. I, fig. 3 bezeichnet wird. Über die gleichzeitige Aufstellung eines *Hymenostomum Mülleri*, Fl. p. 386, welches Limpricht als Synonym zu *T. mutabile* bringt, kann ich hier füglich hinweggehen, und dass schliesslich unter Beibehaltung des Speziesnamens die Art von Wilson in die Gattung *Didymodon*, von Mitten zu *Tortula* und von Lindberg zu *Mollia* gezogen wurde, ist hier ebenfalls von geringster Bedeutung. Dagegen ist es auffallend, dass Bruch später im Mscr. seinen eigenen Speziesnamen *brachydontium* in *mutabile* geändert hat. In dieser Abänderung treffen wir ihn zum erstenmal bei de Notaris l. c. veröffentlicht. Schimper hat diesen Namen dann durch Aufnahme in die Bryologia europaea gewissermassen sanktioniert. An der gleichen Stelle wird auch schon *var. densum* erwähnt, von deren

Verbreitung jedoch Limpricht keine Angaben macht. Die Varietät *cylindricum* Schimp. ist nach Exemplaren aufgestellt, die Graf Solms 1866 in Algarvien gesammelt hat, und die im Herbarium der Universität Göttingen als *T. mutabile* liegen. Limpricht hat laut eigener Angabe diese Exemplare nicht gesehen und nimmt sie wohl nur auf Schimpers Autorität und Beschreibung hin auf. — Die Varietät *cophocarpum* Schimp. geht ebenfalls auf Exemplare zurück, die Graf Solms in Algarvien gesammelt und als *T. cophocarpum* veröffentlicht hat (das Original befindet sich im Göttinger Herbarium). Es ist deshalb merkwürdig, dass dieser Speziesname bei Limpricht nicht als Synonym der Varietät genannt wird. Die Exemplare aus England können meines Erachtens nicht zu *var. cophocarpum* gezogen werden, wie ich weiter unten begründen will. — Die Varietät *litorale* ist zum erstenmal von Dixon als zu *T. mutabile* gehörig betrachtet worden, eine Ansicht, welcher Limpricht folgt, während Brotherus noch an der Mittenschen Art festhält. — Die Unterbringung der Spezies bei *Mollia* (Braithwaite) und bei *Didymodon* (Kindberg) ist hier gleichgültig. — Die Varietät *cuspidatum* endlich muss als Autor den Namen Limprichts führen, da Limpricht zum erstenmal die Schimpersche Spezies *T. cuspidatum* bei *T. mutabile* Bruch einreiht.

Dieser kurze Überblick über die Nomenklatur und die Geschichte der einzelnen „Varietäten" mag genügen.

Wenn ich es nun unternehme, die Kollektivspezies *Trichostomum mutabile* (Bruch mscr. partim) in ihrem Formenreichtum so zu schildern, wie sie sich meinen vergleichenden Untersuchungen dargeboten hat; wenn ich versuche, einen Überblick über die unzähligen Formen dieser variabelen Gruppe zu geben, so muss ich als grundlegend für alles weitere betonen: Es ist schlechterdings unmöglich (wenn wir von der kleinen Gruppe des Typus *densum* absehen), unter den zahlreichen Formen auch nur einen wirklich fixierten Typus zu finden, der als eigene Varietät des typischen *T. mutabile* (im Sinne der Autoren) aufgefasst werden könnte.

Fast jede Form hat irgend eine Eigentümlichkeit für sich, und es gibt tatsächlich fast ebensoviele Formen, als Kombinationen der zahlreichen Blattformen einerseits mit den verschiedenen Beblätterungsweisen, Art der Zähnelung, Einbiegung der Blattränder und der Länge der austretenden

Rippe andererseits möglich sind, — von der Grösse und Form der Kapsel und dem Peristom ganz abgesehen. Unter diesen Verhältnissen ist es also untunlich, für jede dieser Formen einen Namen zu schaffen, und es würde dadurch auch wenig gewonnen — die Nomenklatur der Rubus-Spezialisten kann in dieser Beziehung nur heilsam abschreckend wirken. — Es wird dagegen, wenn wir uns nicht damit begnügen können, alle Formen ohne weitere Bezeichnung bei *T. mutabile* einzustellen, notwendig sein, innerhalb der langen Formenreihe, die von dem Extrem der einen Seite zu dem der anderen Seite hinüberleitet, einige feste Marken anzubringen, nur um die Orientierung zu erleichtern, und ohne damit sagen zu wollen, dass die dazwischen liegenden Formen in subordiniertem Verhältnis zu den mit Namen bezeichneten ständen. Sie sind vielmehr alle koordiniert. Man könnte demnach eine Anzahl beliebiger Formen herauswählen, von denen eine jede nach dem ersten Anschein berechtigt wäre, einen „Typus" darzustellen, doch wird es sich aus praktischen Gründen empfehlen, zu diesen Idealtypen, wie ich mich ausdrücken will, solche Formen zu wählen, welche 1. weit genug voneinander entfernt sind und sich daher durch eine gewisse Summe von Merkmalen voneinander unterscheiden und 2. womöglich solche, die entweder häufig fruchtbar sind (und zwar mit einigermassen gleichbleibender Form der Kapsel) oder solche, die sich fast konstant durch Sterilität auszeichnen.

Es ist dies umsomehr geraten, als diese grösseren, auffälligeren Unterschiede schon früher zur Unterscheidung der Varietäten gedient haben und wir infolgedessen Varietäten-Namen besitzen, die jetzt als Bezeichnungen für die aufzustellenden „Idealtypen" benutzt werden können. Auf diese Weise wird die Neueinführung von Namen, die nur verwirrend wirken kann, vermieden.

Unter den vorhandenen Namen habe ich nun vier als Bezeichnung für die Idealtypen gewählt: *densum, litorale, mutabile* und *cuspidatum,* aus Gründen, die sich aus der Beschreibung von selbst ergeben werden. Die Diagnose dieser vier Typen ist leicht abzufassen und eine zur anderen klar in Gegensatz zu bringen. Ferner haben wir dabei zwei Typen — *mutabile* und *densum* — mit fast regelmässiger Fruktifikation und zwei — *litorale* und *cuspidatum* —, die fast nur steril vorkommen. Alle anderen Formen ordnen sich zwischen ihnen ein.

Wenn wir nun auch eine scheinbar ununterbrochene Reihe von *densum* über *litorale* zu *mutabile* und schliesslich *cuspidatum* aufstellen können, so ist damit der Formenreichtum dieser Gruppe noch nicht erschöpft. An manchen Stellen dieser Reihe werden wir Seitensprünge beobachten können, Formen, die sich nach gewissen Eigentümlichkeiten zwar mit Sicherheit auf eine bestimmte Formengruppe der Reihe *densum — cuspidatum* zurückführen lassen, bei denen aber ganz plötzlich eine Veränderung, sei es in der Beblätterung oder in der Kapselform oder auch nur im Habitus auftritt, die ausser Zusammenhang mit den in der grossen Reihe fast unmerklich ineinander übergehenden Formverschiedenheiten steht. So z. B. die starke Kräuselung typischer *litorale*-Blätter, verbunden mit einem *litorale* ganz fremden, an *Trichostomum crispulum* erinnernden Habitus, die steif aufrechte Stellung der Schopfblätter bei einem sonst typischen *litorale*, während sonst als eines der charakteristischsten Merkmale für diesen Typus die fast horizontale Ausbreitung der Schopfblätter angesehen werden kann, ferner einzelne Formen mit einem ganz eigentümlichen, sehr wenig in die Reihe hineinpassenden Blattzuschnitt, usw. Es würde zu weit führen, schon hier alle diese Abweichungen zu erwähnen.

Für diese mussten selbstverständlich neue Namen geschaffen werden, und zwar wählte ich Doppelnamen, in der Weise, dass der erste Teil des zusammengesetzten Namens die abweichende Eigenschaft, der zweite den nächst verwandten Typus angibt, beide verbunden durch einen kurzen Strich. So z. B. bezeichne ich die Form von *litorale*, welche durch starke Kräuselung der Blätter und den Habitus an *T. crispulum* erinnert, als *forma crispulo-litorale*; ähnliche Bildungen erklären sich selbst.

Für diejenigen Formen, welche sich in die grosse Reihe eingliedern, wurden ebenfalls Doppelnamen gewählt, und zwar zusammengesetzt aus je zwei benachbarten Idealtypen, verbunden durch einen langen Strich, also z. B. *densum — litorale*, *litorale — mutabile*. Sollte dabei die jeweilige Annäherung an den einen oder anderen Typus ausgedrückt werden, so wurde dazu das mathematische Zeichen $>$ angewendet. Eine intermediäre Form zwischen *litorale* und *mutabile*, die dem Typus *litorale* näher steht, würde also mit *litorale* $>$ *mutabile* bezeichnet werden, eine Zwischenform zwischen *densum* und *litorale* mit Annäherung an *litorale* mit *densum* $<$ *litorale* usw.

Auf diese Weise wird die Kontinuität der Reihe, auf die es hier besonders ankommt, nicht gestört.

Als Schema, dem ich bei der Aufzählung der einzelnen Formen und ihrer Fundorte folge, wähle ich die kontinuierliche Reihe:

densum
|
densum — litorale
|
litorale (brevifolium)
|
litorale (majus)
|
litorale > mutabile
|
litorale < mutabile
|
mutabile
|
mutabile — cuspidatum
cuspidatum.

Wir können nun zum eigentlichen Studium der Formen unserer Spezies übergehen.

Es muss jedoch zunächst im allgemeinen über die Verschiedenheit im Wuchs, über die Art der Beblätterung, über Blattform und Blattanatomie, Kapselform und Grösse sowie die verschiedene Ausbildung des Peristoms das zum Verständnis der Einzelausführungen nötigste vorausgeschickt werden.

Wuchs.

Für den ersten Eindruck beim Sammeln der Moose hat wohl der allgemeine Habitus, hervorgerufen durch den Wuchs der einzelnen Individuen und ihren jeweiligen Zusammenschluss zu einem Rasen oder irgend einem anderen Komplex, die grösste Bedeutung. Und wenn wir von diesem Gesichtspunkt aus die verschiedenen Formen von *T. mutabile* betrachten, so wird uns leicht verständlich, dass man lange Zeit innerhalb dieser Verwandtschaftsgruppe eine Anzahl gesonderter Arten unterschied und als solche beschrieb. Denn, man braucht es noch nicht einmal mit zwei extremen Formen zu tun zu haben, so kann doch der erste Anblick den Eindruck wecken, als ob hier zwei ganz verschiedene Arten vorlägen.

Die lockeren, gelblichen Rasen des typischen *mutabile* sind habituell so himmelweit von den dunkelgrünen, innen geschwärzten, oft dicht kissenförmigen Rasen des Typus *litorale* entfernt, dass man schwerlich glauben möchte, die beiden gehörten einer und derselben Kollektivspezies an, und doch beweist eine ununterbrochene Reihe von Zwischenformen den engen Zusammenhang der beiden Typen. Fast ebensoweit vom Typus *mutabile* steht Typus *densum*, dem niedrige, dichte, freudig-grüne, innen meist rostbraune Rasen eigentümlich sind. Näher am Typus *mutabile* steht der Typus *cuspidatum*, für den jedoch stets hohe, dichte, freudig-grüne, innen rotbraune Rasen charakteristisch sind. Und innerhalb dieser einzelnen Gruppen gibt es wieder die verschiedensten Abweichungen, z. B. typisches *litorale* in hohen, grünen, innen rostbraunen Rasen, typisches *mutabile* in dunkelgrünen bis geschwärzten, hohen Rasen (*var. nigro-viride* Ren. & Card.), und gar die Übergangsformen zwischen den Typen zeigen die mannigfaltigsten habituellen Verschiedenheiten.

Beblätterung.

Eine mehr oder weniger schopfige Anordnung, d. h. ein Längerwerden der Blätter gegen die Spitze des Jahressprosses, meist verbunden mit dichterer Stellung um den Sprossscheitel, ist zwar die Regel, doch sind im übrigen wieder die verschiedenartigsten Möglichkeiten gegeben, besonders was die Lage und Richtung des Blattes zur Achse betrifft. Im trockenen Zustand liegen die Blätter allerdings fast durchweg leicht gekräuselt oder verbogen dem Stengel locker an, angefeuchtet jedoch beobachten sie ein sehr verschiedenes Verhalten. — Beim Typus *mutabile* beugen sich die Blätter beim Anfeuchten von der anliegenden Basis bis zur Spitze in einem sehr leicht gekrümmten Bogen zurück und stehen sodann unter einem Winkel von etwa 45° locker ab; die Schopfblätter verhalten sich dabei fast ebenso wie die unteren Blätter oder stehen etwas weiter ab. — Beim Typus *litorale* muss dagegen fast stets zwischen den unteren und den Schopfblättern unterschieden werden; während nämlich die unteren, meist bedeutend kürzeren Blätter in feuchtem Zustande ziemlich aufrecht abstehen, krümmen sich die Schopfblätter in der Regel sehr weit zurück und bilden schliesslich, in einem Winkel von 70—90° von der Achse abstehend, eine fast horizontal

ausgebreitete Gipfelrosette. Es kommen jedoch auch Formen vor, die in allem übrigen sich zwar an den Typus *litorale* anschliessen, deren Schopfblätter jedoch ziemlich aufrecht abstehen, und umgekehrt andere, bei denen sich die unteren und die Schopfblätter in der Grösse wenig unterscheiden und alle, mehr oder weniger sparrig, weit vom Stengel abstehen. — Ganz verschieden von Typus *mutabile* und *litorale* verhält sich Typus *densum*. Hier stehen sowohl die unteren — zwar nicht viel kleineren Blätter — als auch die Schopfblätter feucht aufrecht, etwa unter einem Winkel von 30° ab, eine Eigenschaft, die wir auch bei den meisten Zwischenformen zwischen *densum* und *litorale* treffen. — Ebenfalls aufrecht, jedoch nicht so auffallend und oft sich dem Typus *mutabile* nähernd, sind die Blätter beim Typus *cuspidatum* gestellt, der überhaupt habituell dem Typus *mutabile* am nächsten kommt. Aber auch hier gibt es Formen, die sich weit vom echten *mutabile*-Typus entfernen.

Blätter.

Die Form der Blätter, welche sonst der Systematik wichtige Merkmale liefert, ist bei unserer Art ebenfalls äusserst variabel, und dasselbe gilt von den Massen (während nämlich bei Formen von Typus *densum* und *litorale* Blätter von nicht mehr als 1 mm Länge keine Seltenheit sind, schwanken die Blätter von *mutabile* und *cuspidatum* in der Länge von 3—4 mm, die längsten kommen bei den intermediären Formen *litorale*—*mutabile* vor). Bei den Blattformen können wir, entsprechend den vier Idealtypen, vier verschiedene Grundformen unterscheiden.

1. Das lanzettlich-zungenförmige Blatt (bei Typ. *densum*),
2. das zungenförmige bis zungen-spatelförmige (bei *litorale*),
3. das lineallanzettliche mit zungenförmiger Spitze (bei *mutabile*),
4. das rein lineallanzettliche (bei *cuspidatum*).

Die Zwischenformen halten in der Form der Blätter meist die Mitte oder nähern sich dem einen oder anderen Typus, z. B. *densum* — *litorale* mit breit zungenförmig-lanzettlichen Blättern, *litorale* > *mutabile* mit lang und breit linealisch-zungenförmigen Blättern und *mutabile* — *cuspidatum* mit lineallanzettlichen, meist schärfer als bei *mutabile* zugespitzten Blättern.

Eines der wichtigsten Charakteristika für unsere Kollektivspezies ist die Wellung der Blattränder über der Basis. Sie ist am stärksten beim Typus *mutabile* ausgeprägt, am schwächsten bei *densum*.

Die ausgefressene Zähnelung des Blattrandes über der Basis, welche man bisher als charakteristisch für *Trichostomum litorale* Mitten aufgefasst hatte, lässt sich, wenigstens in der Anlage, bei sämtlichen Formen unserer Sammelart nachweisen. Es ist dies übrigens keine echte Zähnelung. Sie wird auch nicht, wie Limpricht angibt, allein durch Kollabierung der äusseren Zellwände der Randzellen hervorgebracht, sondern verbunden mit dieser Kollabierung der äusseren Zellwände ist eine teilweise Spaltung der aneinander stossenden Seitenwände zweier benachbarter Zellen und eine mehr oder weniger starke Vorstülpung der betroffenen, nebeneinander liegenden Zellecken — ähnlich wie die Doppelmamillen bei *Philonotis* entstehen. Man kann die Entwicklung dieser eigenartigen Zellvorsprünge aus den gewöhnlichen Laminazellen, welche über den Zellwänden Papillen tragen, deutlich verfolgen. Die Tafel gibt die Hauptstufen dieser Entwicklungsreihe im Bilde wieder. Am stärksten ist die Zähnelung beim Typus *litorale* und erlischt beinahe bei *densum* und *cuspidatum*. —

Zur Unterscheidung von dem zuweilen sehr ähnlichen *T. crispulum* dient am leichtesten die Blattspitze. Während nämlich bei *T. crispulum* die Blattrippe an der Spitze stets kurz hakig eingekrümmt ist, wodurch ein kapuzenartiger Abschluss der Blattspreite zu stande kommt, verläuft die Rippe bei *T. mutabile* stets bis zur Spitze gerade oder ist sogar in einem leichten Bogen zurückgeneigt. Meist tritt sie als kurze Stachelspitze aus, zuweilen ist der Stachel auch recht kräftig; am längsten ist der austretende Teil bei *cuspidatum*, doch kommen auch schon bei typischem *mutabile* sehr kräftige Stachelspitzen vor; am kürzesten ist er bei *densum*.

Die Anzahl der medianen Deuter und die Mächtigkeit der Sterëidenbänder wechselt mit der Grösse der Blätter und der Stärke der Rippe, die wiederum an ein und demselben Exemplar sehr verschieden sein kann, und ist daher systematisch nicht verwertbar.

Auch die Einbiegung der Blattränder ist bedeutenden Schwankungen unterworfen. Meist hat Typus *densum* deutlich eingebogene, *litorale* nur an der Spitze leicht eingebogene und *mutabile* fast in der ganzen Länge

unregelmässig und schwach eingebogene Blattränder, während bei Typus *cuspidatum* die beiden Laminahälften durch stärkeres Aufrichten in der ganzen Länge eine etwas kielig-hohle Form der Blätter bedingen; die stärksten Einbiegungen kommen bei den Zwischenformen *densum—litorale* vor.

Eine der auffälligsten Abweichungen in der Blattform sind die breit-lanzettlichen Blätter beim „Subtypus“ *cophocarpum* von Typus *mutabile*. Andere Abweichungen werden noch gelegentlich bei den einzelnen Formen zu erwähnen sein.

Sporogon.

Seta, Urne, Deckel, Peristom.

Fast ebenso veränderlich wie die Blattform ist die Gestalt und Grösse des Sporogons und das Peristom, während der Deckel in Gestalt und Länge relativ konstant bleibt. Konstant ist auch die strohgelbe Farbe der Seta, im Gegensatz zu *Trichostomum crispulum*, welches eine rote Seta besitzt; doch wird sie auch bei *T. mutabile* im Alter zuweilen rötlich. Immerhin lassen sich zwei Gruppen von Kapseltypen gut genug unterscheiden:

1. Die Gruppe der grossen Kapseln (entdeckelt bis 2,5 mm lang) mit meist gut ausgebildetem Peristom.

2. Die Gruppe der kleinen Kapseln (entdeckelt bis 1 mm lang) mit rudimentärem oder fehlendem Peristom.

Zu der ersten Gruppe gehört der ganze Verwandtschaftskreis des Typus *mutabile*, bei dem wir nach der Kapselform und dem Peristom drei „Untertypen“ unterscheiden können:

1. Subtypus *normale* mit elliptischer bis eiänglicher Kapsel und langen, gespaltenen und gegliederten oder kurzen, rudimentären Peristomzähnen.

2. Subtypus *cophocarpum* mit kurz eiförmiger, sehr derber Kapsel und sehr kurzen, breiten, gestutzten und durchbrochenen Peristomzähnen.

3. Subtypus *cylindricum* mit zylindrischer bis länglich-zylindrischer Kapsel und meist langen, unregelmässig gespaltenen und gegliederten Peristomzähnen.

Als vierter Subtypus kann hier noch *longirostre* (= *T. sciophilum* C. Müll.) angegliedert werden, ausgezeichnet durch einen ungewöhnlich langen Deckel (länger als die Urne) und das sehr bleiche, fast papillenlose Peristom.

Die zweite Gruppe wird durch den Typus *densum* repräsentiert. Die Form der Kapsel ist hier stets elliptisch.

Die zwei fast immer nur steril gefundenen Typen *cuspidatum* und *litorale* lassen sich nach den wenigen, bis jetzt bekannt gewordenen Sporogonen am besten an die erste Gruppe anschliessen, was auch in dem graphischen Versuch (siehe unten), einen Stammbaum für die ganze Verwandtschaftsgruppe von *T. mutabile* zu geben, ausgedrückt worden ist.

Der auffallende Umstand, dass wir nach Gestalt und Grösse der Kapsel und nach dem Peristom zwei recht gut getrennte Gruppen umgrenzen könnten, während in den übrigen Merkmalen ein stetes Fluktuieren aller Werte jede scharfe Abgrenzung von Formen oder Varietäten unmöglich macht, lässt sich vielleicht damit erklären, dass die Fruktifikation bei unserer Kollektivspezies eben fast nur auf die beiden Typen *mutabile* und *densum* beschränkt bleibt, sodass wir also zwei extreme Formen zur Vergleichung bekommen. Das einzige bekannte Fruchtexemplar vom Typus *litorale* steht auch in seinen vegetativen Teilen dem Typus *mutabile* bedeutend näher als dem Typus *densum*. Das macht auch die Annahme eines phylogenetischen Zusammenhanges zwischen *litorale* und *densum* fast unmöglich, obwohl, nach den vegetativen Organen zu schliessen, der Angliederung von *densum* an *litorale* nichts im Wege stände.

Man sieht, es sind noch der Schwierigkeiten genug. Trotz des grossen Materials, das ich untersucht habe, bestehen doch immer noch Lücken, und diese auszufüllen, wäre eine Aufgabe der Zukunft.

Spezieller Teil.

Ich gebe nun zunächst die lateinische Diagnose unserer Kollektivspezies, die unter Berücksichtigung aller oben angeführten Formverschiedenheiten abgefasst ist.

Dioicum; caespitosum, caespitibus humilibus, 0,4 — 1 cm altis densis (densum, litorale [partim]) vel elatioribus, 0,6 — 4 cm altis, nunc densis (densum — litorale, cuspidatum), nunc laxiusculis (litorale — mutabile, mutabile), rarissime gregarium (subt. cophocarpum partim), colore lutescenti-viridi intus brunneo (mutabile) vel laete viridi intus brunneo (densum, cuspidatum) vel obscure viridi intus nigricante (densum — litorale, litorale partim, litorale — mutabile partim), rhizoidibus paucis; caulis erectus vel ascendens, densius (densum, densum — litorale, litorale, litorale — mutabile partim, cuspidatum) vel laxius (mutabile) foliatus, foliis superioribus majoribus, 1 — 4 mm longis, comam exhibentibus; folia comalia madida nunc suberecta vel e basi patula ascendentia (densum, densum — litorale, cuspidatum) nunc laxe patula (mutabile) nunc expansa immo apicibus subretroflexa (litorale, litorale — mutabile), sicca incurva, subtorta, saepius duriuscula (subt. cophocarpum), angustius lingulato-lanceolata apice acuto vel subacuto (densum, densum — litorale) vel insigniter lingulata lingulatove-spathulata apice perlato mutico vel subrotundato (litorale, litorale > mutabile), vel longius lineari-lanceolata lingulatove-linearia apice breviter acutato vel submutico (mutabile, litorale < mutabile), vel anguste lineari-lanceolata apice sensim acutato (cuspidatum), marginibus subplanis apicem versus saepius (densum, densum — litorale, litorale) paullum inflexa deinde caviuscula sed nunquam cucullata, supra basin plus minus undulata ibique cellulis parietibus exterioribus collapsis denticulos nunc insignes exhibentibus erosa (densum — litorale, litorale), nunc tantum subcrenulata (cetera), nervo valido vel brevius (densum, litorale, mutabile) vel longius (cuspidatum) excurrente, viridi, infra ad 0,12 mm lato biconvexo vel latere ventrali planiusculo, cellulis medianis largis 4 — 7 stereïdium stratis duobus validis interpositis, dorso laevi; cellulae laminares supra subquadratae $\mu \times \mu$, utroque latere dense papillosae, inferne sensim rectangulares majores, basales luteolae, elongatae 1 : 4 — 1 : 5, foliorum superiorum nec non perichaetialium hyalinae 1 : 6 — 1 : 8; folia inferiora subsimilia, breviora. —

Seta 0,5 (densum) — 1,4 cm (mutabile) longa, 0,1 — 0,15 mm crassa, nunc erecta nunc subflexuosa (mutabile partim), dextrorsum torquata, straminea, deinde interdum antiqua brunnescens; vaginula cylindrica recta. Capsula nunc minor, 1 mm longa, oblongo-ovoidea vel elliptica (densum), nunc major, ad 2,4 mm longa (mutabile), breviter ovoidea (subt. copho-

carpum) vel elliptica (subt. normale) immo cylindrica (subt. cylindricum), hypophysi distincta, orificio angusto, crocea (densum) vel rufescenti-brunnea (mutabile), sicca irregulariter sulcata. Operculum $^1/_2$ raro ad $^2/_3$ capsulae longum, immo (subt. sciophilum) thecam superans, oblique tenuiter rostratum, cellulis dextrorsum ascendentibus exstructum. Exothecii cellulae crassae, superiores quadratae brunneae, summae annulum persistentem exhibentes. Stomata in inferiore capsulae parte normalia. Peristomium infra orificium insertum, aurantiacum vel pallidum, sublaeve vel dense minutim papillosum, ad 0,18 mm longum, dentibus nunc irregulariter bi-(tri-)fissis, marginibus erosis vel brevioribus subclavatis (mutabile subt. normale et cylindricum), nunc perbrevibus latis insigniter retusis perforatis (mutabile subt. cophocarpum) nunc rudimentariis immo subnullis (densum). Sporae trigono-globosae, diametro 0,016—0,02 mm, luteolae vel croceae, valde papillosae, papillis semiglobosis, magnis, mense martio-majo maturantes.

Die **Idealtypen** lassen sich danach kurz folgendermassen charakterisieren.

Typus I *densum.*

Meist kleinere Pflanzen, ziemlich dichtrasig, kaum 1 cm hoch werdend. Stengel schopfig beblättert. Blätter ziemlich derb, alle fast aufrecht abstehend, lànzettlich-zungenförmig, meist scharf zugespitzt, über dem Basalteil wenig gewellt, mit gegen die Spitze eingebogenen Rändern. Zähnelung sehr schwach, oft kaum angedeutet. Basalzellen fast alle gelb und dickwandig. Rippe als kurze Stachelspitze austretend. Seta dünn, 0,5 cm lang; Kapsel klein, elliptisch, gelbrot, entdeckelt nicht über 1 mm lang. Deckel kurz geschnäbelt, kaum $^1/_2$ der Urne. Peristom rudimentär, meist nur in sehr kurzen, feinpapillösen Bruchstücken vorhanden, bis fehlend.

Typus II *litorale.*

Meist kräftigere Pflanzen, ziemlich dichtrasig, 1—2 cm hoch. Rasen innen oft geschwärzt. Stengel ausgezeichnet schopfig beblättert. Untere Blätter meist aufgerichtet oder wenig abstehend, Schopfblätter grösser, weit ausgebreitet, fast horizontal oder sogar mit den Spitzen zurückgeneigt, alle breit zungenförmig bis zungenspatelförmig, stumpf, über dem Basalteil mehr oder weniger gewellt, mit Ausnahme der durch die wenig eingebogenen Blattränder etwas hohlen Blattspitze flachrandig. Zähnelung sehr deutlich und kräftig. Rippe als kurze, kräftige Stachelspitze austretend. — Meist steril.

Typus III *mutabile.*

Stets kräftigere Pflanzen, lockerrasig, 1—3 cm hoch. Stengel undeutlich schopfig beblättert. Blätter locker bogig abstehend, auch feucht etwas gedreht, lang linealisch-zungenförmig bis lineallanzettlich, kurz gespitzt, über dem Basalteil stark gewellt, mit flachen bis unregelmässig wenig eingebogenen Rändern, meist in der ganzen Länge etwas rinnig hohl. Zähnelung schwach, oft kaum angedeutet. Basalzellen ziemlich weit hinauf hellgelblich und stark gestreckt. Rippe als kräftige Stachelspitze auslaufend. Seta 10—14 mm lang, zuweilen trocken deutlich geschlängelt. Kapsel grösser, bräunlich, eiförmig, elliptisch bis zylindrisch, entdeckelt 1,8—2,4 mm lang. Deckel $^1/_2$ der Urne, selten $^2/_3$. Peristom meist gut ausgebildet, seltener rudimentär.

Typus IV *cuspidatum.*

Stets kräftigere Pflanzen, dichtrasig, 1—4 cm hoch. Stengel meist undeutlich schopfig beblättert. Blätter aufgerichtet bis aufrecht-abstehend, ziemlich derb, lang lineal-lanzettlich, allmählich, zuweilen sehr schmal zugespitzt, über dem Basalteil weniger stark gewellt, mit fast flachen Rändern, meist in der ganzen Länge fast kielig-hohl. Zähnelung schwach, oft kaum angedeutet. Rippe als längere Stachelspitze austretend. — Meist steril.

Wie schon oben bemerkt, lassen sich nur wenige Formen genau mit den hier aufgestellten Typen in Übereinstimmung bringen. Die Einreihung eines bestimmten Herbarexemplares wird also jedesmal nur einer sehr weitgehenden Annäherung desselben an den Typus entsprechen. Weitaus die Mehrzahl entfällt auf die Zwischenformen, die nach dem oben gegebenen Modus bezeichnet werden.

Im folgenden gebe ich nun einen Überblick über die einzelnen Formen der im Schema angeführten Formengruppen, unter Hinzufügung der Fundorte, soweit mir das überlassene Herbarmaterial zu gehen gestattet.

1. ***densum*** (dem Idealtypus *densum* zunächst stehend).

Bis jetzt nur von der Atlantis und den Küsten des Mittelmeeres bekannt.

Teneriffa: Agua mauças, c. frct!, leg. Fritze 1880, sub. Nr. 25 (Herb. Geheeb); Tunis: Auf kalkhaltigem Boden, c. frct!, leg. M. Fleischer 1894 (Herb. Geheeb); Sardinien: „In umbrosis ad terram prope Cagliari, U. J. Müller", c. frct! (Herb. Berolin.), wahrscheinlich das Original des Bruchschen *T. brachydontium*!; Wegrand in der Felsheide der Regione Canauti auf San Pietro (Trachyt), c. frct!, leg. Th. Herzog, 26. III. 04; an Kalkfelsen des Cap San Elia bei Cagliari, c. frct!, leg. Th. Herzog, 11. III. 04; Corsica: Bonifacio, c. frct!, leg. P. Goulard 1877 (Herb. Geheeb); Archipelagus Etruriae: Insula Giannutri, inter Pharum et „Cala Maëstra", c. frct!, leg. Levier; ibid. leg. Forsyth Major, c. frct! (Herb. Levier); Insula „Pan di Zucchero" prope promontorium Argentario, ster., leg. Forsyth Major, Juni 1888; Scoglio Colladraz, c. frct!, leg. Tommasini, 1. IV. 65 (Herb. Geheeb); Italien: Etruria „prope cacumen montis Argentarii, 620 m, ster.", leg. Levier.

Die Proben von allen diesen Fundorten stimmen gut miteinander überein. Nur die Exemplare von Teneriffa zeichnen sich durch längere Blätter aus!

2. ***densum — litorale.*** (Bis jetzt nur steril bekannt.)

Die intermediären Formen dieser Gruppe, welche eine Verbindung zwischen Typus *densum* und Typus *litorale* herzustellen scheinen, erinnern durch ihren Habitus, die dichten, oft 3 cm tiefen, meist innen geschwärzten Rasen und durch die starke Zähnelung über der Blattbasis in der Mehrzahl der Fälle an *litorale*; doch fehlt ihnen die sternförmige, horizontale Ausbreitung der Schopfblätter, die dem Typus *litorale* eigentümlich ist; ausserdem weisen der schmälere Blattzuschnitt und die meist eingebogenen Ränder der hohlen Blattspitze auf Typus *densum*. — Die meisten dieser Formen erhielt ich aus den verschiedenen Sammlungen als *T. litorale* Mitten oder *T. mutabile var. litorale* Dixon. Obgleich das Mittensche Original, nach einer Probe aus dem Berliner Herbarium „Anglia, Cornwallis, leg. Curnow 1879", die sicher von Mitten geprüft ist, höchstwahrscheinlich nicht hierher, sondern zum Typus *litorale* (brevifolium) gehört, wurden diese Zwischenformen von späteren Sammlern doch auf das Mittensche *T. litorale* bestimmt — begreiflicherweise, da sie ihnen ja nahe genug stehen.

Das Hauptverbreitungsgebiet dieser Gruppe umfasst Grossbritannien, die atlantischen Küstengebiete Frankreichs und

Belgiens und schliesslich Südschweden (Bornholm). Doch habe ich auch hierher gehörige Formen aus dem zentralen Gebirge Sardiniens mitgebracht. Diese stehen indessen habituell dem Typus *densum* entschieden näher, als die Formen aus dem Norden!

Sardinien: An Schieferfelsen der nach Süden von der Punta Florisa (M^to^ Gennargentu) herabziehenden Schlucht, ca. 1500 m, 16. IV. 04, leg. Th. Herzog; an Glimmerschieferfelsen neben der Strasse bei Scui, ca. 800 m, 14. IV. 04, leg. Th. Herzog; Frankreich: „Ile de Jersey, sentier du Devils hole, rochers", leg. Cardot, 1885; „Jersey, talus des chemins près du phare de la Corbière", leg. Cardot 1885; „Jersey, St. Hélier, Fort Régent", leg. Cardot, 1885; „Côte de Roscoff (Finistère)", leg. Camus, 9. VI. 81 (Herb. Dismier); „Côte de Landérennec (Finistère)", leg. Camus (Herb. Dismier); „Ile de Groix (Morbihan)", leg. Dismier, 9. VII. 1895 (Herb. Dismier); Belgien: Bouillon (Luxemburg) auf Felsen, leg. Gravet, 1869; „Frahan, rochers", leg. Delogne (Herb. Geheeb); England: „Lizard Head, Mullion Cove", leg. Dixon, 9. VIII. 86; „Bideford, N. Devon", leg. A. Ley, 20. IX. 82; ex herb. Horrell (Herb. Dismier); „Cumberland, Wastdale", leg. H. N. Dixon, 24. VII. 1891; „N. Wales, Beddgelert", leg. Dixon, 16. VII. 88; „Wemyss Bay, Renfrewshire", leg. R. H. Meldrum, 12. IX. 1898 (Herb. Thériot); Schottland: „Caithness, Dirlot", leg. D. Lillie, 5. IX. 99; „Perthshire, Lawers", leg. Dixon, 23. VII. 93; „Spean Bridge, Inverness", leg. Dixon, 13. VII. 98; „Sutherland, Altnaharra", leg. Dixon, 8. VII. 99; Sutherland, Ben Hope", leg. Dixon, 10. VII. 99; „Skye, Staffin (sea-coast plant)", leg. Dixon, 26. VII. 93; „Skye, Tuiraing", leg. Dixon, 27. VII. 93; Irland: „Donegal, Porsioned Glen", leg. Dixon, 24. VII. 90; Bornholm: „ad Bobbeå", leg. Th. Jensen, VII. 1866 (als *var. densum* von *T. mutabile* in Herb. Geheeb).

3. ***litorale*** *(brevifolium).*

Dem Typus *litorale* durch die fast horizontale Ausbreitung der Schopfblätter, die meist sehr breite und fast völlig flache Blattspitze und die starke Zähnelung sehr nahe stehend, jedoch durch die Kleinheit der Blätter und die sehr dichten, niederen Rasen unterschieden. — Man vergleiche die phylogenetische Ableitung dieser Gruppe weiter unten. —

Stets steril! Meist dunkelgrüne, innen geschwärzte Rasen.

Zentrum der Verbreitung, wie es scheint, an den atlantischen Küsten Europas und im westlichen Becken des Mittelmeeres, besonders auf Glimmerschiefer und Urgestein. Die östliche Grenze erreicht diese Gruppe mit einem einzigen Fundort im etruskischen Apennin.

Sardinien: An Erdhängen neben der Strasse von Domus de Maria nach Teulada, auf Glimmerschiefer, ca. 250 m, leg. Th. Herzog, 6. IV. 04; an Glimmerschieferfelsen neben der Strasse bei Scui, ca. 800 m, leg. Th. Herzog, 14. IV. 04; an Trachytblöcken der Felsheide des Stagnetto auf San Pietro, ca. 110 m, leg. Th. Herzog, 23. III. 04; Apennin: „Vallombrosa, secus viam in ascensu montis Secchieta, ca. 1100 m", leg. Dr. Levier, 5. IX. 84; Frankreich:

„Manche: Landes de Lessay", leg. Martin, 8. VI. 97 (Herb. Thériot); „Jersey, baie du Rozel", leg. Martin, III. 01 (Herb. Dismier); „Dissé sur le Lude, route de Broc", leg. Thériot, 2. IX. 98; „Jersey, murs entre Rozel baie et Gorey", leg. Cardot, 85; „Jersey, bords des chemins près du phare de la Corbière", leg. Cardot, 85; „Guernesey, le Gouffre", leg. Cardot, 85; „Ile de Serk, la Coupée, talus", leg. Cardot, 85; „Manche, Granville, cap Lihou", leg. Cardot, 85; „Sarthe, le Mans, route de Degré, talus", leg. Thériot, 28. III. 89; Belgien: „Auf Felsen bei Membre, Namur", leg. Gravet, 71 (Herb. Geheeb); England: „Cornwall, Penzance", leg. W. Curnow, 1879 (Herb. Geheeb und Berliner Herb.), höchstwahrscheinlich entsprechen diese Proben dem Mittenschen Original von *T. litorale* recht gut, zweifelsohne sind sie von Mitten geprüft!; „Cornwall, St. Just", leg. Dixon, 5. VIII. 86; „Cornwall, Landsend, Pontherth", leg. Dixon, 31. VII. 86; Irland: „Dublin", leg. S. O. Lindberg, 1873 (Herb. Geheeb).

4. ***litorale*** (*majus*).

Die Formen dieser Gruppe liegen dem Idealtypus *litorale* zu Grunde. Sie zeichnen sich durch grosse und breite, sehr weiche Blätter mit meist abgerundeter, fast flacher Spitze aus und zeigen die charakteristische rosettenartige Ausbreitung der Schopfblätter aufs deutlichste. Sie wachsen stets in kräftigen, schön dunkelgrünen, innen meist geschwärzten Rasen und sind bis jetzt fast nur steril gefunden worden. Die einzigen Fruchtexemplare (aus Sardinien) beweisen durch die strohgelbe Seta und die Kapselform ihre Zugehörigkeit zu *Trichostomum mutabile*, doch lässt sich über das Peristom nichts bestimmtes sagen, da die vorliegenden Sporogone zu jung sind.

In der Verbreitung stimmen sie mit *litorale (brevifolium)* ziemlich überein, sind aber noch ausschliesslicher atlantisch und westlich-mediterran. Mit Vorliebe auf kalkfreiem Gestein, ein einzigesmal auf Kalk.

Sardinien: An Trachytblöcken der Regione Canauti in der Felsheide auf San Pietro, ca. 60 m, c. fret.!, leg. Th. Herzog, 26. III. 04; Felsen (Porphyr?) der Regione Chia bei Domus de Maria, leg. Th. Herzog, 5. IV. 04; Frankreich: „Finistère, Pont-Aven", leg. Dismier, VIII. 98 (durch etwas schmälere Blätter ausgezeichnet); „Sur les murs à Cherbourg (Manche)", leg. Corbière, (Husnot, Musci Galliae, Nr. 757); „Cherbourg, murs du litoral", leg. Corbière, 23. IV. 87 (Herb. Thériot); „Montrevault, M. et L., rochers", leg. Bouvet, 13. IX. 01 (Herb. Dismier); „Paimpol, Côtes du Nord", leg. Camus, 22. IX. 96; „Saint-Michel-en-Grève (Côtes du Nord)", leg. P. de la Varde, 30. VI. 01, auf Kalk!; England: „North-Wales, Cader Idris, ad saxa in rivulo", leg. Dixon, 10. VII. 01, — diese Form weicht habituell infolge zahlreicher Innovationen aus den Achseln der vorjährigen Schopfblätter etwas ab! —; Schottland: „Sutherland, Ben Hope", leg. Dixon, 10. VII. 99.

Hierher rechne ich auch noch folgende, etwas abweichende Formen: (*stricto-litorale*).

In der Blattform und Anatomie typisch litorale, aber abweichend durch die fast aufrechten Schopfblätter.

Sardinien: An Trachytfelsen des Stagnetto auf San Pietro, ca. 110 m, leg. Th. Herzog, 23. III. 04.

(*flaccido-litorale*).

Blattform und Anatomie stimmen mit typischem *litorale* überein, jedoch ist die Beblätterung sehr locker, so dass die weisslichen Blattbasen sichtbar werden, und alle Blätter stehen fast gleichmässig sparrig ab, wodurch die schopfige Anordnung der Blätter verwischt wird.

Sardinien: An Felsen im Canale Candelazzu bei Teulada, ca. 400 m, 8. IV. 04 und auf Erde an Felsen im Tal des Flumini Binu bei Orri, ca. 150 m, 15. III. 04, leg. Th. Herzog; Frankreich: „Sur schistes ardoisiers ombragés, Vignols, (Corrèze)", leg. Lachenaud, 28. IX. 01; England: „Cornwall, Morvah", leg. Dixon, 5. VIII. 86; „Cornwall, Helston", leg. Dixon, 10. VIII. 86.

Als „forma foliis parvis subaequilongis" ziehe ich hierher *Trichostomum mucronatulum* Cardot:

Açoren: „San Miquel, leg. Carreiro, 98" (Herb. Cardot).

(*crispulo-litorale*).

Ausgezeichnet durch die tiefen und dichten, freudig-grünen, innen rostroten Rasen, die sehr weichen, trocken stark verbogenen, feucht durchweg weit abstehenden Blätter und die habituelle Ähnlichkeit mit *T. crispulum*.

Sardinien: An feuchten Felsen im Hintergrund des Vallon Flumini Binu bei Orri, ca. 250 m, 17. III. 04, leg. Th. Herzog.

5. *litorale > mutabile.*

Hier beginnt die formenreiche Reihe, welche vom Typus *litorale* zum Typus *mutabile* hinüberleitet. Ich habe sie in zwei Abteilungen zerlegt — *litorale > mutabile* und *litorale < mutabile* —, je nach ihrer Annäherung zu dem einen oder anderen Typus.

Zunächst treffen wir natürlich noch Formen, die dem Typus *litorale* näher stehen als dem Typus *mutabile*. Diese kennzeichnen sich am besten

durch den Zuschnitt der Blätter, deren grösste Breite nie unter der Mitte liegt, und die sternförmige Ausbreitung der Schopfblätter; an Typus *mutabile* gemahnt die bedeutende Länge des Blattes und die schwächere Zähnelung, die zuweilen sogar sehr undeutlich wird. Wir haben hier also Blätter mit langer und sehr breit zungenförmiger Spreite und oft schmälerer Basis, die bis 4 mm lang werden; die Blattspitze ist fast stets flach. Kapsel und Peristom reihen sich dem Typus *mutabile* an.

Das Areal dieser Formengruppe erstreckt sich von der Atlantis einerseits über die atlantischen Küstengebiete Europas bis England, andererseits über das westliche Mittelmeerbecken bis nach Oberitalien.

Teneriffa: „Wald von Agua Garcia", c. frct. immatur!, leg. Fritze, sub Nr. 12, IV. 80 (Herb. Geheeb); Sardinien: Feuchte, humusbedeckte Felsen im Vallon Flumini Binu bei Orri, leg. Th. Herzog, 15. III. 04; zwischen Trachytblöcken auf sandigem Boden der Regione Stagnetto, in der Felsheide der Tacca Rossa, c. frct. vet!, an Trachytblöcken in der Regione Canauti und an Trachytfelsen des Canale Geniale bei Carloforte auf San Pietro, c. frct. vet!, leg. Th. Herzog, 23.—26. III. 04; in der Campedda bei Macomer, 11. III. 04, leg. Th. Herzog; Italien: „Toscana, Fiesole ad sept. Florentiae, in clivis umbrosis silvulae Bosco della Doccia", c. frct!, leg. Dr. Levier, 4. V. 99; Toscana „Carrara, Detritus kalkhaltiger Felsen", leg. M. Fleischer, X. 93 (Fleischer & Warnstorf, Bryotheca Eur. merid. Cent. I, 1896, Nr. 29); „Longobardia, Cuasio al Piano, supra lac. Lugan. in rupibus porphyreis juxta cataractulam, ca. 350 m", leg. Artaria, XII, 98 (Herb. Levier); Frankreich: „Le Poul du Finistère", c. frct!, VII. 96, leg. Dismier; „Jersey, St. Brelade", leg. Martin, III. 01 (Herb. Dismier); „Eure & Loire, sur la terre dans les chemins du bois de Dangeau", leg. Douin, 26. III. 02 (Herb. Thériot); „Forêt de Marly, Etoile des Taunes", 15. XII. 96, leg. Dismier; "Dinard", leg. Martin, 8. VIII. 01 (Herb. Thériot); „Sarthe (talus), de Brains à St. Julien", leg. Thériot, 28. III. 94; „Sarthe, Cheminé en Charnie", leg. Monguillon, VIII. 96 (Herb. Thériot); „Sarthe, Forêt de Mézières", leg. Monguillon, 29. X. 96 (Herb. Dismier & Thériot); England: „Cumberland, Lodore", leg. Dixon, 23. VIII. 95 (diese Exemplare stehen dem Typus *litorale* sehr nahe!); „Cornwall, Camelford, slate quarries", leg. Dixon, 11. VIII. 86; „N. Wales, Aber", leg. Dixon, 28. VIII. 92; „Ecclesborne, Hastings", leg. Dixon, 3. I. 88; „Cornwall, Helston", leg. Dixon, 10. VIII. 86.

6. *litorale* < *mutabile*.

Die dem Typus *mutabile* näher stehenden Formen zeichnen sich durch an der Basis etwas breitere und mehr nach dem Typus *mutabile* zugespitzte Blätter (lineal-zungenförmige, rasch zusammengezogene Spitze), sowie durch die Richtung der Schopfblätter, die hier nicht so auffällig weit abstehen, aus.

In dieser Gruppe ist es oft besonders schwer zu entscheiden, ob wir eine Form hierher oder schon zu Typus *mutabile* rechnen sollen, da bei den Formen von Typus *mutabile*, die ich nach ihrer Kapselform als Subtypus *cylindricum* zusammengefasst habe, häufig Blattzuschnitte vorkommen, die an die intermediären Formen erinnern. Da wir jedoch gesehen haben, dass eine Abgrenzung überhaupt nicht möglich ist, schadet es auch nichts, wenn wir die Formen mit zylindrischer Kapsel alle bei Typus *mutabile* unterbringen.

Die Verbreitung ist etwa dieselbe, wie die der vorigen Gruppe.

Sardinien: Auf Granitgrus in der Macchia am Monte Maria bei Teulada, leg. Th. Herzog, 10. IV. 04; Archipelagus Etruriae: „Isola Gorgona", leg. Bottini, 87 (Herb. Cardot); Frankreich: „Falaise (Calvados), rochers humides peu saillants", leg. de Brébisson (Husnot, Musci Galliae, No. 214); „Alpes Maritimes, Cap d'Antibes", leg. Bescherelle, V. 83 (Herb. Dismier); „Finistère", leg. Camus (Herb. Dismier); „Dinan, Côtes du Nord", leg. Camus, 29. IX. 92 (Herb. Dismier); „Sarthe, Ste Sabine", leg. Monguillon, 8. IV. 97 (Herb. Thériot); England: „Hastings, Fairlight Glen", leg. Dixon, 3. I. 88; „Cornwall, Carbiss Bay", leg. Curnow & Dixon, 3. VIII. 86; „Wales, Stauner, Radnor", leg. A. Ley, 30. V. 97 (ex herb. Horrell, Herb. Dismier).

7. ***mutabile.*** (Vgl. die Beschreibung des Idealtypus *mutabile*!)

Nach der Kapselform lassen sich unter den europäischen Pflanzen drei Untertypen unterscheiden (siehe oben).

Die wenigen sterilen Formen habe ich zum Subt. *normale* gestellt, sofern nicht die Blattform auf Subt. *cophocarpum* verwies.

Das Zentrum des sehr zersplitterten Verbreitungsareals dieser Gruppe ist die Atlantis und das westliche Becken des Mittelmeeres; Ausstrahlungen lassen sich von da verfolgen, einerseits bis auf die britischen Inseln, andererseits bis in den Kaukasus (Exemplare nicht zu erlangen!). Ausserdem kennen wir noch in aussereuropäischen Ländern einige weit auseinander liegende Fundorte: Japan, Réunion bei Madagaskar und Neu-Seeland; denn das neu-seeländische *T. sciophilum* C. Müll. gehört wohl auch nur als Untertypus (*longirostre*) zu *mutabile typicum*. — Das Areal der Untertypen *cylindricum* und *cophocarpum* bleibt fast ganz auf die Atlantis (unter Hinzurechnen der Südküste Portugals) und das westliche Mittelmeerbecken beschränkt.

Subtypus *normale.*

Canaren: „Teneriffa, la Grancha", ster., leg. Bornmüller, 01, Nr. 1881 (Herb. Cardot); „Teneriffa, Agua Manza", ster., leg. A. Tullgren, 96, Nr. 92 (Herb. Cardot) = *T. mutabile var. robustum Ren. & Card.*; „Teneriffa, Agua Garcia", ster., leg. A. Tullgren, 96, Nr. 74 u. 78 (Herb. Cardot) = *T. mutabile var. nigro-viride Ren. & Card.*; „Tafira", ster., leg. Bornmüller, 01, Nr. 1650; Açoren: „San Miquel", ster., leg. C. S. Brown, 94 (Herb. Cardot); Madeira: „Ribeiro da Medade", c. frct.!, leg. Fritze, 20. I. 80, Nr. 128 (Herb. Geheeb); „zwischen São Vicente und Seisal", c. frct. jun., leg. Fritze, 4. II. 80, Nr. 203 (Herb. Geheeb); „Ribeiro di Santa Lucia", c. frct. jun.!, leg. Fritze, 18. XII, 80, Nr. 202 (Herb. Geheeb); „Mandon", c. frct.!, ex herb. Schimper (Herb. Geheeb); Lusitanien: „Algarve, San Marcos da Serra, in viae praeruptis", c. frct.!, leg. Solms, 66 (Herb. Göttingen); „Algarve, in Portella dos Termos ad San Marcos da Serra Cistetorum incola", c. frct.!, leg. Solms, 66 (Herb. Göttingen); „Monchique, vere 66", c. frct.!, leg. Solms (Herb. Geheeb); „Serra di Cintra prope Olisipponem, in muris vetustis", c. frct. vet!, leg. Levier, 4. VIII. 78; Balearen: „Insula Menorca, barranco del Favaret prope Mahon", c. frct.! — mit rudimentärem Peristom —, leg. Hegelmaier, 29. III. 73 (Hegelmaier, Iter gallico-hispanicum, 1873, in Herb. Geheeb); Sardinien: An Felsen der Punta Flumini Binu bei Orri, c. frct. vet., leg. Th. Herzog, 15. III. 04; Corsica: „Santa Manza (Bonifacio)", c. frct.!, leg. Goulard, 77 (Herb. Geheeb); Archipelagus Etruriae: „Isola del Giglio", c. frct. vet.!, leg. Bottini, 87 (Herb. Cardot); Italien: „prope Coenobium Carthusianorum (Certosa) ad merid. Florentiae, in muris viridarii", c. frct.!, leg. Levier, 10. V. 79; „Scandicci alto, in collibus ad merid. Florentiae in muris umbrosis viridarii Villae Passerini", c. frct.!, leg. Levier, 25. IV. 79; „secus fossulam ruris Pellizzari, infra collem „Concezione", ad septentr. Florentiae", c. frct.!, leg. Levier, 4. IV. 86; „Pozzolatico in collibus ad merid. Florentiae in viridario Villae Mirafiore", ster., leg. Levier, 19. II, 05; „in editioribus montis Argentarii; macchia sotto il Telegrafo, 4—500 m", c. frct. vet.!, leg. Levier, 3. VII. 86; „Etruria occid., supra Asciano ad radices occid. montis Pisani", c. frct.!, leg. Levier, 23. XI. 79; „Liguria or., Pegli ‚Villa Elena' in viridario", c. frct.!, leg. Levier, 28. VIII. 79; Frankreich: „Guernesey, baie de Moulin Huet sur les murs", ster., leg. Cardot, 85; England: „Hayle near Carbiss Bay, Cornwall", c. frct. vet.!, leg. Curnow & Dixon, 3. VIII. 86; „Cornwall, West Head", ster., leg. A. Ley, 16. V. 76, ex herb. Horrell (Herb. Dismier); Schottland: „Perthshire, Killin", ster., leg. Dixon, 26. VII. 97 —, diese Form ist durch die sehr starke Zähnelung ihrer Blattränder sehr bemerkenswert! —

Von den aussereuropäischen Fundorten rechne ich hierher:

Japan: „Nagasaki", c. frct. vet.!, leg. Wichura, Nr. 1434 (Herb. Cardot); Réunion: ster., leg. Rodriguez (Herb. Cardot).

Subtypus *cylindricum.*

Meist in lockeren, niederen Rasen oder herdenweise.

Madeira: „Ribeiro de João Gomez bei Funchal", c. frct.!, leg. Fritze, 25. II. 80, Nr. 193 (Herb. Geheeb & Levier); „San Martinho", c. frct. submat.!, leg. Fritze, 19. IV. 80, Nr. 194a (Herb. Geheeb); Lusitanien: „Monchique, Serra da Picota, Barranco do Banho", c. frct.!, leg. Solms, 66 (Herb. Göttingen), ist jedenfalls das Originàl der Schimperschen Varietät *cylindricum*;

Sardinien: Am Weg von Pula zur Casa del Monte Santo, ca. 350 m, c. frct.!, leg. Th. Herzog, 31. III. 04; Erdböschungen im Vallon sa Stiddiosa bei Pula, ca. 200 m, c. frct., leg. Th. Herzog, 19. III. 04; an Felsen zwischen Gras im Vallon Flumini Binu bei Orri, ca. 100 m, c. frct.!, leg. Th. Herzog, 15. III. 04; Italien: „Fiesole ad sept. Florentiae, in clivis umbrosis silvulae Bosco della Doccia", c. frct.!, leg. Levier, 4. V. 99; Frankreich: „Rochers maritimes, Cherbourg" ex herb. le Jolis (Herb. Geheeb).

Subtypus *cophocarpum*.

Nicht nur durch die Kapselform und das gestutzte Peristom zeichnet sich diese Formengruppe aus, sondern auch durch die breit-lanzettlichen, trocken sehr derben, feucht steif schief abstehenden, meist ausgezeichnet schopfig angeordneten Blätter. Im Habitus ähneln sterile Exemplare (wie überhaupt manche Formen von *T. mutabile*) dem *T. nitidum* ausserordentlich. Da bei Subt. *cophocarpum* auch die Blattform fast vollkommen derjenigen von *T. nitidum* gleicht und die hyaline Blattbasis sowie die oft glänzende Blattrippe sehr leicht täuschen können, war es mir äusserst wertvoll, ein Merkmal aufzufinden, das auch bei sterilen Proben eine sichere Trennung der beiden Arten gestattet. Es ist das der Papillentypus. — Wenn wir von der Blattbasis aufwärts die Randzellen betrachten, so sehen wir, dass bei *T. nitidum* die ersten Papillen über dem Zelllumen auftreten, bei *T. mutabile* jedoch über den Pfeilern, und dem entspricht auch bei *T. nitidum* die Vorwölbung der Aussenwände der basalen Randzellen, während bei *T. mutabile* die Pfeiler vorstehen und die Wände meist mehr oder weniger kollabiert sind. Weiter aufwärts am Blatt verwischen sich diese Unterschiede, da in den Zwischenräumen noch weitere Papillen auftreten und die ursprünglich über den Pfeilern entstandenen Doppelpapillen auseinanderrücken, so dass dort eine Unterscheidung der beiden Typen sehr erschwert ist.

Die sterilen, englischen Exemplare, die nach Braithwaite zu *var. cophocarpum* Schimp. gehören sollen, können schon wegen ihrer Blattform nicht hierher gerechnet werden.

Lusitanien: „Algarve, San Marcos da Serra inter cisteta" c. frct.!, leg. Solms, 66 (Herb. Göttingen, als *T. cophocarpum* Solms); Sardinien: In einem ausgetrockneten Strassengraben in der Cistusmacchia zwischen Pula u. Cala d'Ostia, c. frct.!, leg. Th. Herzog, 30. III. 04; in der Cistusmacchia bei „la Croce" auf San Pietro, c. frct.!, leg. Th. Herzog, 26. III. 04; in der Steppe der Campedda bei Macomer, ster., Charaktermoos!, leg. Th. Herzog, 11. III. 04.

Subtypus ***longirostre*** (= *T. sciophilum* C. Müll.).

Im Wuchs wie kräftige, hochstengelige Formen von den Canaren. Ausgezeichnet durch den sehr lang geschnäbelten Deckel, der die Urne an Länge übertrifft.

Neu-Seeland: „Ins. merid., Selwyn Gorge (N. Canterbury) on damp shady rocks", c. frct.!, leg. T. W. N. Beckelt (Herb. Levier).

8. ***mutabile — cuspidatum.***

Durch dichte Rasen und dichtere Beblätterung sowie den lineal-lanzettlichen Zuschnitt der Blätter und die längere Stachelspitze zu Typus *cuspidatum* hinüberleitend.

Bis jetzt sind nur wenige hierher gehörige Formen gefunden worden: in den Bergen Sardiniens und auf den britischen Inseln, also in den Grenzgebieten des Areals von Typus *mutabile* (man kann vom Gebirgsland Sardiniens auch als von einem Grenzgebiet sprechen, insofern als der Typus *mutabile* mehr der Ebene und den sonnigen Hügeln angehört; das Aufsteigen ins Gebirge entspricht somit einem Vorrücken nach Norden; in gleicher Weise entsprechen sich auch die Fundorte von *densum — litorale* in den Bergen Sardiniens und auf den britischen Inseln).

Sardinien: An Schieferfelsen in der Schlucht Fogaias bei Teulada, ca. 400 m, ster., leg. Th. Herzog, 6. IV. 04; an Felsen des Monte Santo bei Pula, ca. 500 m, c. frct.!, leg. Th. Herzog, 31. III. 04; an Schieferfelsen neben der Strasse von Lula nach Siniscola, ca. 600 m, ster., leg. Th. Herzog, 22. IV. 04; England: „Yorkshire, Rocks by the Strid", ster., leg. W. Ingham, 16. VIII. 00 (Herb. Dixon als *T. mutabile var. cophocarpum* teste Braithwaite); „Derbyshire, Tideswell Dale", ster., leg. Whitehead, VI. 82 (Herb. Dixon); Irland: „Newcastle, Co. Down rock by the sea", ster., leg. Davies, VI. 04 (Herb. Dixon).

9. ***cuspidatum*** (vgl. Idealtypus *cuspidatum* oben!).

Meist sterile, tiefe und dichte Rasen von lebhaft grüner, innen rostbrauner Färbung, oder an freieren Stellen ganz gebräunt.

Das Areal dieser Formengruppe erstreckt sich unter Ausschluss des Mittelmeerbeckens vom Südfuss der Alpen über die Gebirge Mitteleuropas bis auf die britischen Inseln und nach Südschweden; sie ist in diesem ganzen Gebiet weit verbreitet und besonders an Kalkfelsen häufig.

Oberitalien: „Stravalle prope Torno ad lacum Larium“, ster., leg. Artaria, 4. IX. 96 (Herb. Levier u. Thériot): „Valle di Pliniana prope Torno, ca. 400 m“, c. frct.!, leg. Artaria, 15. VIII. 95 (Herb. Dismier); Steiermark: „Kalkfelsen am Abhang des Wotschberges gegen Maxau, ca. 600 m“, ster., leg. Breidler (Herb. Geheeb); „Kalkfelsen zwischen Sulzbach und Leutschdorf im Sanntal, ca. 530 m“, ster., leg. Breidler (Herb. Geheeb); „Praphug, 800 m“, leg. Breidler (Herb. Geheeb); Jura: „Chaux (Ain)“, leg. Dismier, 15. VIII. 00; „Doubs, fissures des rochers frais du bois de Chandaune, ca. 380 m“, c. frct.!, leg. Dismier, 2. XII. 02; „rochers calcaires près Noirvaux, ca. 900 m“, ster., leg. Meylan; „Dent de Vaulion, ca. 1400 m“, ster., X. 99, leg. Meylan; „Creux du Van, 1400 m“, leg. Meylan 01; „Gorges de Covatannaz, rochers ombragés, 800 m“, ster., leg. Meylan, 00; „Fond de la Corbière (Fleurier), 850 m“, ster., leg. Meylan, 22. III. 96; „Montagne de Boudry, 1100 m“, ster., leg. Meylan, VIII. 03; „Noirmont, 1400 m“, ster., leg. Meylan, IX. 98; „Gorges de Longeaigue (Temple aux Fées), 1000 m“, VIII. 98, leg. Meylan; „Deneyriaz (Chasseron), 1050 m“, ster., leg. Meylan, VIII. 98; „Gebenstorfer Horn auf Nagelfluh, ca. 480 m“, ster., leg. Geheeb, 10. IX. 03; „Kamm der Lägern, 830 m“, ster., leg. Culmann, XI. 84; Baden: Schattige Felsen im Höllental (Schwarzwald), ca. 600 m, ster., leg Th. Herzog, X. 04; Westfalen: „Auf Kalkfelsen des Hohensteins bei Warburg“ (Herb. Geheeb) ist Schimpers Original von *T. cuspidatum!*; „An Kalkfelsen bei Höxter“, leg. F. Müller? (Herb. Geheeb); Frankreich: „Terrasson, Dordogne, fissures de rochers calcaires“, ster., leg. Lachenaud, 26. I. 00; „Sarthe: Assé le Boisne“, ster., leg. Monguillon, 4. VI. 86 (Herb. Dismier u. Thériot); Belgien: „Bouillon“, ster., leg. Cardot, 81; „Rochefort, rochers calcaires“, ster., leg. Cardot, 85; „Ardennes, Vallée de la Lemoy“, ster., leg. Cardot, 83; „auf überschatteten Kalkfelsen bei Bouvignes (Namur)“, c. frct. unico vet.!, leg. Gravet, 73 (Herb. Geheeb) — diese Exemplare zeichnen sich durch extrem schmale Blätter und die fast grannenartig lang austretende Rippe aus!; „Dinant“, ster., leg. Gravet (Herb. Geheeb); England: „Strid Bolton Woods“, ster., leg. Ingham, 5. IX. 90 (Herb. Dixon als *T. mutabile var. cophocarpum* teste Braithwaite); „Gloucestershire, Symonds Yate“, c. frct. vet.!, leg. Dixon, 20. VII. 03; „Yorkshire, Malham“, ster., leg. Dixon, 24. VII. 96; „Clapham, Yorkshire“, ster., leg. Dixon, 30. VII. 96; „N. Wales, Crom Bychan, Merioneth“, ster., leg. Jones & Horrell IV. 03 (Herb. Dixon); Südschweden: „Gotland“, ster., leg. Lindberg, 65.

Phylogenetische Schlüsse.

Die bisher aus praktischen Rücksichten meiner Arbeit zu Grunde gelegte Reihe muss sich jedoch leider den Vorwurf der Künstlichkeit gefallen lassen; zwar nur insofern, als weder Typus *densum* noch Typus *cuspidatum* als genetisches Anfangsglied der Reihe betrachtet werden kann; denn ihre Lückenlosigkeit würde die Aufstellung der Reihe rechtfertigen.

Weniger leicht ist die Konstruktion des Stammbaumes unserer Formengruppe. Hier können wir nämlich keine fortlaufende Reihe annehmen. Nach meiner Auffassung handelt es sich bei den abgeleiteten Formen vielmehr um Ausstrahlungen in verschiedenen Richtungen, die ich alle auf *mutabile* zurückführe. Typus *litorale* und *cuspidatum* scheinen mir nämlich von vornherein sich wenig zu Anfangsgliedern einer phylogenetischen Reihe zu eignen. Ihre relativ eng umgrenzte geographische Verbreitung, verbunden mit grosser Plastizität und fast regelmässiger Sterilität, die nach dem durchaus normalen Fruktifizieren einzelner weniger Individuen nicht ursprünglich sein kann, sondern durchaus als abgeleitet aufgefasst werden muss, sprechen dagegen.

Dass ich von den beiden übrigen — *densum* und *mutabile* — dem letzteren den Vorzug gebe, hat drei Gründe: erstens wäre es, wenn ich von *densum* ausginge, doch nötig zunächst auf *mutabile* loszusteuern, das dann den Knotenpunkt für zwei Ausstrahlungen — die eine in progressivem (*cuspidatum*), die andere in kompliziert rückläufigem Sinne (*litorale*) — bildete, zweitens spricht das zersplitterte Verbreitungsareal des Typus *mutabile* für ein grösseres Alter desselben gegenüber dem geographisch eng umgrenzten Typus *densum*, und drittens ist das rudimentäre Peristom von *densum* zweifellos eine abgeleitete und nicht primäre Peristomform, wie

auch die verschiedenen Kapselformen und Peristomvariationen des Formenkreises von *mutabile* sich bei einem Ausgehen von *densum* schwer erklären liessen.

Somit bin ich förmlich gezwungen, *mutabile* als Urtypus aufzufassen und von diesem selbst drei Ausstrahlungen anzunehmen. Ich habe die Verwandtschaftsverhältnisse, wie sie sich aus Zugrundelegung dieses Urtypus ergeben, in einem Stammbaum graphisch darzustellen versucht, verweise also zu besserem Verständnis auf diesen (S. 481).

Dass ich dabei nicht, meiner bisher benützten Formenreihe folgend, über *litorale* zu *densum* gelange, sondern dieses als direkten Zweig von *mutabile* aus ableite, liegt zum grössten Teil an der Schwierigkeit, bei dem Umweg über *litorale* die geographisch enge und von *litorale* verschiedene Verbreitung von *densum* zu erklären. Noch grössere Schwierigkeiten würden sich ergeben, wenn wir unter jener Annahme erklären müssten, warum Typus *densum* nicht kalkscheu, ja sogar kalkhold ist, da doch in der Richtung auf *litorale* die Formen immer kalkscheuer werden und schliesslich die als *densum — litorale* bezeichneten Formen geradezu als kieselstet bezeichnet werden können.

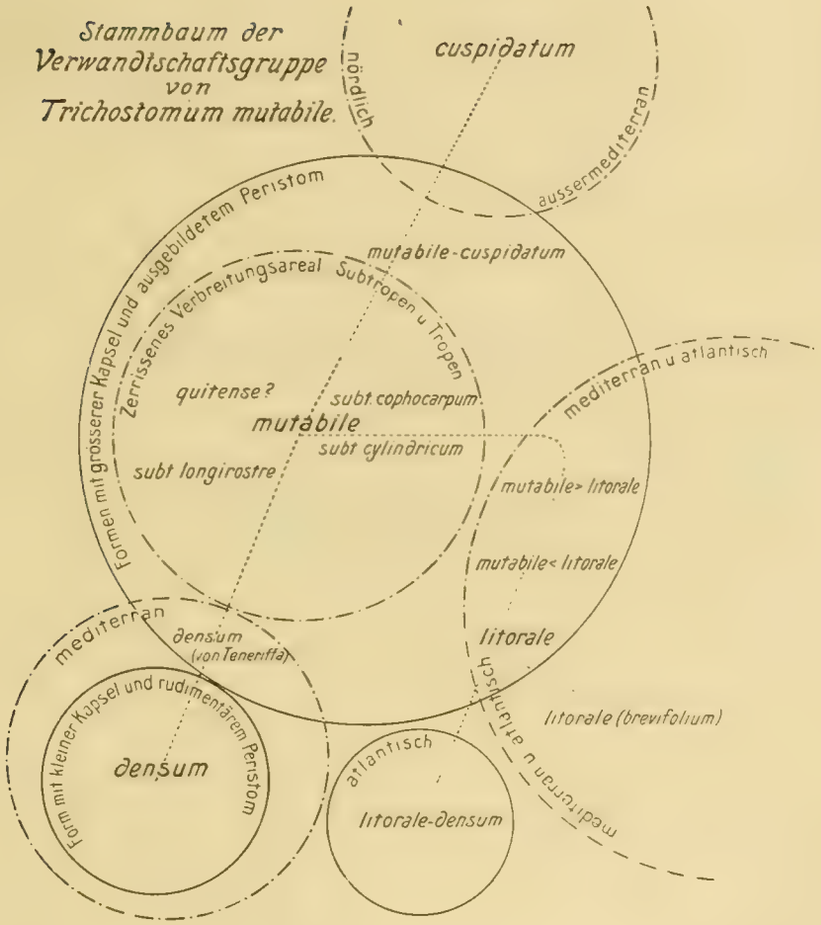
Meine Rettung ist in diesem Falle eine Form von *densum* aus Teneriffa, die durch ihre längeren, lockereren Blätter und höheren Wuchs eine Verbindung mit *mutabile* herzustellen geeignet erscheint. Dass Zwischenglieder zwischen diesen beiden Typen nicht häufiger sind, ist zwar verdächtig, kann jedoch meine Auffassung nicht ändern, da ja bekanntermassen viele intermediäre Formen verschwunden sind. Eine Erklärung würde vielleicht darin zu finden sein, wenn man annimmt, dass die Lostrennung des Typus *densum* von *mutabile* relativ früh eingetreten ist, während die Ausstrahlungen gegen *cuspidatum* und *litorale* erst der neueren Zeit angehören würden. Typus *densum*, der in seiner Isoliertheit einen etwas „fossilen" Eindruck macht, stände somit in scharfem Gegensatz zu den relativ jungen und plastischen Gruppen von *cuspidatum* und *litorale*.

Auffallend ist freilich, dass die weitest gehende Abänderung von *litorale* sich auf einem Weg befindet, der direkt zu *densum* zu führen scheint. Dieser Umstand darf aber nach dem Obengesagten nicht irreführen.

Ich nehme somit an, dass der Urtypus ***mutabile*** in früheren Epochen eine sehr weite Verbreitung besessen habe. Von diesem früheren Verbreitungsareal sind uns im wesentlichen übereinstimmende Reste im Kaukasus, Japan, Réunion, Ecuador (*T. quitense?*) und Neu-Seeland bis heute erhalten geblieben. Der Mittelpunkt seiner heutigen Verbreitung ist das Gebiet der „Atlantis" und der südlichen Mittelmeerländer, also im wesentlichen ein Gebiet von subtropischem Charakter.

Der Typus ***densum***, den nur eine einzige Form mit *mutabile* zu verknüpfen scheint, muss sich relativ früh von *mutabile* abgetrennt haben und ist in der „Atlantis" und den südlichen Mittelmeerländern „fossil" geworden.

Von den in nördlicheren Gebieten erhalten gebliebenen Formen des Urtypus haben sich offenbar, doch wohl erst in relativ jüngerer Zeit mit der Veränderung des Klimas, die beiden Formenreihen *mutabile — cuspidatum* und *mutabile — litorale* herausgebildet, deren beider Verbreitungszentrum nördlicher als das der Typen *mutabile* und *densum* liegt. Dass namentlich *litorale* sich bis heute ausserordentlich plastisch erhalten hat, bezeugen die zahlreichen Formen, die ich oben erwähnte und von denen die extremste (*litorale — densum*) in ihrer Entwicklung wieder eine rückläufige Richtung eingeschlagen hat.


Stammbaum der Verwandtschaftsgruppe von Trichostomum mutabile.
cuspidatum
nördlich
aussermediterran
Formen mit grösserer Kapsel und ausgebildetem Peristom
mutabile-cuspidatum
Zerrissenes Verbreitungsareal
Subtropen u Tropen
quitense?
subt cophocarpum
mutabile
subt cylindricum
subt longirostre
mediterran u atlantisch
mutabile> litorale
mutabile< litorale
mediterran
densum (von Teneriffa)
litorale
litorale (brevifolium)
Form mit kleiner Kapsel und rudimentärem Peristom
densum
atlantisch
litorale-densum
mediterran u atlantisch

Erklärung der Tafeln.

Tafel 1 (Tab. VI).

Tafel 1 (Tab. VI).

Habitusbilder, vergr. 8 mal.

Fig. 1. Typus *densum* (von Sardinien, Cap San Elia bei Cagliari, leg. Herzog).
„ 2. Zwischenform? zwischen Typus *densum* und Typus *mutabile* (von Teneriffa, Agua mauças, leg. Fritze).
„ 3. *densum* — *litorale* (von Irland, Donegal, Porsioned Glen, leg. Dixon).
„ 4. Typus *litorale* (*brevifolium*) (von England, Cornwall, St. Just, leg. Dixon).
„ 5. Typus *litorale* (von Sardinien, San Pietro, Regione Canauti, leg. Herzog).
„ 6. Typus *litorale* (*flaccido-litorale*) (von Sardinien, Canale Candelazzu bei Teulada, leg. Herzog).
„ 7. *litorale* > *mutabile* (von Sardinien, San Pietro, leg. Herzog).

Lith. Anst. v. Paul Schaedler Leipzig.

Herzog: Trichostomum mutabile Br. Tal. I.

Tafel 2 (Tab. VII).

Tafel 2 (Tab. VII).

Habitusbilder, vergr. 8 mal.

Fig. 1. *litorale* > *mutabile* (von Teneriffa, Agua Garcia, Herb. Geheeb).
„ 2. *litorale* > *mutabile* (von Toscana, Fiesole bei Florenz, Herb. Levier).
„ 3. *litorale* < *mutabile* (von England, Cornwall, Carbiss Bay, leg. Curnow & Dixon).
„ 4. Typus *mutabile* (von Madeira, Ribeiro da Medade, Herb. Geheeb).
„ 5. Typus *mutabile* (von Toscana, prope Certosam ad merid. Florentiae, Herb. Levier).
„ 6. Typus *mutabile*, Subtyp. *cophocarpum* (von Sardinien, San Pietro, leg. Herzog).

Herzog: Trichostomum mutabile Br. Taf. 2.

Tafel 3 (Tab. VIII).

Habitusbilder, vergr. 8 mal.

Fig. 1. Typus *mutabile*, Subtyp. *cylindricum* (von Madeira, Ribeiro di João Gomez bei Funchal, Herb. Geheeb).

„ 2. Typus *mutabile*, Subtyp. *longirostre* (von Neu-Seeland, Herb. Levier).

„ 3. *mutabile* — *cuspidatum* (von Sardinien, Monte Santo bei Pula, leg. Herzog).

„ 4. Typus *cuspidatum* (Original, Herb. Geheeb).

Herzog: Trichostomum mutabile Br. Taf. 3.

Tafel 4 (Tab. IX).

Tafel 4 (Tab. IX).

Blätter, vergr. 32 mal.

Fig. 1. Typus *densum* (Sardinien, Cap San Elia).
„ 2. *densum* (Sardinien, San Pietro).
„ 3. *densum* — *litorale* (Irland, Donegal, Porsioned Glen.).
„ 4. Typus *litorale* (Sardinien, Regione Canauti auf San Pietro).
„ 5. *litorale* > *mutabile* (Sardinien, San Pietro).
„ 6. *litorale* (*brevifolium*) (Frankreich, Jersey, baie du Rozel).
„ 7. *litorale* (*brevifolium*) (Irland, „Dublin“).
„ 8. *litorale* (*brevifolium*) (Vallombrosa).
„ 9. *densum* — *litorale* (Sardinien, Scui).
„ 10. Typus *mutabile,* Subtyp. *cophocarpum* (Sardinien, San Pietro).
„ 11. *litorale* > *mutabile* (Teneriffa, Agua Garcia).
„ 12. *litorale* > *mutabile* (Toscana, Fiesole).

Herzog: Trichostomum mutabile Br. Taf. 4.

Tafel 5 (Tab. X).

Tafel 5 (Tab. X).

Blätter, vergr. 32 mal.

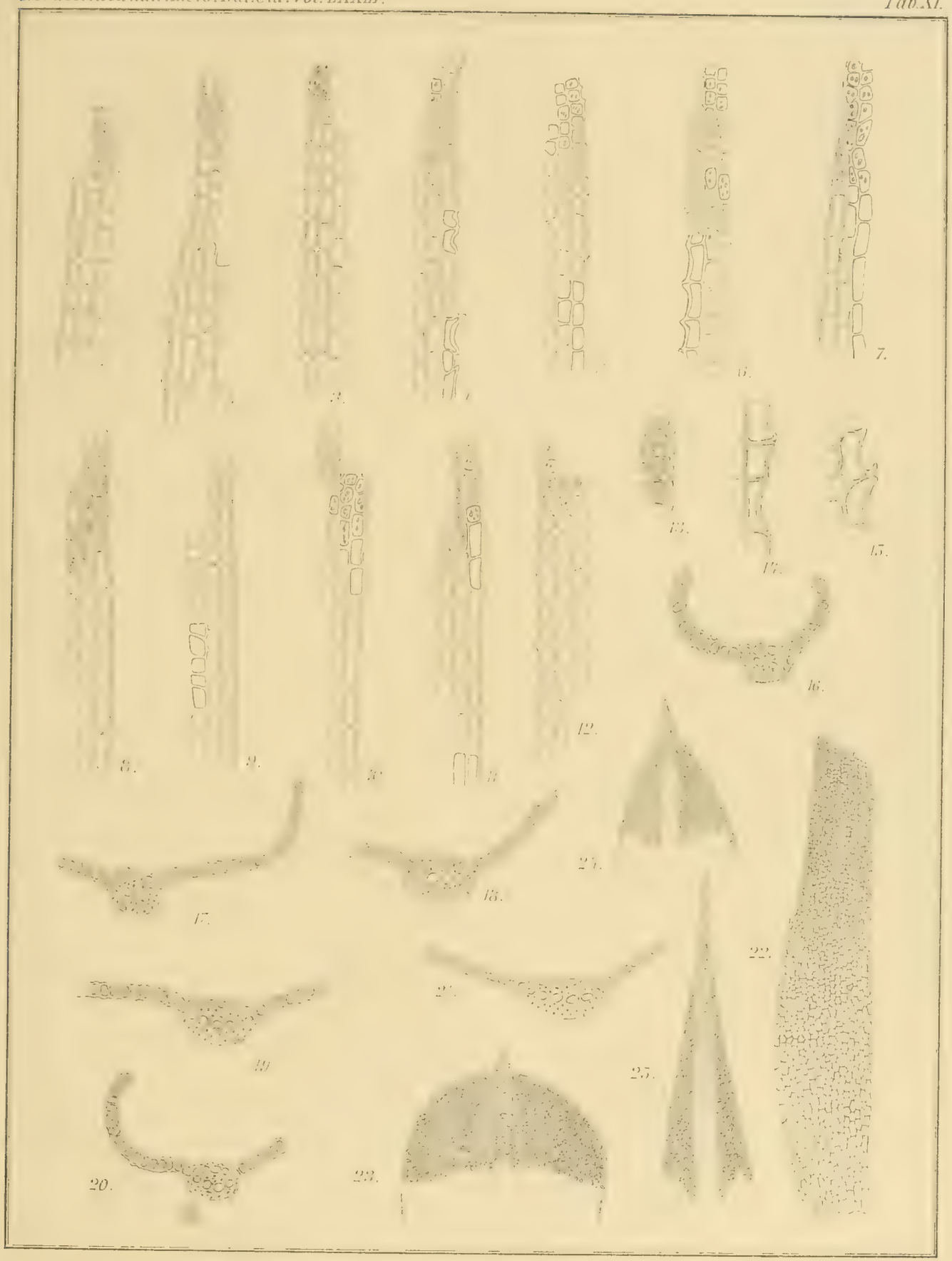
Fig. 1. Typus *mutabile,* Subtyp. *cylindricum* (Madeira, Ribeiro di João Gomez).
„ 2. Typus *mutabile* (Toscana, prope Certosam).
„ 3. Typus *mutabile* (Madeira, Ribeiro da Medade).
„ 4. *mutabile — cuspidatum* (Sardinien, Monte Santo bei Pula).
„ 5. Typus *cuspidatum* (Original)
„ 6. Typus *cuspidatum* (England, Yorkshire, Clapham).
„ 7. Typus *cuspidatum* (England, „Strid" Bolton Woods).
„ 8. *mutabile,* Subtyp. *longirostre* (Neu-Seeland).
„ 9. Typus *mutabile* (Japan).

Herzog: Trichostomum mutabile Br. Taf. 5.

Tafel 6 (Tab. XI).

Tafel 6 (Tab. XI).

Fig. 1—12. Zähnelung des Blattrandes bei:
„ 1. Typus *densum* (Sardinien, San Pietro).
„ 2. *densum — litorale* (Irland, Donegal, Porsioned, Elen).
„ 3. *litorale* (*brevifolium*) (Irland „Dublin").
„ 4. *litorale* (*brevifolium*) (Vallombrosa).
„ 5. *litorale* (*brevifolium*) (Frankreich, Dissé sur le Lude).
„ 6. Typus *litorale* (Sardinien, Reg. Canauti auf San Pietro).
„ 7. *litorale* > *mutabile* (Sardinien, San Pietro).
„ 8. *mutabile,* Subtyp. *cophocarpum* (Sardinien, San Pietro).
„ 9. Typus *mutabile* (Toscana, prope Certosam).
„ 10. Typus *mutabile* (Madeira, Ribeiro da Medade).
„ 11. Typus *cuspidatum* (Original).
„ 12. *mutabile,* Subtyp. *longirostre* (Neu-Seeland).
„ 13. Randzellen der oberen Blatthälfte bei *litorale* > *mutabile* (Sardinien, San Pietro), stärker vergr.
„ 14 u. 15. Randzellen der unteren Blatthälfte in der gewellten Partie des Scheidenteils, stärker vergr.,
„ 14. bei *litorale* (*brevifolium*) (Vallombrosa),
„ 15. bei Typus *litorale* (Sardinien, Reg. Canauti auf San Pietro).
„ 16—21. Blattquerschnitte:
„ 16. *densum — litorale* (Belgien, Frahan).
„ 17. dasselbe, weiter abwärts.
„ 18. *litorale* (*brevifolium*) (England, Cornwall, Landsend Pontherth).
„ 19 u. 20. Typus *litorale* (Schottland, Sutherland, Ben Hope).
„ 21. *litorale* > *mutabile* (England, Cumberland, Lodore).
„ 22. Untere linke Blatthälfte von Typus *densum* (Sardinien, San Pietro).
„ 23—25. Haupttypen von Blattspitzen, etwas schematisiert.
„ 23. Typus *litorale.*
„ 24. Typus *mutabile.*
„ 25. Typus *cuspidatum.*



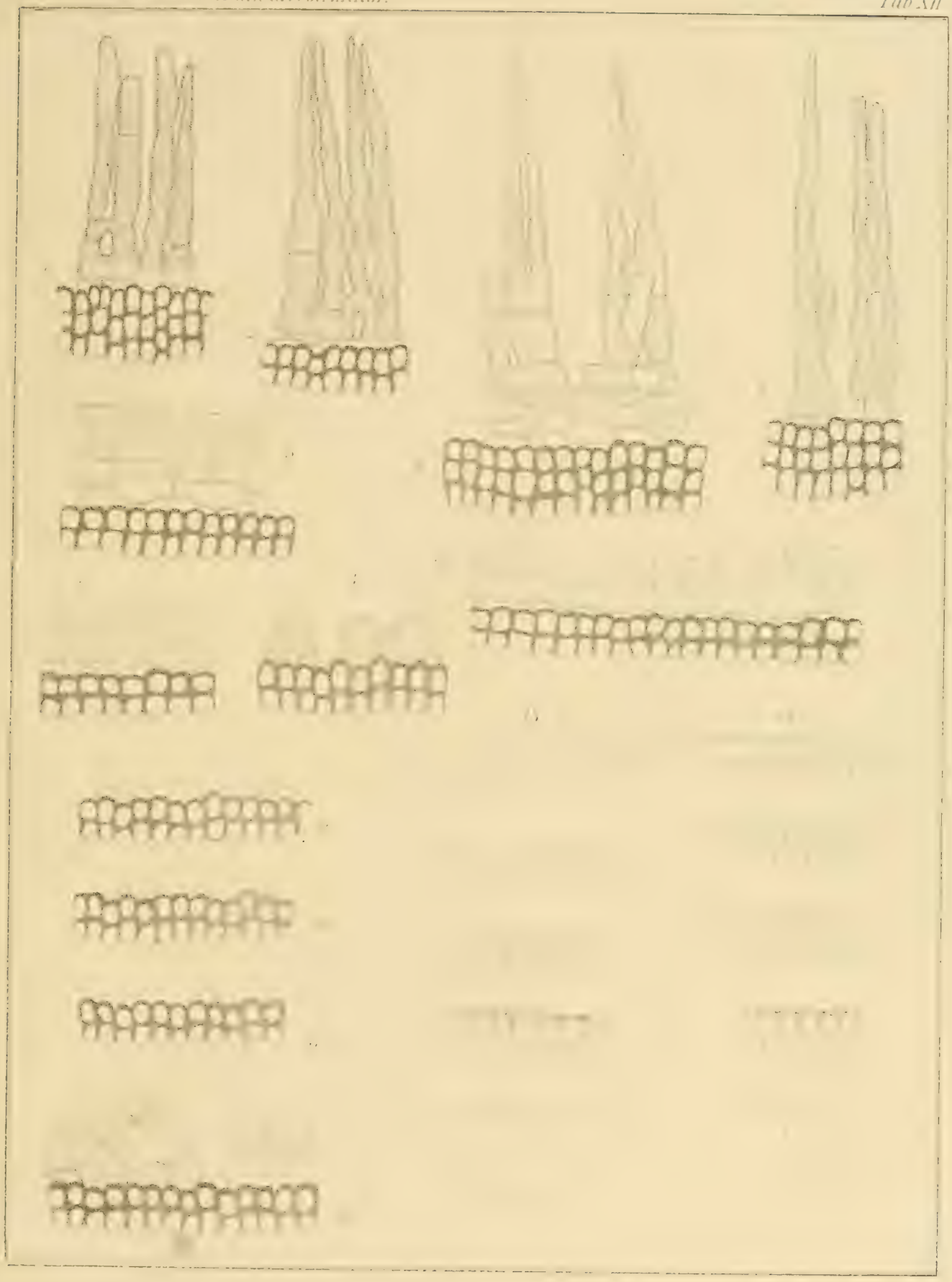
Lith. Anst. v. Paul Schindler, Leipzig

Herzog: Trichostomum mutabile Br. Taf. 6.

Tafel 7 (Tab. XII).

Tafel 7 (Tab. XII).

Fig. 1—12. Peristomzähne.
„ 1. *mutabile,* Subtyp. *cylindricum* (Toscana, Fiesole b. Florenz).
„ 2. *mutabile — cuspidatum* (Sardinien, Monte Santo bei Pula).
„ 3. Typus *mutabile* (Liguria, Pegli).
„ 4. *mutabile,* Subtyp. *cylindricum* (Madeira, Ribeiro di João Gomez).
„ 5. *mutabile,* Subtyp. *cophocarpum* (Sardinien, San Pietro).
„ 6. *mutabile,* Subtyp. *cophocarpum* (Sardinien, zwischen Pula u. Cala d'Ostia).
„ 7. *mutabile,* Subtyp. *cophocarpum* (Lusitanien, Algarve).
„ 8. Typus *cuspidatum* (Oberitalien, Pliniana).
„ 9. Typus *densum* (Sardinien, Cap San Elia).
„ 10. Typus *densum* (Sardinien, San Pietro).
„ 11. Typus *mutabile* (Toscana prope Certosam).
„ 12. Typus *mutabile* (Menorca).
„ 13 u. 14. Schema der Papillenentwicklung,
„ 13. bei *Trichostomum mutabile.*
„ 14. bei *Trichostomum nitidum.*



Herzog: Trichostomum mutabile Br. Taf. 7.

3 2044 072 240 070

Date Due

APR 20 '67.

Folgende von der Akademie herausgegebene Bände der NOVA ACTA sind durch die Buchhandlung von Wilh. Engelmann in Leipzig zu beziehen:

Band	LXXXVI		Halle	1906.	4°.
„	LXXXV		„	1906.	„
„	LXXXIV		„	1905.	„
„	LXXXIII		„	1905.	„
„	LXXXII		„	1904.	„
„	LXXXI		„	1903.	„
„	LXXX		„	1903.	„
„	LXXIX		„	1901.	„
„	LXXVIII		„	1901.	„
„	LXXVII		„	1901.	„
„	LXXVI		„	1900.	„
„	LXXV		„	1899.	„
„	LXXIV		„	1899.	„
„	LXXIII		„	1907.	„
„	LXXII		„	1899.	„
„	LXXI		„	1898.	„
„	LXX		„	1898.	„
„	LXIX		„	1898.	„
„	LXVIII		„	1897.	„
„	LXVII		„	1896.	„
„	LXVI		„	1896.	„
„	LXV		„	1896.	„
„	LXIV		„	1895.	„
„	LXIII		„	1895.	„
„	LXII		„	1894.	„
„	LXI		„	1894.	„
„	LX		„	1894.	„
„	LIX		„	1893.	„
„	LVIII		„	1893.	„
„	LVII		„	1892.	„
„	LVI		„	1891.	„
„	LV		„	1891.	„
„	LIV		„	1890.	„
„	LIII		„	1889.	„
„	LII		„	1888.	„
„	LI		„	1887.	„
„	L		„	1887.	„
„	XLIX		„	1887.	„
„	XLVIII		„	1886.	„
„	XLVII		„	1885.	„
„	XLVI		„	1884.	„
„	XLV		„	1884.	„
„	XLIV		„	1883.	„
„	XLIII		„	1882.	„
„	XLII		„	1881.	„
„	XLI P. II		„	1880.	„
„	XLI P. I		„	1879.	„
„	XL		„	1878.	„
„	XXXIX		Dresden	1877.	„
„	XXXVIII		„	1876.	„
„	XXXVII		„	1875.	„
„	XXXVI		„	1873.	„
„	XXXV		„	1870.	„
„	XXXIV		„	1868.	„
„	XXXIII	(= N. F. Bd. XXV)	„	1867.	„
„	XXXII P. II	(= „ „ „ XXIV Abth. 2)	„	1867.	„
„	XXXII P. I	(= „ „ „ XXIV Abth. 1)	„	1865.	„
„	XXXI	(= „ „ „ XXIII)	„	1864.	„
„	XXX	(= „ „ „ XXII)	„	1864.	„
„	XXIX	(= „ „ „ XXI)	Jena	1862.	„
„	XXVIII	(= „ „ „ XX)	„	1861.	„
„	XXVII	(= „ „ „ XIX)	„	1860.	„
„	XXVI P. II	(= „ „ „ XVIII Abth. 2)	Breslau und Bonn	1858.	„
„	XXVI P. I	(= „ „ „ XVIII Abth. 1)	„ „ „	1857.	„
„	XXV P. II	(= „ „ „ XVII Abth. 2)	„ „ „	1856.	„
„	XXV P. I	(= „ „ „ XVII Abth. 1)	„ „ „	1855.	„
„	XXIV Spl.	(= „ „ „ XVI Spl.)	„ „ „	1854.	„
„	XXIV P. II	(= „ „ „ XVI Abth. 2)	„ „ „	1854.	„
„	XXIV P. I	(= „ „ „ XVI Abth. 1)	„ „ „	1854.	„
„	XXIII Spl.	(= „ „ „ XV Spl.)	„ „ „	1856.	„
„	XXIII P. II	(= „ „ „ XV Abth. 2)	„ „ „	1852.	„
„	XXIII P. I	(= „ „ „ XV Abth. 1)	„ „ „	1851.	„